Markus Vogt

Quantenmechanik und Mathematik

Teil 1: Normierte Räume, Spektraltheorie

$$
\begin{aligned}
\widehat{F}_f\,\widehat{F}_g\,\psi &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,d\widehat{E}\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\,d\widehat{E}\,\psi\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{N_n^{(f)}} c_{i,n}^{(f)}\,\chi_{Z_{i,n}^{(f)}}(\lambda)\,\widehat{E}(Z_{i,n}^{(f)})\right]\left[\sum_{j=0}^{N_m^{(g)}} c_{j,m}^{(g)}\,\chi_{Z_{j,m}^{(g)}}(\lambda)\,\widehat{E}(Z_{j,m}^{(g)})\,\psi\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{N_n^{(f)}}\sum_{j=0}^{k} c_{i,n}^{(f)}\,c_{(k-j),m}^{(g)}\,\chi_{Z_{i,n}^{(f)}}(\lambda)\,\chi_{Z_{(k-j),m}^{(g)}}(\lambda)\,\widehat{E}(Z_{i,n}^{(f)})\,\widehat{E}(Z_{(k-j),m}^{(g)})\,\psi\\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{N_n^{(f)}}\sum_{j=0}^{k} c_{i,n}^{(f)}\,c_{(k-j),m}^{(g)}\,\chi_{Z_{i,n}^{(f)}\cap Z_{(k-j),m}^{(g)}}(\lambda)\,\widehat{E}(Z_{i,n}^{(f)}\cap Z_{(k-j),m}^{(g)})\,\psi\\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{q=0}^{N} c_q^{(f)}\,c_q^{(g)}\,\chi_{Z_q}(\lambda)\,\widehat{E}(Z_q)\,\psi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,g(\lambda)\,\widehat{E}\,\psi = \widehat{F}_{fg}\,\psi
\end{aligned}
$$

Cuvillier Verlag Göttingen
Internationaler wissenschaftlicher Fachverlag

Quantenmechanik und Mathematik

Markus Vogt

Quantenmechanik und Mathematik

Teil 1: Normierte Räume, Spektraltheorie

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.
1. Aufl. - Göttingen: Cuvillier, 2013

978-3-95404-546-4

Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen
Telefon: 0551-54724-0
Telefax: 0551-54724-21
www.cuvillier.de

1. Auflage, 2013
Gedruckt auf umweltfreundlichem säurefreiem Papier aus nachhaltiger Forstwirtschaft.

978-3-95404-546-4

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Buch ist ein reines Mathematik-Buch, auch wenn das aus dem Titel nicht in eindeutiger Weise hervorgeht. Anders als die übliche Literatur gleichen oder sinnverwandten Namens, die in großem Umfang und hoher Qualität vorhanden ist, soll es hier nicht um eine formal rigorose Darstellung des wohl wichtigsten physikalischen Theoriengebäudes und schon gar nicht um Anwendungen desselben gehen. Stattdessen steht diejenige Mathematik, die von der Quantenmechanik oder genauer gesagt einer ihrer speziellen Darstellungsformen verwendet wird, als Selbstzweck im Mittelpunkt der Betrachtung.

Die Hilbertraum-Formulierung der nichtrelativistischen Quantenmechanik, um die es sich bei der soeben erwähnten Darstellungsform handelt, kann heute zwar nicht mehr in Anspruch nehmen, den formal allgemeinsten und grundlegendsten Zugang darzustellen, dennoch steht sie in Anbetracht ihrer historischen und auch didaktischen Bedeutung nach wie vor im Zentrum des Aufbaus unseres physikalischen Weltbilds. Dabei macht sie nicht nur wie in der theoretischen Physik üblich von sehr abstrakten mathematischen Hilfsmitteln Gebrauch; ihre Entwicklung hat in ganz besonders starkem Maß überhaupt erst dazu geführt, einen wesentlichen Bereich der Mathematik in Gestalt der Funktionalanalysis und deren Randgebiete auf ihre moderne Form zu bringen. Dabei war es keineswegs das erste Mal, daß ein solches Phänomen zu beobachten war; man denke etwa an die deutlich frühere schrittweise Entdeckung der elementaren Analysis. Es stellt inzwischen auch keine Ausnahme mehr dar. Der Nebeneffekt der Physik, als Quelle für primär innermathematische Erkenntnisse zu dienen, trat dabei jedoch erstmals in völlig neuer Dimension auf.

Hier soll in zwei Bänden genau derjenige Teil der Mathematik detailliert beschrieben werden, aus dem die Hilbertraum-Quantenmechanik aufgebaut ist, aber nicht, um das notwendige Handwerkszeug zur Beschäftigung mit dieser bereitzustellen – dafür gibt es wie gesagt genügend hervorragende Anleitungen – sondern um diesen Teil der Mathematik selbst kennenzulernen, ohne Rücksicht auf Anwendungen, dafür jedoch mit einem geschärften Blick auf Zusammenhänge, Querverbindung und Verallgemeinerungen, welche die Sache um ihrer selbst willen besonders interessant machen. Dabei wird die Mathematik zu jeder Zeit als etwas real existierendes aufgefaßt, dessen Bestandteile entdeckt und nicht erfunden werden. Es darf darüber gestaunt werden, ohne es irgendwie erklären zu können, daß Mathematik zur Beschreibung von Naturvorgängen hervoragend geeignet ist; im Mittelpunkt des Interesses steht das hier jedoch nicht, vielmehr dient die mathematische Physik als Fundgrube für Themen, die zu betrachten aus rein mathematischer Motivation lohnt.

Aus inhaltlicher Sicht startet der hier vorliegende erste Band bei der linearen Algebra, dennoch wendet er sich an Leserinnen und Leser mit etwas breiteren Vorkenntnissen. Während die Funktionalanalysis oder genauer gesagt die in den Untertiteln genannten Themen von Grund auf entwickelt werden, kommen dabei verbreitet Hilfsmittel aus Nachbardisziplinen zum Einsatz, die teilweise im ersten Kapitel kurz beschrieben, teilweise auch ohne weitere Erläuterungen verwendet werden. Entsprechende Kenntnisse insbesondere aus der reellen und komplexen Analysis sowie der Mengenlehre werden daher vorausgesetzt. Darauf aufbauend führt das Buch in Bereiche der Funktionalanalysis, die weit über die in den Standard-Lehrbüchern betrachteten Themen hinausgehen und teilweise bis jetzt nur in der Originalliteratur zu finden sind.

Rottweil, im Oktober 2013

Markus Vogt

Email-Adresse des Autors: Vogt.Markus@t-online.de

Einleitung

Es gibt viele Arten, sich mit Quantenmechanik zu beschäftigen. Wenn man von der Experimentalphysik absieht und ansonsten mit einer sehr groben Charakterisierung zufrieden ist, lassen sich zwei grundsätzliche Varianten unterschieden. Beispielsweise kann man es auf die Berechnung von Zustandsfunktionen, Eigenwerten und dergleichen sowie auf die Herleitung spezieller und allgemeiner Gesetzmäßigkeiten abgesehen haben und befindet sich dann auf dem Gebiet der theoretischen Physik; man kann andererseits auch überprüfen, inwieweit das alles mathematisch überhaupt existiert und strengsten Anforderungen an die formale Rigorosität standhält, womit man sich auf dem Areal der mathematischen Physik bewegt. Wir werden uns hier zwar tendenziell an die zweitgenannte anlehnen, aber genaugenommen einen dritten Weg beschreiten.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Mathematik der Quantenmechanik, genauergesagt mit derjenigen der Hilbertraum-Formulierung der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Dies geschieht aus rein technischer Sicht im Sinn der mathematischen Physik, aber nicht mit den Randbedingungen der physikalischen Brauchbarkeit und Anwendbarkeit, sondern mit denjenigen der Beschäftigung mit Mathematik um ihrer selbst willen. Die zentralen Fragen lauten daher: Welche interessanten Sachverhalte hat die Mathematik der Quantenmechanik zu bieten? Welche Zusammenhänge zwischen ihren einzelnen Bereichen gibt es? Welche Verallgemeinerungen sind bekannt, was geschieht, wenn man physikalisch motivierte Einschränkungen mathematisch überschreitet? Wo kommen in der Physik gelegentlich nur heuristisch oder auch gar nicht begründete Begriffe aus mathematischer Sicht her? Ganz wesentlich ist es dabei, die diskutierten Resultate selbst in das Zentrum des Interesses zu rücken und nicht deren technische Anwendbarkeit für was auch immer. Daher sind durchweg ausführliche Beweise unverzichtbarer Bestandteil der Darstellung; sie sind ebenfalls als Selbstzweck zu betrachten. Natürlich kommen dabei sozusagen als Nebenprodukt hier und dort auch physikalische Einsichten heraus, nicht diese stehen jedoch im Zentrum des Interesses, sondern in erster Linie die rein mathematischen Erkenntnisse, die man dabei kennenlernen kann.

Die erkenntnistheoretische Grundhaltung, die hierbei dem Umgang mit der Mathematik unterlegt wird, ist eine uneingeschränkt platonistische Einstellung. Das bedeutet, daß die Mathematik als etwas außerhalb des menschlichen Geistes gegebenes angesehen wird, dessen Bestandteile – Definitionen, Sätze, Beweise – entdeckt und nicht erfunden werden und schon gar nicht in irgendeiner Form gesellschaftlich konstruiert sind. Die Mathematik ist, wenn überhaupt, genau dann eine Naturwissenschaft, wenn man alles nicht vom Menschen gemachte unter dem Begriff der Natur subsummiert, sie unterscheidet sich jedoch insofern drastisch von den übrigen Naturwissenschaften, auch von den mathematischen, als sich letztere mit Gegenständen der materiellen Welt beschäftigen, die Mathematik dagegen mit Gegenständen einer idealen Welt, die aber gleichwohl als real existent aufzufassen ist. Das führt dazu, daß die Mathematik als einzige Wissenschaft nachweislich richtige und für alle Zeiten gültige Resultate liefert, was sicherlich auch und nicht zuletzt ihre Faszination erklären kann.

Exemplarisch und skizzenhaft seien zwei Aspekte genannt, welche besonders gut in der Lage sind, die hier verfolgte Intention zu illustrieren. Erstens werden wir uns ausgiebig mit den merkwürdigen Sachverhalten befassen, die im Zusammenhang mit unendlichdimensionalen Vektorräumen auftreten. All die schönen einfachen Dinge, die in der elementaren linearen Algebra mit ihren endlichdimensionalen linearen Räumen zu finden sind, verwandeln sich, wenn man sich stattdessen mit unendlichdimensionalen Räumen einläßt, in ebenso unendlich komplizierte aber auch entsprechend interessante neue Eigenschaften, und viele weitere, zuvor nicht gekannte, aber ebenso komplizierte neue Phänomene kommen dazu. So werden etwa Hamel-Basen, Schauder-Basen und Orthonormalbasen, zuvor als Synonyme für ein und dasselbe gehandhabt, jetzt zu völlig unterschiedlichen Objekten, kompakte Mengen verhalten sich nun scheinbar verrückt, es gibt unbeschränkte und damit nirgends stetige lineare Abbildungen, die noch dazu eigentlich den Normalfall darstellen, und Eigenwerte und Eigenvektoren erweisen sich gleich in zweifacher Hinsicht als sehr spezielle Sonderfälle viel allgemeinerer Begriffe. Zweitens und damit zusammenhängend liefert die Beschäftigung mit unendlichdimensinalen Banachräumen im allgemeinen und mit dem Spezialfall unendlichdimensionaler Hilberträume im besonderen eine unerschöpfliche Quelle der Unterhaltung. Besonders interessant daran ist der Vergleich der extrem geordneten Verhältnisse bei letzteren mit der unübersichtlichen Vielfalt an zusätzlicher Struktur bei ersteren oder auch der nur stellenweise erfolgreich zum Ziel führbare und dann stets sehr aufwendige Versuch, bei Hilberträumen vertraute und einfach konstruierbare Begriffe in passende Analoga für Banachräume zu übertragen.

Das ganze wird nicht nur der besseren Übersichtlichkeit wegen, sondern auch inhaltlich angepaßt auf zwei Bände verteilt. Zum Aufbau des ersten Teils: Wir beginnen in Kapitel 1 mit einem kurzen Überblick der teilweise über den Standardstoff einführender Mathematik-Vorlesungen hinausgehenden Voraussetzungen aus den Bereichen der mengentheoretischen Topologie sowie der Maß- und Integrationstheorie, wie sie im weiteren Verlauf wiederholt verwendet werden. In Kapitel 2 beschäftigen wir uns ausführlich mit Banachräumen, wobei wir auch die Randgebiete nicht ganz außer Acht lassen und insbesondere auch diskutieren, wie man durch spezielle Fragestellungen auf den wichtigsten Sonderfall innerhalb dieser Raumklasse, nämlich denjenigen der Hilberträume geführt wird. Diese stehen dann im weiteren Verlauf im Blickpunkt. In Kapitel 3 verschaffen wir uns einen Überblick über die wichtigsten Operatorklassen auf Hilberträumen, und in Kapitel 4 betrachten wir wesentliche Aspekte der Spektraltheorie auf Hilberträumen. Dabei werden physikalische Bezüge nur sporadisch und eher beiläufig sichtbar. Im zweiten Teil folgen dann je ein Kapitel über Distributionen und verallgemeinerte Eigenvektoren, statistische Operatoren, Kommutator- und Unschärferelationen, Schrödinger-Operatoren sowie quantenmechanische Axiomatik. Diese Themen lassen unschwer erkennen, daß dabei physikalische Interpretationen sehr viel deutlicher werden, wenngleich sie auch hier nur Nebenprodukte sind. Natürlich können beide Bücher auch ganz direkt als nicht ganz elementare Einführung in die Funktionalanalysis gelesen werden.

Eine kurze Bemerkung zur Bedeutung mathematischer Strenge in der Quantenmechanik dürfte hier angebracht sein. Was der Quantenmechanik im Vergleich zur klassischen Physik ihren Weltbild-erschütternden Charakter verleiht, hat zunächst einmal nichts mit formal rigoroser Darstellung oder gar unendlichdimensionalen Hilberträumen zu tun. Wesentliche revolutionäre Aspekte wie Welle-Teilchen-Dualismus, das Bellsche Theorem oder dergleichen lassen sich sogar bereits in endlichdimensionalen Zustandsräumen diskutieren, und die Tatsache, daß beispielsweise jederzeit spektakulär genaue Energieeigenwerte realer physikalischer Systeme brechnet werden, ohne daß dabei irgendjemand über unbeschränkte Operatoren und singuläre Spektren nachdenkt, unterstreicht diese These nachdrücklich. Interessiert man sich jedoch für die Details und den präzisen Aufbau der Theorie, wird mathematisch strenges Vorgehen relevant, zumal jeweils auch die dabei zutage tretenden Feinheiten physikalische Interpretationen zulassen. Im Rahmen der Hilbertraum-Quantenmechanik sind daher die Besonderheiten unendlichdimensionaler Räume für ein intuitives Verständnis sicherlich nicht zuallererst von Bedeutung, für ein Durchdringen der Theorie in ihren Einzelheiten dafür jedoch umso mehr.

Kapitel 1

Mathematische Grundlagen

Bevor wir zu den im Mittelpunkt des vorliegenden Buchs stehenden mathematischen Gegenständen kommen, wiederholen wir einige wichtige Begriffe und Sachverhalte aus zwei Disziplinen, die sich als wesentlich für die gesamte Thematik erweisen werden. Gemeint sind Topologie und Maßtheorie; erstere, um qualitative, letztere, um quantitative Aspekte von Mengen zu beschreiben, welche in der Quantenmechanik von Bedeutung sind. Wir beschränken uns dabei auf eine Auflistung benötigter Definitionen und Sätze ohne Beweise; Details findet man beispielsweise in [172] oder [173] sowie [56] oder [136]. Natürlich gibt es noch eine Menge weiterer mathematischer Teilgebiete, die für eine sorgfältige Formulierung der Quantenmechanik gebraucht werden, diese werden wir jedoch, soweit sie hier von Bedeutung sind, jeweils bei Bedarf entwickeln, da sie nicht einfach Hilfsmittel, sondern eher Gegenstand der mathematischen Quantenmechanik sind.

1.1 Elementare Topologie

Die Topologie steht direkt über der Mengenlehre an der zweituntersten Stelle der mathematischen Grundlagendisziplinen[1]. Man kann sie in drei Bereiche unterteilen, die *mengentheoretische Topologie*, welche die Grundlage bildet und mit Techniken aus der elementaren Mengenlehre arbeitet, die *algebraische Topologie*, die Hilfsmittel aus der Algebra wie Ringe, Gruppen oder Moduln verwendet, und die *Differentialtopologie*, die den betrachteten Objekten differenzierbare Strukturen aufprägt und damit für die globalen Aspekte der Differentialgeometrie zuständig ist. Betrachtet man die für die Hilbertraum-Formulierung der Quantenmechanik getreu dieser Bezeichnung zentralen Zustandsräume als Punktmengen, kann man ihnen auch topologische Eigenschaften zuordnen, die wesentlich von der mengentheoretischen Topologie erfaßt werden. Entsprechend wird ausschließlich diese Gegenstand der folgenden Abschnitte sein. Dazu beginnen wir mit einigen Konventionen hinsichtlich der Notation[2] sowie einigen grundlegenden mengentheoretischen Begriffen.

[1] Sofern man von eher metamathematischen Disziplinen wie Logik oder Modelltheorie absieht.
[2] Wir verwenden hier im wesentlichen die Schreibweise von [188].

1.1.1 Notationen und Begriffe aus der Mengenlehre

Die grundlegenden Symbole $\{,\}, \in, \emptyset$ der Mengenlehre brauchen wohl keine nähere Erläuterung, ebensowenig wie $\subset, \supset, \subseteqq, \supseteqq$ sowie $\cap$ und $\cup$. Einige weitere Symbole seien nachstehend kurz erläutert. Zu zwei Mengen A und B sei $A \setminus B = \{ x \in A \mid x \notin B \}$ deren *Differenz* und $A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ deren *symmetrische Differenz*. Für *Ordinalzahlen* verwenden wir griechische Buchstaben $\alpha, A, \beta, B, \gamma, \Gamma, \ldots$ vom Anfang des Alphabeths; die kleinste transfinite Ordinalzahl sei ω. Für *unendliche Kardinalzahlen* verwenden wir entweder kleine griechische Buchstaben $\kappa, \lambda, \ldots$ aus der Mitte des Alphabets oder die *Aleph-Reihe* $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \ldots, \aleph_\kappa, \ldots$, welche die Klasse der unendlichen Kardinalzahlen vollständig ausschöpft. $\aleph_0$ ist die einzige abzählbare Kardinalzahl; alle $\aleph_\alpha$ mit $\alpha \geqq 1$ sind überabzählbar. Die Alephs sind gleichzeitig die Mächtigkeiten der jeweils kleinsten transfiniten Ordinalzahlen $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\kappa, \ldots$. Ist α eine Ordinalzahl, dann sei $\alpha^{<\kappa} = \bigcup \{ \alpha^\beta \mid \beta < \kappa \}$. Die *Mächtigkeit* einer Menge A sei mit $|A|$ bezeichnet; man kann sich unendliche Kardinalzahlen stets auch als Mengen von jeweils entsprechender Mächtigkeit vorstellen. Somit gilt $\kappa^\lambda = |\kappa|^{|\lambda|}$. Die *Potenzmenge* von A bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}(A)$ und die *Menge aller Funktionen* $f : A \longrightarrow B$ mit ${}^{A}B$. Damit gilt $|{}^{\lambda}\kappa| = \kappa^\lambda$. Jede wohlgeordnete Menge A läßt sich ordnungserhaltend und bijektiv auf eine Ordinalzahl α abbilden; man sagt, α sei der *Ordnungstyp* von A und schreibt $\alpha = \# A$. In diesem Sinn kann man sich auch Ordinalzahlen als Mengen vorstellen. Wir schreiben $[A]^\alpha = \{ B \subseteqq A \mid \# B = \alpha \}$ sowie $[A]^{<\alpha} = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} [A]^\beta$ und $[A]^{\leqq\alpha} = \bigcup\limits_{\beta\leqq\alpha} [A]^\beta$. Eine Ordinalzahl α heißt *Nachfolgerordinalzahl*, wenn es eine Ordinalzahl β gibt mit $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$, andernfalls heißt sie *Limesordinalzahl*. Eine Kardinalzahl κ heißt *Nachfolgerzahl*, wenn es eine Ordinalzahl α gibt mit $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$; dann gibt es ein λ mit $\kappa = \lambda \cup \{\lambda\}$. Andernfalls heißt κ *Limeszahl*; in diesem Fall gibt es eine Limesordinalzahl γ mit $\kappa = \aleph_\gamma$. Die *Beth-Reihe* ist definiert durch $\beth_0 = \aleph_0$ und $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$ sowie $\beth_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beth_\beta$, falls α eine Limesordinalzahl ist. Eine Kardinalzahl κ heißt *starke Limeszahl*, wenn für jedes $\lambda < \kappa$ auch $2^\lambda < \kappa$ gilt, das heißt $\kappa = \beth_\alpha$ für eine Limesordinalzahl α. Für die *Konfinalität* der Limesordinalzahl α schreiben wir $\mathrm{cf}(\alpha)$. Eine Kardinalzahl κ heißt *regulär*, wenn $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$; sie heißt *singulär*, wenn $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$. Eine überabzählbare Kardinalzahl κ heißt *schwach unerreichbar*, wenn κ eine reguläre Limeszahl ist. κ heißt *stark unerreichbar*, wenn κ eine reguläre starke Limeszahl ist. Unerreichbare Kardinalzahlen sind die einfachsten Beispiele für *große Kardinalzahlen*, also solche, die viel größer sind als alle Kardinalzahlen, die durch konventionelle arithmetische oder mengentheoretische Konstruktionen erreichbar sind[3]. Wesentlich größere Exemplare werden wir im Abschnitt 1.2.1 kennenlernen, wobei wir ausdrücklich anmerken, daß es auch darüberhinaus noch viel größere große Kardinalzahlen gibt.

[3]Große Kardinalzahlen stellen ein wesentliches Teilgebiet der Mengenlehre dar; ihre Existenz muß in Form zusätzlicher Axiome zu den gewöhnlichen Axiomensystemen der Mengenlehre dazugefügt werden. Entsprechend liefern Resultate über große Kardinalzahlen Informationen über mögliche sinnvolle Erweiterungen der Standard-Axiomensysteme und damit über die Grundlagen der Mathematik auf fundamentaler Ebene. Dabei sind inzwischen sehr viele unterschiedliche Klassen großer Kardinalzahlen mit sehr unterschiedlichen Größen entdeckt worden. Ausführliche Informationen hierüber erteilen [72] und [188].

1.1.2 Offene Mengen

Die Topologie beschäftigt sich mit Eigenschaften von Punktmengen, die nur von der gegenseitigen Lage der Punkte abhängen und nicht von irgendwelchen Abständen. Etwas vereinfacht, aber sehr anschaulich kann man sich vorstellen, daß solche Eigenschaften bei beliebigen elastischen Verformungen erhalten bleiben, wobei das natürlich mathematisch präzisiert werden muß. Dabei ist die Feststellung hilfreich, daß bei elastischen Verformungen in der Nähe eines beliebigen Punktes des betrachteten Objekts in gewissem Sinne relativ wenig passiert, während etwa bei Verformungen, die Risse zur Folge haben, das nicht der Fall ist. Entsprechend gelingt die erwähnte Präzisierung mit Hilfe der Begriffe der Umgebungen und der stetigen Abbildungen, wobei letztere im Vergleich zur elementaren Analysis auf wesentlich allgemeinere Art zu definieren sind.

1.1.2.1 Topologische Räume

Wir beginnen mit dem grundlegenden Begriff der Topologie.

1.1 Definition: X sei eine Menge, $\mathfrak{P}(X)$ deren Potenzmenge und $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X, das folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) $\emptyset \in \mathfrak{X},\ X \in \mathfrak{X}$,

(ii) $A, B \in \mathfrak{X} \implies A \cap B \in \mathfrak{X}$,

(iii) $\mathfrak{U} \subseteqq \mathfrak{X} \implies \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{U}} A \in \mathfrak{X}$.

Dann heißt $(X, \mathfrak{X})$ topologischer Raum.

$\mathfrak{X}$ heißt *Topologie* auf der *Trägermenge* X. Die Elemente von X heißen *Punkte*, die Elemente von $\mathfrak{X}$ heißen *offene Mengen*. Die Komplemente der offenen Mengen heißen *abgeschlossene Mengen*.

Die hier angegebene Definition auf der Grundlage offener Mengen ist nicht die einzig mögliche; genausogut kann dies ausgehend von abgeschlossenen Mengen, Umgebungen oder der Bildung abgeschlossener Hüllen von Teilmengen erfolgen.

Ist $(X, \mathfrak{X})$ ein topologischer Raum, dann heißt eine Menge $\mathfrak{B}$ von offenen Mengen *Basis der Topologie*, wenn jede offene Menge Vereinigung von Mengen aus $\mathfrak{B}$ ist. Die kleinste Kardinalzahl κ so daß es eine Basis von $(X, \mathfrak{X})$ der Kardinalität κ gibt, heißt *topologisches Gewicht* oder kurz *Gewicht* von $(X, \mathfrak{X})$; man schreibt dafür $\mathfrak{w}(X)$. Eine Menge $\mathfrak{S}$ von offenen Mengen heißt *Subbasis der Topologie*, wenn jede offene Menge Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathfrak{S}$ ist. Für eine Menge X und eine beliebige Menge $\mathfrak{S}$ von Teilmengen von X gibt es genau eine Topologie $\mathfrak{X}(\mathfrak{S})$, für die $\mathfrak{S}$ Subbasis ist; $\mathfrak{X}(\mathfrak{S})$ nennt man die *von* $\mathfrak{S}$ *erzeugte Topologie*. Ist T eine Teilmenge eines topologischen Raums $(X, \mathfrak{X})$, dann heißt $\mathfrak{X}_T := \{ A \cap T \mid A \in \mathfrak{X} \}$ *Relativtopologie* oder *Spurtopologie* auf T bezüglich $(X, \mathfrak{X})$, und $(T, \mathfrak{X}_T)$ heißt *Teilraum* von $(X, \mathfrak{X})$.

Die Topologien einer Trägermenge X müssen nicht notwendigerweise vergleichbar sein bezüglich der $\subseteqq$-Relation; sind es zwei Topologien $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ von X doch und gilt dabei

$\mathfrak{X}_1 \subseteqq \mathfrak{X}_2$, dann sagt man: $\mathfrak{X}_1$ ist *gröber* als $\mathfrak{X}_2$ beziehungsweise $\mathfrak{X}_2$ ist *feiner* als $\mathfrak{X}_1$. Auf jeder Trägermenge X ist $\{\emptyset, X\}$ die gröbste und $\mathfrak{P}(X)$ die feinste Topologie. $\{\emptyset, X\}$ heißt *triviale Topologie* und $\mathfrak{P}(X)$ heißt *diskrete Topologie*[4]. Die von einer beliebigen Menge $\mathfrak{S}$ offener Teilmengen von X erzeugte Topologie $\mathfrak{X}(\mathfrak{S})$ ist die gröbste Topologie, die alle Mengen aus $\mathfrak{S}$ enthält.

Ist J eine beliebige Indexmenge und $(X_j, \mathfrak{X}_j)_{j \in J}$ eine Familie topologischer Räume, dann kann man das kartesische Produkt $X = \prod_{j \in J} X_j$ unter anderem folgendermaßen topologisieren. Sei $\mathfrak{B} := \Big\{ \prod_{j \in J} A_j \;\Big|\; A_j \in \mathfrak{X}_j \text{ für alle } j \in J,\ A_j \neq X_j \text{ nur für endlich viele } j \in J \Big\}$; dann ist $\mathfrak{X} := \{A \subset X \mid A \text{ ist eine Vereinigung von Mengen aus } \mathfrak{B}\}$ eine Topologie auf X. Diese heißt *Produkttopologie*, und $(X, \mathfrak{X})$ heißt dann das *topologische Produkt* der $(X_j, \mathfrak{X}_j)_{j \in J}$. Definiert man die kanonischen Abbildungen $\pi_j : X \longrightarrow X_j$ durch $\pi_j((x_j)_{j \in J}) = x_j$ für $j \in J$, dann ist die Produkttopologie gleichzeitig die gröbste Topologie auf X, für die alle π_j stetig sind. Auf die topologische Bedeutung des Begriffs der Stetigkeit kommen wir gleich zurück.

1.1.2.2 Umgebungen

Im folgenden sei $(X, \mathfrak{X})$ stets ein topologischer Raum. Wir gehen gleich weiter zum nächsten grundlegenden, weit über die Topologie hinaus bedeutsamen Begriff:

1.2 Definition: Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt Umgebung eines Punktes $x \in X$, wenn es eine offene Menge $G \subset X$ gibt mit $x \in G \subset U$.

Damit lassen sich offene Mengen anschaulich charakterisieren: $A \subset X$ ist genau dann offen, wenn A Umgebung jedes seiner Punkte ist. Sei nun $x_0 \in X$. Eine Menge $\mathfrak{U}$ von Umgebungen von x_0 heißt *Umgebungsbasis* von x_0, wenn jede Umgebung von x_0 eine Umgebung aus $\mathfrak{U}$ enthält.

Für eine Teilmenge $A \subset X$ lassen sich nun spezielle Punkte mit besonderen Eigenschaften angeben. $x \in X$ heißt *Berührpunkt* von A, wenn jede Umgebung von x mindestens einen Punkt mit A gemeinsam hat, andernfalls heißt x *äußerer Punkt* von A. Ein Berührpunkt x heißt *innerer Punkt* von A, wenn es eine Umgebung U von x gibt mit $U \subset X$; enthält jede Umgebung von x zugleich Punkte von A und von $X \setminus A$, dann heißt x *Randpunkt* von A. Ein Randpunkt, der eine Umgebung besitzt, die keinen weiteren Punkt von A enthält, heißt *isolierter Punkt* von A. Ein Punkt x heißt *Häufungspunkt* von A, wenn jede Umgebung von x einen Punkt $x' \neq x$ aus A enthält. A' ist die Menge aller Häufungspunkte von A und heißt *Ableitung* von A. Mit ∂A bezeichnet man die Menge aller Randpunkte oder kurz den *Rand* von A. Außerdem heißt $A^\circ := A \setminus \partial A$ *Inneres* oder *offener Kern* von A und $\overline{A} := A \cup \partial A$ *abgeschlossene Hülle* oder *Abschluß* von A. Offensichtlich bestehen offene Mengen nur aus inneren Punkten, während abgeschlossene Mengen alle ihre Randpunkte enthalten. Hieran ist erkennbar, daß es Mengen gibt, die weder offen noch abgeschlossen sind. Außerdem gibt

[4] Der Name kommt daher, daß im Falle der diskreten Topologie alle Teilmengen von X offen sind, insbesondere auch die einpunktigen. Die Punkte kann man sich daher als diskret und nicht kontinuierlich verteilt vorstellen.

es Mengen, die Punkte enthalten, die gleichzeitig innere Punkte und Randpunkte sind, und damit auch Mengen, die offen und abgeschlossen sind.

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *dicht* in X, wenn $\overline{A} = X$. Sie heißt *nirgends dicht*, wenn $\overline{A}^\circ = \emptyset$. Gilt $A \supseteqq A'$ und damit $A = \overline{A}$, so ist A abgeschlossen, gilt $A \subseteqq A'$, so heißt A *in sich dicht*, und gilt $A = A'$, so heißt A *perfekte Menge*. Anschaulich gesprochen sind perfekte Mengen abgeschlossene Mengen ohne isolierte Punkte oder abgeschlossene, in sich dichte Mengen. Für alle $A \subset X$ gilt das folgende:

a) $A^\circ \in \mathfrak{X}$,

b) $A \in \mathfrak{X} \iff A = A^\circ$,

c) $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$,

d) $\emptyset^\circ = \overline{\emptyset} = \emptyset$ und $X^\circ = \overline{X} = X$,

e) $A^\circ = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$ und $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A^\circ)$.

In der diskreten Topologie sind alle Teilmengen der Trägermenge zugleich offen und abgeschlossen.

Ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{X})$ erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Er erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn es eine abzählbare Basis der zugehörigen Topologie $\mathfrak{X}$ gibt. $(X, \mathfrak{X})$ heißt *separabel*, wenn X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Die kleinste Kardinalzahl κ so daß es eine dichte Teilmenge A der Menge X mit $|A| = \kappa$ gibt, nennt man *topologische Dichte* oder kurz *Dichte* von X und schreibt dafür $\mathfrak{d}(X)$. Die beiden Abzählbarkeitsaxiome übertragen sich auch auf Teilräume; für die Separabilität ist das jedoch nicht der Fall. Erfüllt ein Raum das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so erfüllt er auch das erste und ist separabel; das umgekehrte gilt jeweils nicht. Das erste Abzählbarkeitsaxiom wird gleich im Zusammenhang mit Kompaktheit und Stetigkeit wieder auftauchen; das zweite spielt insbesondere im Rahmen der Differentialtopologie eine Rolle, und Separabilität ist bei Hilberträumen der Quantenmechanik von wesentlicher Bedeutung.

Eine weitere Einteilung topologischer Räume in Kategorien stammt von R. Baire [17] und ist außer in der Topologie auch in der Mengenlehre, der Maßtheorie und der linearen Algebra von großer Wichtigkeit. X sei ein topologischer Raum und A eine Teilmenge von X. Dann heißt A von *erster Kategorie* in X, wenn A eine Vereinigung von abzählbar vielen nirgends dichten Mengen ist. A heißt von *zweiter Kategorie* in X, falls A nicht von erster Kategorie in X ist. Eine Teilmenge A, die von zweiter Kategorie in X ist, enthält somit mindestens eine Teilmenge, die nicht nirgends dicht ist. Ein topologischer Raum, in dem jede nichtleere offene Menge von zweiter Kategorie ist, heißt *Baire-Raum*.

Mit den bisher zur Verfügung stehenden Begriffen können wir bereits einiges über die Struktur topologischer Räume aussagen. Dazu benötigen wir folgende

1.3 Definition: $(X, \mathfrak{X})$ sei ein topologischer Raum.

(i) $A, B \subset X$ heißen *separiert*, wenn $\overline{A} \cap B = \emptyset$ und $A \cap \overline{B} = \emptyset$ ist.

(ii) $(X, \mathfrak{X})$ heißt *zusammenhängend*, wenn X nicht als Vereinigung zweier nichtleerer separierter Teilmengen dargestellt werden kann.

(iii) Eine Teilmenge von $(X, \mathfrak{X})$ heißt *zusammenhängend*, wenn sie versehen mit der Relativtopologie zusammenhängend ist.

Eine zusammenhängende Menge $A \subset X$ heißt auch ein *Gebiet*. Ist $(X, \mathfrak{X})$ zusammenhängend, dann sind $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen, die offen und abgeschlossen zugleich sind. Die abgeschlossene Hülle $\overline{T}$ einer zusammenhängenden Teilmenge T und jede Menge A mit $T \subseteqq A \subseteqq \overline{T}$ sind zusammenhängend.

Bei nichtzusammenhängenden Räumen ist man häufig daran interessiert, jedem Punkt eine möglichst große Teilmenge zuzuordnen, die diesen Punkt enthält. Die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen, die einen Punkt x enthalten, heißt *Zusammenhangskomponente* von x. Zusammenhangskomponenten sind stets abgeschlossen. Jeder topologische Raum läßt sich in disjunkte Zusammenhangskomponenten zerlegen, die paarweise separiert sind. Ein topologischer Raum heißt *lokalzusammenhängend*, wenn jede Umgebung jedes Punktes eine zusammenhängende Umgebung umfaßt. In diesem Fall sind die Zusammenhangskomponenten des topologischen Raumes auch offen. $(X, \mathfrak{X})$ heißt *Hausdorff-Raum*, wenn je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen. $(X, \mathfrak{X})$ heißt *normal*, wenn je zwei beliebige disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X disjunkte offen Umgebungen besitzen. Eine wichtige Eigenschaft normaler topologischer Räume beschreibt das

1.4 Lemma von Urysohn:[5] *Ein topologischer Raum* $(X, \mathfrak{X})$ *ist genau dann normal, wenn es zu je zwei beliebigen nichtleeren abgeschlossenen disjunkten Teilmengen* A *und* B *von* X *eine stetige Funktion* $f : X \longrightarrow [0,1]$ *gibt mit* $f(x) = 0$ *für alle* $x \in A$ *und* $f(x) = 1$ *für alle* $x \in B$.

Die Aussage des Urysohnschen Lemmas läßt sich natürlich sofort auf beliebige Intervalle $[a, b]$ übertragen und liefert dann für jeden normalen Raum X stetige Funktionen mit $f(x) = a$ für alle $x \in A$ und $f(x) = b$ für alle $x \in B$. Eine weitere und sehr viel bedeutendere Verallgemeinerung ist der

1.5 Fortsetzungssatz von Tietze:[6] *Ein topologischer Raum* $(X, \mathfrak{X})$ *ist genau dann normal, wenn es zu jeder stetigen Funktion* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *auf einer abgeschlossenen Teilmenge* A *von* X *eine stetige Funktion* $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *gibt mit* $g \restriction A = f$. *Falls außerdem* $|f(x)| < s$ *gilt für alle* $x \in A$, *dann kann man* g *so wählen, daß* $|g(x)| < s$ *gilt für alle* $x \in X$.

1.1.2.3 Kompaktheit

Aus der elementaren Analysis ist man gewohnt, daß Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen oder, etwas weniger speziell, auf abgeschlossenen und beschränkten Definitionsmengen besonders übersichtliche Eigenschaften aufweisen[7]. Daher liegt der Wunsch nahe, etwas ent-

[5] Benannt nach seinem Entdecker P. S. Urysohn [380].

[6] Dieses Resultat verdankt seinen Namen dem niederösterreichischen Mathematiker Heinrich Tietze [370].

[7] Man denke an solche Sachverhalte wie den Zwischenwertsatz, den Nullstellensatz oder ähnliches.

sprechendes für beliebige topologische Räume zu haben. Eine solche Verallgemeinerung liefert die Eigenschaft der Kompaktheit.

Bevor wir nun zu diesem Begriff selbst kommen, ist wieder eine vorbereitende Definition erforderlich. X sei eine Menge und $\mathfrak{D} \subseteqq \mathfrak{P}(X)$ ein System von Teilmengen. $\mathfrak{D}$ heißt *Überdeckung* von X, wenn $X = \bigcup_{D \in \mathfrak{D}} D$ gilt. $\mathfrak{D}$ heißt *offene Überdeckung*, wenn alle Elemente aus $\mathfrak{D}$ offen sind und *abgeschlossene Überdeckung*, wenn alle Elemente aus $\mathfrak{D}$ abgeschlossen sind. Damit stellen wir nun einen der wichtigsten topologischen Begriffe überhaupt vor.

1.6 Definition: Ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{X})$ heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält[8].

Die Stärke der Eigenschaft einer Menge, kompakt zu sein, liegt darin, daß die in obiger Definition formulierte Forderung für jede offene Überdeckung ausgesprochen wird; entsprechend genügt die bloße Existenz von irgendwelchen speziellen endlichen Überdeckungen nicht. Es gibt eine Reihe von Abschwächungen und Spezialisierungen des Begriffs der Kompaktheit. Wenn jede offene Überdeckung von X eine abzählbare Überdeckung enthält, heißt $(X, \mathfrak{X})$ *Lindelöf-Raum*. $(X, \mathfrak{X})$ heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt. $(X, \mathfrak{X})$ heißt *σ-kompakt*, wenn X eine Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Teilmengen ist. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt kompakt, wenn sie versehen mit der Relativtopologie kompakt ist. In einem kompakten Raum ist eine Teilmenge genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist. Eine Teilmenge A eines topologischen Raums X heißt *relativ kompakt*, wenn der Abschluß $\overline{A}$ kompakt ist.

Ein weiterer wichtiger Kompaktheitsbegriff ist derjenige der Präkompaktheit: Ein topologischer Raum heißt *präkompakt* oder *folgenkompakt*, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge hat. Die beiden Begriffe sind nicht äquivalent; im Gegenteil, weder folgt aus Kompaktheit Folgenkompaktheit, noch gilt das Gegenteil. Wenn ein topologischer Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dann ist er auch präkompakt[9], und dann sind immerhin alle kompakte Mengen erst recht präkompakt.

Das folgende Resultat über kompakte Teilmengen lokalkompakter Räume ist gelegentlich sehr nützlich.

1.7 Satz: X *sei ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, außerdem seien* $A \subset X$ *kompakt sowie* $B \subset X$ *und* $C \subset X$ *offen mit* $A \subset B \cup C$. *Dann gibt es kompakte Mengen* $D \subset B$ *und* $E \subset C$ *sodaß* $A = D \cup E$.

Aufgrund seiner großen Bedeutung in mehrerlei Hinsicht erwähnen wir ein weiteres Resultat explizit, obwohl dieses im vorliegenden Buch nicht unmittelbar zum Einsatz kommt.

[8] Gelegentlich taucht anstelle des hier definierten Kompaktheitsbegriffs das Attribut *quasikompakt* auf; in dieser Terminologie spricht man erst dann von einem kompakten Raum, wenn dieser gleichzeitig auch ein Hausdorffraum ist.

[9] Der Beweis hierfür macht Gebrauch vom *Auswahlaxiom*. Dieses besagt folgendes: *Für jede Menge* $\mathfrak{M}$ *nichtleerer Mengen gibt es eine Funktion* $F : \mathfrak{M} \longrightarrow \bigcup \mathfrak{M}$ *mit* $F(A) \in A$ *für alle* $A \in \mathfrak{M}$. Das Auswahlaxiom wurde von Zermelo entdeckt [398]. Seine Bedeutung für die Mathematik kann hier nur angedeutet werden; wir kommen in einigen Anmerkungen darauf zurück.

1.8 Satz von Tychonoff:[10] *Das Produkt jeder nicht leeren Familie kompakter topologischer Räume ist kompakt.*

Abgesehen von seiner sehr weit gefächerten Anwendbarkeit liegt die Bedeutung des Satzes von Tychonoff vor allem auch in seiner Äquivalenz zum Auswahlaxiom[11]. Das hat er mit einigen anderen fundamentalen Sätzen gemein; zwei davon werden uns im weiteren Verlauf des Buches begegnen.

1.1.2.4 Konvergenz und Stetigkeit

Im Rahmen der mengentheoretischen Topologie lassen sich nun gewisse aus der elementaren Analysis wohlbekannte Begriffe ausschließlich auf Basis der Mengenlehre und ohne Verwendung jeglicher metrischer Hilfsmittel, insbesondere auch ohne Beträge oder Normen, definieren und dadurch auf ihre allgemeinste mögliche Gestalt bringen.

Eine *Folge* in einer Menge A ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{A}$. Häufig verwendet man die Schreibweise $x_n := f(n)$; aufgrund ihrer Abzählbarkeit kann man sich Folgen aufgereit vorstellen[12] und schreibt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$. Meist interessiert man sich dafür, was die Folgenglieder tun, wenn n gegen Unendlich geht. Dem trägt folgender Begriff Rechnung:

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge in einem topologischen Raum $(\mathrm{X}, \mathfrak{X})$. Die Folge heißt *konvergent gegen* $a \in \mathrm{X}$, wenn es zu jeder Umgebung U von a ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodaß $x_n \in \mathrm{U}$ für alle $n \geqq n_0$. In diesem Fall heißt a Grenzwert von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und man schreibt $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Ist eine Folge nicht konvergent, so heißt sie *divergent*.

Anschaulich bedeutet das, daß man bei einer konvergenten Folge in jeder noch so kleinen Umgebung ihres Grenzwerts stets unendlich viele Folgenglieder findet. Allerdings sind in allgemeinen topologischen Räumen Grenzwerte von Folgen nicht eindeutig bestimmt; es kann sein, daß Folgen gegen mehrere Grenzwerte konvergieren. Ist X jedoch ein Hausdorff-Raum, dann ist die Konvergenz eindeutig, das heißt konvergente Folgen haben stets genau einen Grenzwert.

Wir gehen jetzt zu allgemeiner definierten Funktionen über, nämlich solchen von einem topologischen Raum in einen anderen, und kommen so zu den für die Topologie zentralen stetigen Funktionen. Dazu seien $(\mathrm{X}, \mathfrak{X})$ und $(\mathrm{Y}, \mathfrak{Y})$ topologische Räume und $f : \mathrm{X} \longrightarrow Y$ eine Funktion.

f heißt *stetig in* $x \in \mathrm{X}$, wenn für jede Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x existiert mit $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$.

f heißt stetig auf X, wenn f für alle $x \in \mathrm{X}$ stetig ist.

[10] Der Satz wurde erstmals von Tychonoff für beliebige Produkte des Einheitsintervalls bewiesen [377]; Tychonoff stellte wenige Jahre später fest, daß daraus bereits die allgemeine Version folgt [378]. Der erste explizite Beweis des Satzes in der allgemeinen Fassung stammt von Čech [54].

[11] Zum Beweis des Satzes von Tychonoff ist ebenfalls das Auswahlaxiom oder etwas dazu äquivalentes erforderlich; umgekehrt konnte Kelley beweisen, daß das Auswahlaxiom aus dem Satz von Tychonoff folgt [197], [198].

[12] Daher der Name

Dahinter steht die anschauliche Vorstellung, daß bei stetigen Funktionen lokal nicht viel passiert. Eine alternative Definition ist die folgende: $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ heißt stetig, wenn die Urbilder offener Mengen stets ebenfalls offen sind. Entsprechend gilt auch, daß f stetig ist, wenn die Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen oder wenn die Urbilder von Umgebungen Umgebungen sind.

Eine Funktion $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ heißt *folgenstetig*, wenn gilt: Aus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ in X folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ in Y. Folgenstetigkeit ist eine schwächere Eigenschaft als Stetigkeit; ist f stetig, so auch folgenstetig, das umgekehrte gilt jedoch nicht in allen Räumen. Erfüllt jedoch ein topologischer Raum X das erste Abzählbarkeitsaxiom und ist Y ein beliebiger topologischer Raum, dann ist eine Funktion $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ genau dann stetig, wenn sie folgenstetig ist[13].

Ist eine Funktion $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ bijektiv, dann existiert ihre *Umkehrfunktion* $f^{-1} : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$; für diese gilt $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in \mathrm{Y}$ sowie $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathrm{X}$, oder anders ausgedrückt, $f^{-1}(y) = x$ gilt genau dann, wenn $f(x) = y$ gilt für alle $x \in \mathrm{X}$ und alle $y \in \mathrm{Y}$. Eine Funktion, die stetig ist und eine stetige Umkehrfunktion besitzt, heißt *homöomorph* oder ein *Homöomorphismus*. Zwei Mengen, zwischen denen eine umkehrbar stetige Funktion existiert, heißen konsequenterweise *zueinander homöomorph*. Dabei ist allerdings Vorsicht angebracht, denn eine stetige Bijektion ist noch lange nicht automatisch homöomorph; die Forderung, daß f und f^{-1} stetig sein müssen, ist wesentlich stärker. Auf jeden Fall ist eine stetige Bijektion $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ von einem quasikompakten Raum X auf einen Hausdorffraum Y stets ein Homöomorphismus.

Die Bedeutung homöomorpher Funktionen liegt darin, daß zwei Punktmengen topologisch nicht unterscheidbar sind, wenn es eine homöomorphe Funktion zwischen ihnen gibt. Das heißt, zwei solche Mengen haben exakt dieselben mengentheoretisch-topologischen Eigenschaften und unterscheiden sich nicht hinsichtlich Kompaktheit, Zusammenhangseigenschaften und dergleichen. Man sagt auch, solche Mengen seien *topologisch äquivalent*; entsprechend werden homöomorphe Abbildungen auch als *topologische Abbildungen* bezeichnet. Eigenschaften topologischer Räume, die unter topologischen Abbildungen erhalten bleiben, also Invarianten unter solchen Abbildungen, heißen *topologische Invarianten*. Das ist genau die zu Beginn dieses Kapitels angedeutete mathematische Formalisierung der anschaulichen Vorstellung, daß sich die Topologie mit Eigenschaften geometrischer Objekte beschäftigt, die unter beliebigen elastischen Verformungen erhalten bleiben. Dabei ist allerdings der Begriff der topologischen Abbildung allgemeiner als derjenige der elastischen Verformung, das heißt, nicht jede topologische Abbildung ist als elastische Verformung deutbar.

Der vorige Abschnitt zeigt exemplarisch, daß kompakte Mengen besonders pflegeleicht sind. Daher ist es zuweilen ärgerlich, daß natürlich längst nicht alle Mengen kompakt sind; unter gewissen Voraussetzungen kann man jedoch nicht kompakte Mengen wenigstens als Teilmengen kompakter Mengen auffassen. Das leistet die folgende

1.9 Definition: Eine *Kompaktifizierung* der Menge X ist eine kompakte Menge C mit einem Homöomorphismus $\varphi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{C}$, sodaß $\varphi(\mathrm{X})$ dicht in C ist.

[13] Auch zum Beweis dieser Aussage ist das Auswahlaxiom erforderlich.

Ein anschauliches Beispiel für eine Kompaktifizierung ist die stereographische Projektion des $\mathbb{R}^n$ auf die n-dimensionale Einheitssphäre S^n; hierbei wird mengenmäßig gesehen dem $\mathbb{R}^n$ ein weiteres Element, nämlich der unendlichferne Punkt ∞ hinzugefügt. Das zweite Beispiel, das wir hier betrachten, ist weniger anschaulich. Dazu sei $(\mathsf{X}, \mathfrak{X})$ ein topologischer Raum. Eine *Stone-Čech-Compaktifizierung*[14] $\beta\,\mathsf{X}$ von X ist ein kompakter Hausdorff-Raum mit einer stetigen Abbildung $\varphi : \mathsf{X} \longrightarrow \beta\,\mathsf{X}$, sodaß für jeden kompakten Hausdorffraum C und jede stetige Abbildung $f : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{C}$ eine eindeutig bestimmte Abbildung $\beta f : \beta\,\mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{C}$ mit $f = \beta f \circ \varphi$ existiert. Die Stone-Čech-Kompaktifizierung von X ist der größte kompakte Hausdorff-Raum, für den $\varphi(\mathsf{X})$ eine dichte Teilmenge ist. Im allgemeinen liefert das eine sehr große Menge; beispielsweise gilt für die Stone-Čech-Kompaktifizierung $\beta\,\mathbb{N}$ der Menge der natürlichen Zahlen $|\beta\,\mathbb{N}| = \beth_2 = 2^{2^{\aleph_0}}$, das heißt, $\beta\,\mathbb{N}$ ist so groß wie die Potenzmenge der Menge der reellen Zahlen[15].

1.1.3 Topologie metrischer Räume

1.1.3.1 Metrische Topologien

Wir haben bisher in diesem Kapitel Lageeigenschaften von Punkten topologischer Räume ausschließlich über Mengenbeziehungen beschrieben. Das hat die bemerkenswerte Konsequenz, daß hierfür die Vorstellung irgendeines Abstandsbegriffs zwischen einzelnen Punkten oder Teilmengen des betrachteten Raums nicht erforderlich ist. Intuitiv liegt ist es natürlich nahe anzunehmen, daß es für Aussagen über die gegenseitige Lage von Punkten sicherlich hilfreich ist, wenn man etwas über Abstände zwischen diesen Punkten weiß. Dazu muß man jedoch erst einmal definieren, was man mit dem Abstand zwischen zwei Punkten meint, und das führt zu den Begriffen der Metrik und des metrischen Raums.

1.10 Definition: Sei X eine Menge. Eine *Metrik* auf X ist eine Abbildung $d : \mathsf{X} \times \mathsf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(ii) Für alle $x, y \in \mathsf{X}$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),

(iii) Für alle $x, y, z \in \mathsf{X}$ gilt $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

(X, d) heißt *metrischer Raum*, $d(x, y)$ heißt *Abstand* der Punkte x und y bezüglich der Metrik d.

Gilt statt (i) nur $d(x, x) = 0$ für alle $x \in \mathsf{X}$, dann heißt d *Pseudometrik*; in diesem Fall folgt

[14] Benannt nach E. Čech [54] und M. H. Stone [358], die diese Form der Kompaktifizierung unabhängig voneinander entdeckten. Genaugenommen taucht die Stone-Čech-Kompaktifizierung schon etwas früher bei Tychonoff auf, allerdings ohne explizit erwähnt zu werden [377].

[15] Für eine diskrete Menge X ist $\beta\,\mathsf{X}$ die Menge aller Ultrafilter auf X, wobei X durch die zugehörige Abbildung φ auf die Menge der Haupt-Ultrafilter auf X abgebildet wird. Auf jeder Menge X gibt es $2^{2^{|\mathsf{X}|}}$ Ultrafilter.

aus $d(x, y) = 0$ nicht notwendigerweise $x = y$. Ist X ein metrischer Raum mit Metrik d und $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$, dann heißt

$$\operatorname{diam} \mathrm{Y} := \sup \{d(x, y) \mid x, y \in \mathrm{Y}\}$$

Durchmesser von Y. Der Durchmesser einer Menge kann endlich oder unendlich sein.

Wenn man zu einem gegebenen topologischen Raum $(\mathrm{X}, \mathfrak{X})$ eine Metrik finden kann, so daß die bezüglich dieser Metrik offenen Mengen gerade die vorgegebene Topologie liefern, heißt dieser topologische Raum *metrisierbar*[16]. Von wesentlicher Bedeutung ist die Tatsache, daß metrisierbare Räume stets das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Daraus folgt insbesondere, daß für die Dichte $\mathfrak{d}(\mathrm{X})$ und das Gewicht $\mathfrak{w}(\mathrm{X})$ eines jeden metrischen Raums X stets $\mathfrak{d}(\mathrm{X}) = \mathfrak{w}(\mathrm{X})$ gilt.

Wir betrachten einige Beispiele für Metriken[17]:

a) Jede Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) wird durch $d_\mathrm{A}(x, y) = d(x, y)$ für alle $x, y \in \mathrm{A}$ zu einem metrischen Raum. d_A heißt die durch d *induzierte Metrik* auf A.

b) Ist (X, d) ein metrischer Raum, dann liefert $d^*(x, y) := \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ für $x, y \in \mathrm{X}$ eine weitere Metrik auf X.

c) $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ werden zu metrischen Räumen durch $d(x, y) := |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$ beziehungsweise $x, y \in \mathbb{C}$.

d) Für $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ können beispielsweise durch

$$d_1(x, y) := \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu - y_\nu| \quad \text{oder}$$

$$d_2(x, y) := \left(\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu - y_\nu|^2 \right)^{1/2} \quad \text{oder}$$

$$d_\infty(x, y) := \max_{\nu=1,2,\ldots,n} |x_\nu - y_\nu|$$

Metriken definiert werden[18].

e) Ist $\mathcal{V}$ ein normierter Vektorraum[19] mit Norm $\|\ \|$, dann erhält man mit $d(x, y) := \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathcal{V}$ eine Metrik auf $\mathcal{V}$.

f) Auf jeder Menge X kann eine triviale Metrik definiert werden gemäß

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = y \\ 1 & \text{für} \quad x \neq y \end{cases} \qquad \text{für } x, y \in \mathrm{X}.$$

[16] Die Frage, welche Eigenschaften topologische Räume aufweisen müssen, um metrisierbar zu sein, wird durch sogenannte *Metrisationssätze* beantwortet. Eine Diskussion solcher Sachvehalte geht über den hier gesteckten Rahmen hinaus; näheres dazu findet man beispielsweise in [142] und [173].

[17] Beweis durch Nachrechnen

[18] Beispiel c) entspricht d_1 und d_2 für $n = 1$.

[19] Siehe Abschnitt 2.2.3.1.

In metrischen Räumen lassen sich spezielle Umgebungen definieren, die von grundlegender Bedeutung für die Analysis sind. Dazu sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt die Menge $\mathrm{U}(x, \varepsilon) := \{\, y \in \mathrm{X} \mid d(x, y) < \varepsilon \,\}$ *ε-Umgebung* von x; dabei heißt ε Radius von $\mathrm{U}(x, \varepsilon)$. Eine Teilmenge $\mathrm{O} \subset \mathrm{X}$ heißt *offen*, wenn O mit jedem $x \in \mathrm{O}$ auch eine ε-Umgebung von x enthält. Die ε-Umgebungen sind selbst offene Mengen. Allgemeiner gilt: Eine Teilmenge eines metrischen Raums ist genau dann offen, wenn sie sich als Vereinigung von ε-Umgebungen darstellen läßt. Der Zusammenhang zum vorigen Abschnitt wird nun dadurch hergestellt, daß die so definierten offenen Mengen den Axiomen des topologischen Raums genügen. Das heißt, die offenen Mengen bilden eine Topologie, die sogenannte *metrische Topologie* $\mathfrak{X}_d$ auf X. In solchen topologischen Räumen $(\mathrm{X}, \mathfrak{X}_d)$ kann man nun die bisher rein mengentheoretisch erfaßten Begriffe auch über Abstandsbeziehungen beschreiben.

1.1.3.2 Kurze Einführung in die Epsilontologie

Wenn man bei den Definitionen von Konvergenz und Stetigkeit, die aus topologischer Sicht über offene Mengen und Umgebungen laufen, speziell ε-Umgebungen verwendet, landet man gerade bei den aus der Analysis vertrauten Formulierungen, wie wir gleich sehen werden.

Wir beginnen mit konvergenten Folgen. Es sei (X, d) wieder ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X konvergiert gegen $a \in \mathrm{X}$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $d(x_n, a) < \varepsilon$ für alle $n \geqq n_0$. In metrischen Räumen läßt sich diese Definition abschwächen: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge* oder *Fundamentalfolge*, wenn es für jedes $\varepsilon < 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geqq n_0$. Hier ist nirgends von einem Grenzwert die Rede; zwar ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge, aber Cauchy-Folgen konvergieren nicht notwendigerweise gegen einen Grenzwert. Metrische Räume, in denen jede Cauchy-Folge konvergiert, heißen *vollständig*. Für solche Räume gilt der

1.11 Satz von Baire: *Jeder vollständige metrische Raum ist von 2. Kategorie in sich.*

Das heißt, vollständige metrische Räume lassen sich nicht als abzählbare Vereinigungen nirgends dichter Mengen darstellen[20]. Insbesondere folgt daraus für einen vollständigen metrischen Raum $\mathcal{E}$ mit $\mathcal{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n$, daß mindestens eines der $\mathcal{E}_n$ einen inneren Punkt und damit auch eine offene Kugel enthält. Außerdem folgt aus dem Satz von Baire, daß abgeschlossene Unterräume vollständiger metrischer Räume selbst vollständig sind. Eine weitere wichtige Konsequenz der Vollständigkeit betrifft die Kompaktheitseigenschaften: Teilmengen von vollständigen metrischen Räumen sind genau dann präkompakt, wenn sie relativ kompakt sind, das heißt, die beiden Begriffe sind hier äquivalent.

Kommen wir nun zu den stetigen Funktionen, so finden wir bei metrischen Räumen genau die altbekannte ε-δ-Definition wieder. Sind $(\mathrm{X}, d_{\mathrm{X}})$ und $(\mathrm{Y}, d_{\mathrm{Y}})$ metrische Räume, dann heißt eine Funktion $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ stetig in $x_0 \in \mathrm{X}$, wenn folgendes gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so daß $d_{\mathrm{Y}}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ für alle $x \in \mathrm{X}$ mit $d_{\mathrm{X}}(x, x_0) < \delta$. Ist f stetig für alle $x \in \mathrm{X}$, dann heißt f stetig auf X, oder formal geschrieben:

[20] Zum Beweis und für weitere Details siehe beispielsweise [254].

$f : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Y}$ heißt *stetig* auf X $:\Longleftrightarrow$

$$\forall x \in \mathsf{X}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathsf{X}\ \ (d_{\mathsf{X}}(x,y) < \delta \implies d_{\mathsf{Y}}(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Diese Definition führt auf die anschauliche Vorstellung, die man üblicherweise hat: Stetige Funktionen bilden Punkte, die in der Nähe voneinander liegen, auf wiederum in der Nähe voneinander liegende Bildpunkte ab. Da metrische Räume das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, sind in ihnen Stetigkeit und Folgenstetigkeit äquivalent. Entsprechend ist in metrischen Räumen die obige ε-δ-Definition der Stetigkeit äquivalent zur folgenden, anschaulichen Definition: f ist stetig in x, wenn $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ gilt[21].

Eine Verschärfung der Eigenschaft einer Funktion, stetig zu sein, liefert der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit:

$f : \mathsf{X} \longrightarrow Y$ heißt *gleichmäßig stetig* auf X $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathsf{X}\ \forall y \in \mathsf{X}\ \ (d_{\mathsf{X}}(x,y) < \delta \implies d_{\mathsf{Y}}(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Der Unterschied liegt in der Reihenfolge der Quantoren: Bei gleichmäßiger Stetigkeit ist ε von den $x \in \mathsf{X}$ unabhängig. Natürlich sind gleichmäßig stetige Funktionen insbesondere auch stetig, die Umkehrung gilt jedoch im allgemeinen nicht. Gleichmäßig stetige Funktionen auf metrischen Räumen weisen eine wichtige Fortsetzungseigenschaft auf.

1.12 Satz: *Es seien* X *ein metrischer und* Y *ein vollständiger metrischer Raum, außerdem sei* A *eine dichte Teilmenge von* X *und die Funktion* $f : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{Y}$ *gleichmäßig stetig auf* A. *Dann gibt es genau eine Funktion* $g : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Y}$ *mit* $g \restriction \mathsf{A} = f$, *die gleichmäßig stetig auf* X *ist.*

Eine weitere Verschärfung liefert die absolute Stetigkeit:

$f : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Y}$ heißt *absolut stetig* auf X, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für jede Folge $\{\mathsf{X}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von kompakten Teilmengen von X mit $\operatorname{diam} \mathsf{X}_n < \delta$ auch $\operatorname{diam} f(\mathsf{X}_n) < \varepsilon$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Absolut stetige Funktionen sind gleichmäßig stetig und damit auch stetig. Auch hier ist die Umkehrung im allgemeinen falsch[22]. Abermals stärker ist der Begriff der Lipschitz-Stetigkeit:

Eine Funktion $f : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Y}$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ gibt, sodaß für alle $x, y \in \mathsf{X}$ die Relation $d_{\mathsf{Y}}(f(x), f(y)) \leqq L\, d_{\mathsf{X}}(x,y)$ gilt. Lipschitz-stetige Funktionen sind stets absolut stetig, das umgekehrte ist jedoch wieder im allgemeinen nicht der Fall[23].

Auch die Eigenschaft der Kompaktheit wird in metrischen Räumen sehr viel anschaulicher, als das in allgemeinen topologischen Räumen der Fall ist. Grundlage dafür ist folgender

1.13 Satz: *Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist abgeschlossen und beschränkt.*

---

[21] Das ist eine nichttriviale Aussage, denn auch hier kommt beim Beweis das Auswahlaxiom zum Einsatz.

[22] Die absolut stetigen Funktionen sind genau die fast überall differenzierbaren Funktionen.

[23] Es gibt sogar differenzierbare Funktionen, die nicht Lipschitz-stetig sind, etwa $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht, wie wir noch sehen werden. – Satz 1.13 hat weitreichende Konsequenzen, beispielsweise:

- Jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum ist beschränkt.
- Ist X ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt und $A \subset K$ abgeschlossen, dann ist auch A kompakt.
- Sind X und Y metrische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Funktion und $K \subset X$ kompakt, dann ist auch $f(K) \subset Y$ kompakt[24].

Insbesondere ist jeder kompakte metrische Raum vollständig. Außerdem sind stetige Funktionen auf kompakten Mengen stets gleichmäßig stetig. Erwähnt werden sollte auch der

1.14 Satz von Bolzano-Weierstraß: *Sei* A *eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes* X *und* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Punkten* $x_n \in A$. *Dann gibt es eine Teilfolge* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, *die gegen einen Punkt* $a \in A$ *konvergiert.*

Damit besagt der Satz von Bolzano-Weierstraß insbesondere auch, daß in abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen metrischer Räume jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Kompakte Teilmengen bieten Folgen gewissermaßen nicht genügend Platz, sodaß sie stets gegen womöglich unendlich viele Häufungspunkte gehen. Für den speziellen Fall des $\mathbb{R}^n$ gilt der

1.15 Überdeckungssatz von Heine-Borel: *Ist* $A \subset \mathbb{R}^n$ *abgeschlossen und beschränkt, dann kann man aus jeder offenen Überdeckung von* A *eine endliche Teilüberdeckung auswählen.*

Das ist aber nichts anderes als die Anwendung von Satz 1.13 auf den $\mathbb{R}^n$.

Das sollte als kurzer Überblick über die mengentheoretische Topologie für die hier verfolgten Ziele genügen. Wir bleiben im folgenden Abschnitt bei der Betrachtung von Mengen, wechseln dabei jedoch von der qualitativen zu einer mehr quantitativen Perspektive.

1.2 Grundbegriffe der Maß- und Integrationstheorie

Die Motivation, die zur Entdeckung der in diesem Abschnitt skizzierten Sachverhalte führt, ist die Frage, inwieweit es möglich ist, Mengen so etwas wie einen Inhalt zuzuordnen. Im einfachsten Fall kann man darunter das Volumen geometrischer Gebilde verstehen; es wird sich jedoch zeigen, daß es sich hierbei nur um einen Spezialfall handelt. Denn das, was man sich üblicherweise unter Teilmengen insbesondere überabzählbarer Mengen vorstellt, liefert nicht einmal die Spur einer Andeutung, welche Vielfalt von Teilmengen solcher Mengen es tatsächlich gibt. Entsprechend kann man den Inhaltsbegriff sehr weitgehend verallgemeinern, wobei man insbesondere keineswegs auf geometrische Interpretationen beschränkt ist.

[24] Das ist die Verallgemeinerung des Satzes vom Maximum und Minimum für reelle Funktionen.

1.2.1 Maße und Meßbarkeit

Maße sind Abbildungen, die den Teilmengen einer Menge im einfachsten Fall nichtnegative reelle Zahlen zuordnen; diese lassen sich dann in sehr allgemeiner Weise als Inhalte der Teilmengen auffassen. Der Begriff der Teilmenge einer Menge ist dabei allerdings ein sehr weitgefaßter und schwer zu überschauender Begriff; wie vielfältig die möglichen Teilmengen einer Menge sein können, sieht man etwa am Beispiel des $\mathbb{R}^n$, wenn man dessen Teilmengen ein wenig klassifiziert. Die einfachsten sind die (offenen, halboffenen oder abgeschlossenen) Intervalle oder Rechtecke. Bildet man beliebige endliche oder abzählbare Vereinigungen offener Intervalle, landet man schon bei einer wesentlich komplizierteren Klasse von Teilmengen, den sogenannten Borelmengen. Eine noch kompliziertere Klasse von Teilmengen sind die projektiven Mengen. Eine projektive Menge ist die Menge der Bildpunkte irgendeiner Funktion vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$ angewandt auf irgendein Intervall (man „projeziert" das Intervall durch die Funktion vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$); entsprechend erhält man die Menge aller projektiven Mengen, indem man alle beliebigen Funktionen vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$ auf alle beliebigen Intervalle anwendet, und alle dabei herauskommenden Bildpunktemengen sammelt. Man muß nur genügend merkwürdige Funktionen heranziehen, um entsprechend merkwürdige projektive Mengen zu erhalten, die die abwegigsten Borelmengen locker in den Schatten stellen. Aber auch das ist noch nicht alles. Die Menge *aller* Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ geht wiederum weit darüber hinaus, und es gibt darin noch viel kompliziertere Teilmengen als die kompliziertesten projektiven Mengen. Daß ihre Mächtigkeit größer als diejenige des Kontinuums ist, ist dabei noch das kleinste Problem. Die Menge aller Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ oder irgendeiner anderen kontinuierlichen Menge sollte man sich auch nicht versuchsweise anschaulich vorstellen wollen.

Es deutet sich also bereits an, daß man auf Schwierigkeiten trifft, wenn man beliebigen Mengen Inhalte zuzuordnen versucht, und zwar nicht erst bei komplizierten oder sehr großen Mengen, sondern auch schon dann, wenn die Betrachtung zunächst „nur" auf beliebige Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ oder irgendeines anderen Kontinuums beschränkt bleiben soll. Die Ausmaße dieser Schwierigkeiten lassen sich aus rein metrisch-topologischer Sicht nicht einmal erahnen; das liegt an den Abgründen, die sich im Zusammenhang mit Überlegungen zur Mächtigkeit des Kontinuums auftun. Bevor man im vorliegenden Zusammenhang einen Blick in diese Abgründe wirft, sollte man den Begriff des Maßes zunächst sorgfältig definieren. Die Eigenschaften, die man fordern könnte, sind intuitiv naheliegend: Ein Maß μ auf einer Menge M sollte

a) eine nicht identisch verschwindende Funktion $\mu : \mathfrak{P}(\mathrm{M}) \longrightarrow [0, \infty]$ sein, außerdem

b) *translationsinvariant*:

$$\mu(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A} + x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathrm{M},$$

c) *monoton*:

$$\mu(\mathrm{A}) \leqq \mu(\mathrm{B}) \quad \text{für } \mathrm{A} \subseteqq \mathrm{B}$$

d) und *abzählbar additiv*:

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \quad \text{falls } A_1, A_2, \ldots \text{ paarweise disjunkt.}$$

Natürlich interessiert man sich dabei für nichttriviale Maße, also nicht etwa für solche, die nur den Wert 0 oder nur den Wert ∞ annehmen. – Intuitiv naheliegend sind die Forderungen a) bis d) deswegen, weil dabei einfache Vorstellungen von Längen, Flächen- und Rauminhalten sowie deren höherdimensionale Verallgemeinerungen im Hintergrund stehen; dennoch ist das bereits zuviel verlangt. So zeigten beispielsweise Vitali und Hausdorff für den Fall der reellen Zahlen, daß Forderung b) nicht erfüllbar ist: Es gibt kein translationsinvariantes Maß auf $\mathbb{R}$ oder irgendeinem abgeschlossenen Intervall [141], [382]. Potenzmengen von Mengen der Mächtigkeit des Kontinuums sind zu groß, um darauf Maße mit den gewünschten Eigenschaften definieren zu können – oder zu klein, wenn man die Forderung nach Translationsinvarianz wegläßt[25]. Denn dann ändert sich die Sache, wenn man zu noch sehr viel größeren Mengen übergeht, nämlich zu solchen von mindestens meßbarer Kardinalität. Um diesen Begriff zu erklären müssen wir Eigenschaft (2) verallgemeinern: Ein Maß μ auf einer Menge M heißt λ-*additiv*, wenn für jedes $\gamma < \lambda$ und jede Familie $\{ A_\chi \mid \chi < \gamma \} \subseteqq \mathfrak{P}(M)$ paarweise disjunkter Mengen $\mu\big(\bigcup_{\chi<\gamma} A_\chi\big) = \sum_{\chi<\gamma} \mu(A_\chi)$ gilt. Dabei kann ein Maß auf einer Menge der Mächtigkeit κ auch κ-additiv sein. Eine überabzählbare Kardinalzahl κ heißt *meßbar*, wenn es ein nichttriviales, κ-additives, $\{0, 1\}$-wertiges Maß auf κ gibt. In diesem Fall gibt es auf κ überhaupt nur κ-additive Maße, auch solche, die $[0, \infty]$-wertig sind[26]. Meßbare Kardinalzahlen sind wie oben angedeutet *sehr viel* größer als nur unerreichbare Kardinalzahlen[27]. Auf solchen Mengen gibt es stets nichttriviale Maße.

Allerdings hilft das für das ursprüngliche Problem der Frage nach der Meßbarkeit beliebiger Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ auch nicht wirklich weiter; man findet sich dann nämlich mit zwei gleichermaßen problematischen Alternativen konfrontiert. Banach und Kuratowski konnten einerseits zeigen, daß es unter der Annahme der Kontinuumshypothese kein nichttriviales Maß auf $[0, 1]$ gibt [23]. Da sie dabei nur von rein mengentheorethischen Begriffen Gebrauch machten, gilt dieses Resultat für alle Mengen der Mächtigkeit $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$. Man könnte nun natürlich den Spieß umdrehen und die Kontinuumshypothese verwerfen. Doch wenn das wirklich etwas nützen soll, macht es alles noch viel komplizierter, wie Ulam [379] und später Solovay [349], [350] herausgefunden haben. Die Annahme der Nicht-Gültigkeit der Kontinuumshypothese ist unter der Voraussetzung, daß es meßbare Kardinalzahlen gibt, mit der Annahme verträglich, daß es auch nichttriviale Maße auf beliebigen Mengen der Mächtigkeit von $\mathbb{R}$

[25] Dadurch wird das Problem insbesondere von geometrischen Betrachtungen befreit, sodaß der Begriff des Maßes auf beliebige Mengen angewandt werden kann.

[26] Alternativ kann man meßbare Kardinalzahlen auch über Ultrafilter definieren: Eine überabzählbare Kardinalzahl κ heißt meßbar, wenn es einen κ-vollständigen Ultrafilter auf κ gibt, der kein Hauptfilter ist.

[27] Die meßbaren Kardinalzahlen wurden von Ulam entdeckt, der auch gleich zeigte, daß sie mindestens unerreichbar sind [379]. Daß die kleinste meßbare Kardinalzahl tatsächlich größer ist als die kleinste unerreichbare, wurde erst nach und nach von Erdös und Tarski [94], Erdös und Hajnal [93] sowie Rowbottom [319] gezeigt.

gibt, nur wird diese dann plötzlich sehr, sehr groß[28]. Denn aus der zweiten Annahme folgt die Existenz schwach unerreichbarer Kardinalzahlen, die kleiner als $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ sind. $2^{\aleph_0}$ ist dann zwar immer noch viel kleiner als jede stark unerreichbare Kardinalzahl, aber viel größer als $\aleph_1$. Mit anderen Worten: Nur wenn sich das Kontinuum als ungeahnt groß erweist, bietet es Platz für nichttriviale Maße[29]. Intuitiv neigt man dazu, auch für den Fall der Nichtgültigkeit der Kontinuumshypothese die Mächtigkeit des Kontinuums deutlich kleiner als die kleinste schwach unerreichbare Kardinalzahl einzuschätzen, was solche Maße nicht zulassen würde. Ganz egal, für welche dieser Möglichkeiten man sich entscheidet, in jedem Fall erweist sich das Problem der Meßbarkeit überabzählbarer Mengen als äußerst vertrackt[30].

Um solchen Problemen aus dem Weg zu gehen, ist es am einfachsten, nicht nach Maßen auf der gesamten Potenzmenge der betrachteten Menge zu suchen, sondern sich auf eine Teilmenge von letzterer oder genauer gesagt auf ein System von in gewissem Sinn vernünftigen Teilmengen der Menge zu beschränken. Das leistet die folgende

1.16 Definition: Ein System $\mathfrak{S}$ von Teilmengen einer Menge M heißt *σ-Algebra*, wenn folgendes gilt:

(i) $\emptyset \in \mathfrak{S}$ und $M \in \mathfrak{S}$,

(ii) Sind $A, B \in \mathfrak{S}$, dann sind auch $A \cup B \in \mathfrak{S}$, $A \cap B \in \mathfrak{S}$ und $A \setminus B \in \mathfrak{S}$,

(iii) Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{S}$, dann sind auch $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{S}$ und $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{S}$.

Ist $\mathscr{A}$ eine beliebige Familie von σ-Algebren auf einer Menge M, dann ist $\bigcap \mathscr{A}$ ebenfalls eine σ-Algebra auf M, während $\bigcup \mathscr{A}$ im allgemeinen keine σ-Algebra ist. Bildet man zu $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{P}(M)$ den Durchschnitt aller σ-Algebren auf M, die $\mathfrak{F}$ enthalten, dann liefert das die kleinste σ-Algebra auf M, die $\mathfrak{F}$ enthält; man nennt sie die von $\mathfrak{F}$ *erzeugte* σ-Algebra und schreibt dafür $\sigma(\mathfrak{F})$. Dabei gilt $|\sigma(\mathfrak{F})| \leqq |\mathfrak{P}(M)|$, und für unendliche σ-Algebren folgt daraus $|\mathfrak{S}| \geqq \mathfrak{c}$. Eine σ-Algebra $\mathfrak{S}$ auf M heißt *abzählbar erzeugt*, wenn es ein abzählbares Mengensystem $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(M)$ gibt mit $\mathfrak{S} = \sigma(\mathfrak{T})$. Wenn das kleinste $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{S} = \sigma(\mathfrak{T})$ überabzählbar ist, heißt $\mathfrak{S}$ *überabzählbar erzeugt*. Ist $\mathfrak{S}$ abzählbar erzeugt, dann gilt $|\mathfrak{S}| = \mathfrak{c}$, ist $\mathfrak{S}$ überabzählbar erzeugt, dann gilt $|\mathfrak{S}| > \mathfrak{c}$.

Natürlich ist $\mathfrak{P}(M)$ eine und damit die größte σ-Algebra auf M. Andere, weniger triviale und damit für die Maßtheorie nützlichere Beispiele erhält man, wenn man als Menge M einen topologischen Raum wählt. Ist $\mathfrak{M}$ eine Topologie auf M, dann heißt $\sigma(\mathfrak{M})$ *Borel-Algebra* des topologischen Raums $(M, \mathfrak{M})$. Man schreibt dafür meist $\mathfrak{B}(M)$, wobei unberücksichtigt bleibt, daß $\mathfrak{B}(M)$ natürlich von der gewählten Topologie abhängt. $\mathfrak{B}(M)$ ist gleichzeitig die kleinste σ-Algebra, die alle bezüglich dieser Topologie offenen Teilmengen von M enthält. Die Elemente von $\mathfrak{B}(M)$ nennt man *Borel-Mengen* von M (wieder bezüglich der gewählten

[28]Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die zweite Annahme keineswegs aus der ersten folgt; man kann lediglich die relative Konsistenz dieser beiden beweisen.

[29]Genaueres dazu steht beispielsweise in [66].

[30]Detaillierte Informationen zur Meßbarkeit großer Mengen und über meßbare Kardinalzahlen findet man in [72] und [188].

Topologie). Ist $C_c(\mathsf{M})$ die Menge der stetigen reellen Funktionen auf X mit kompaktem Träger und $\mathfrak{A} = \{\, f^{-1}(\mathsf{X}) \mid f \in C_c(\mathsf{M}),\ \mathsf{X} \subset \mathsf{M} \text{ offen} \,\}$, dann heißt $\sigma(\mathfrak{A})$ *Baire-Algebra* von M; man schreibt dafür $\mathfrak{B}_0(\mathsf{M})$. Die Elemente von $\mathfrak{B}_0(\mathsf{M})$ heißen *Baire-Mengen* von M. Im allgemeinen sind $\mathfrak{B}(\mathsf{M})$ und $\mathfrak{B}_0(\mathsf{M})$ unterschiedliche Mengen; erfüllt M jedoch das zweite Abzählbarkeitsaxiom, dann gilt $\mathfrak{B}(\mathsf{M}) = \mathfrak{B}_0(\mathsf{M})$.

Eine abgeschwächte Version der σ-Algebren bilden die *σ-Ringe*. Ein σ-Ring ist eine nichtleere Familie $\mathfrak{R}$ von Teilmengen einer Menge M, die nur die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) Sind $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathfrak{R}$, dann auch $\mathsf{A} \setminus \mathsf{B} \in \mathfrak{R}$,

(ii) Sind $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots \in \mathfrak{R}$, dann auch $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n \in \mathfrak{R}$.

Gilt außerdem $\mathsf{M} \in \mathfrak{R}$, dann ist $\mathfrak{R}$ ein σ-Körper. Näheres dazu findet man in [296][31].

Auf geeignet gewählten σ-Algebren kann man nun Maße konstruieren, die alle gewünschten Eigenschaften aufweisen, bei Bedarf auch diejenige der Translationsinvarianz. Das sieht dann etwa folgendermaßen aus:

1.17 Definition: Ein *Maß* μ auf einer σ-Algebra $\mathfrak{S}$ über einer Menge M ist eine Abbildung $\mu : \mathfrak{S} \longrightarrow [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$,

(2) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(\mathsf{A}_n)$, falls $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots$ paarweise disjunkt.

$(\mathsf{M}, \mathfrak{S}, \mu)$, bezeichnet man als *Maßraum*; die Mengen aus $\mathfrak{S}$ heißen *meßbare Mengen*. Die Eigenschaft (2) der abzählbaren Additivität heißt auch *σ-Additivität*.

Gilt $\mu(\mathsf{A}) = \mu(\mathsf{A}+x)$ für alle $x \in \mathsf{M}$, so heißt das Maß μ wie bereits gesagt *translationsinvariant*. μ heißt *vollständig*, wenn für jede Teilmenge $\mathsf{T} \subsetneqq \mathsf{A} \in \mathfrak{S}$ mit $\mu(\mathsf{A}) = 0$ ebenfalls $\mathsf{T} \in \mathfrak{S}$ und $\mu(\mathsf{T}) = 0$ gilt. μ heißt *endlich*, wenn $\mu(\mathsf{M}) < \infty$ gilt, und es heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*, wenn $\mu(\mathsf{M}) = 1$ gilt. Jedes endliche Maß μ läßt sich vermöge $\nu = \mu/\mu(\mathsf{M})$ in ein Wahrscheinlichkeitsmaß transformieren. Ein Maß μ heißt *σ-finit*, wenn es eine Zerlegung $\mathsf{M} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{M}_n$ gibt, für die $\mu(\mathsf{M}_n) < \infty$ gilt für alle n. Dieser Definition sieht man natürlich an, daß es auch nicht σ-finite Maße gibt, also solche, gemäß derer man die Mengen, auf denen sie definiert sind, nur in überabzählbar viele Teilmengen endlichen Maßes zerlegen kann.

Gilt für ein System $\mathfrak{S}$ von Teilmengen von M nur (i) und (ii) von Definition 1.16, dann heißt $\mathfrak{S}$ *Mengenalgebra*. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{S} \longrightarrow [0, \infty]$ auf einer Mengenalgebra, welche die Eigenschaft (2) von Definition 1.17 erfüllt, heißt *Prämaß*.

Die Konstruktion geeigneter σ-Algebren dünnt nun Potenzmengen genügend stark aus, um auf dem verbleibenden Rest auch translationsinvariante Maße zu finden. In der Tat ist

[31] Nicht bestätigt ist die Geschichte von dem Studenten, der in einer Prüfung von einem seiner Mathematik-Professoren gefragt wurde, ob er etwas von σ-Ringen erzählen könne und darauf antwortete, dort wohne sein Onkel.

diese Ausdünnung häufig sehr stark; um es vorsichtig auszudrücken: Die Potenzmenge einer Menge ist sehr viel größer als die meisten nicht trivialen σ-Algebren auf der Menge.

Gilt eine Eigenschaft für alle Elemente der Menge M mit Ausnahme einer Teilmenge vom Maß Null, dann sagt man, diese Eigenschaft gelte *fast überall* auf M[32]. In diesem Sinn sind Aussagen zu verstehen wie: Fast alle reellen Zahlen sind irrational, oder $f = g$ gilt fast überall. Teilmengen vom Maß Null nennt man auch Nullmengen.

Wir betrachten ein paar Beispiele für Maße:

a) Das Lebesgue-Maß

Wir wählen die Menge $\mathrm{M} = \mathbb{R}^n$ und starten mit dem System der offenen endlichen oder unendlichen Intervalle

$$\mathrm{J} = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n,\ a_i < x_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

also die offenen endlichen oder unendlichen Quader im $\mathbb{R}^n$. Jedem derartigen Intervall ordnen wir nun seinen im geometrischen Sinn verstandenen Inhalt

$$V = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

zu, also dessen Volumen. Um nun ein vernünftiges System von Teilmengen zu erhalten, betrachten wir erst einmal das System $\mathfrak{J}$ aller abzählbaren Vereinigungen von paarweise disjunkten offenen Intervallen; das ist genau die Familie aller offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$. Der Inhalt von solchen Vereinigungen ist einfach die Summe der Volumina der sie konstituierenden Intervalle, deshalb definieren wir zunächst hierfür ein Maß λ durch

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i),$$

was natürlich auch unendlich sein kann. Als σ-Algebra wählen wir die Borelalgebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Für beliebige Mengen $\mathrm{B} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ definieren wir nun das *Lebesgue-Maß* λ gemäß

$$\lambda(\mathrm{B}) = \inf\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(\mathrm{J}_n)\ \middle|\ \mathrm{B} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty}\mathrm{J}_n,\ (\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{J}\right\}.$$

Entsprechend heißen Mengen aus $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ *Lebesgue-meßbare Mengen*. Das Lebesgue-Maß ist σ-finit, vollständig und translationsinvariant. Es gibt allerdings wie oben bereits angedeutet merkwürdige Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die nicht Lebesgue-meßbar sind. Vitali konstruierte ein Beispiel einer nicht Lebesgue-meßbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit Hilfe des Auswahlaxioms auf die folgende Art und Weise [382]: Auf dem Intervall $[0, 1]$ sei eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert durch

$$x \sim y :\Longrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

[32]In der Mengenlehre sagt man verallgemeinernd, eine Eigenschaft gelte fast überall auf M, wenn sie für alle Elemente von M gilt mit Ausnahme von nichtstationär vielen.

Die Äquivalenzklassen von $\sim$ sind Teilmengen des Intervalls $[0,1]$, deren Elemente sich jeweils paarweise um dieselbe rationale Zahl unterscheiden. Das Auswahlaxiom garantiert, daß es ein Repräsentantensystem $\mathsf{S} \subset [0,1]$ für die Äquivalenzrelation $\sim$ gibt. Die Frage ist nun, welches Lebesgue-Maß die Menge S hat. Dazu sei
$\mathsf{S}_r := \{\, x + r \mid x \in \mathsf{S}\,\}$, dann gilt

$$\mathsf{S}_r \cap \mathsf{S}_q = \emptyset \quad \text{für } q, r \in \mathbb{Q},\ q \neq r$$

und

$$\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \mathsf{S}_r.$$

Die Annahme $\lambda(\mathsf{S}) = 0$ führt nun wegen

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda\Big(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \mathsf{S}_r\Big) = \sum_{r \in \mathbb{Q}} \lambda(\mathsf{S}_r) = \sum_{r \in \mathbb{Q}} \lambda(\mathsf{S}) = 0$$

auf Unsinn; dabei wurde die σ-Additivität und die Translationsinvarianz von λ verwendet. Die Annahme $\lambda(\mathsf{S}) > 0$ führt aber wegen

$$\lambda([0,2]) \geqq \lambda\Big(\bigcup_{\substack{0 \leqq r \leqq 1 \\ r \in \mathbb{Q}}} \mathsf{S}_r\Big) = \sum_{\substack{0 \leqq r \leqq 1 \\ r \in \mathbb{Q}}} \lambda(\mathsf{S}_r) = \sum_{\substack{0 \leqq r \leqq 1 \\ r \in \mathbb{Q}}} \lambda(\mathsf{S}) = \infty$$

ebenfalls auf Unsinn. Also ist S nicht Lebesgue-meßbar.

b) Das Lebesgue-Stieltjes-Maß

Das Lebesgue-Maß läßt sich problemlos verallgemeinern. Dazu sei eine beliebige vektorwertige Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Wir betrachten wieder die Menge $\mathsf{M} = \mathbb{R}^n$. Jedem offenen Intervall

$$\mathsf{J} = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n,\ a_i < x_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

sei diesmal der Inhalt

$$\lambda_g(\mathsf{J}) = \prod_{i=1}^{n} [\, g_i(b_i) - g_i(a_i)\,]$$

zugeordnet. Wie im obigen Beispiel erweitern wir das System dieser Intervalle wieder zur Borelalgebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ und erhalten so analog zu oben ein vollständiges Maß λ_g auf dem $\mathbb{R}^n$,

$$\lambda_g(\mathsf{B}) = \inf\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_g(\mathsf{J}_n) \,\middle|\, \mathsf{B} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathsf{J}_n,\ (\mathsf{J}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{J} \right\}.$$

Dieses Maß nennt man das *durch g erzeugte Lebesgue-Stieltjes-Maß*. Der Spezialfall $g(x) := x$ ist gerade wieder das Lebesgue-Maß.

c) Radon-Maße

Die oben beschriebenen Lebesgue- und Lebesgue-Stieltjes-Maße sind Spezialfälle einer allgemeineren Klasse von Maßen, welche sich durch besondere Approximationseigenschaften auszeichnen. M sei ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}(\mathrm{M})$ eine σ-Algebra. Ein Maß μ auf M heißt *Radon-Maß*[33], wenn folgendes gilt:

(i) $\mathfrak{B}(\mathrm{M}) \subset \mathfrak{S}$,

(ii) für alle kompakten Teilmengen C von M gilt $\mu(\mathrm{C}) < \infty$,

(iii) für offene Teilmengen U von M gilt $\mu(\mathrm{U}) = \sup\{\, \mu(\mathrm{C}) \mid \mathrm{C} \subset \mathrm{M} \,\wedge\, \mathrm{C}\,\text{kompakt}\,\}$,

(iv) für alle $\mathrm{A} \subset \mathfrak{S}$ gilt $\mu(\mathrm{A}) = \inf\{\, \mu(\mathrm{U}) \mid \mathrm{A} \subset \mathrm{U} \,\wedge\, \mathrm{U}\,\text{offen}\,\}$.

Verzichtet man auf (ii), dann nennt man μ ein *reguläres Maß*. – Radon-Maße zeichnen sich insbesondere dadurch aus, daß für sie das Maß einer Menge das Supremum der Maße ihrer kompakten Teilmengen ist. Die Teilmengen endlichen Maßes sind folglich gerade die kompakten Mengen. In diesem Sinn sind Radon-Maße veträglich mit der Topologie der Menge, auf der sie definiert sind.

Hinter den oben erwähnten Approximationseigenschaften der Radon-Maße verbirgt sich die Möglichkeit, mit Hilfe von letzteren zu beschreiben, inwieweit man Teilmengen des betrachteten Maßraums durch kompakte beziehungsweise offene Mengen annähern kann; das ist Gegenstand von folgendem

1.18 Satz: M *sei ein lokalkompakter Hausdorff-Raum,* $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}(\mathrm{M})$ *eine* σ*-Algebra,* μ *ein Radon-Maß auf* M *und* $\mathrm{A} \in \mathfrak{S}$*. Dann gilt folgendes:*

(i) Ist $\mu(\mathrm{A}) < \infty$*, dann gibt es für jedes* $\varepsilon > 0$ *eine kompakte Menge* $\mathrm{C} \subset \mathrm{A}$ *mit* $\mu(\mathrm{A} \setminus \mathrm{C}) < \varepsilon$.

(ii) Gibt es eine Familie $(\mathrm{U}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *offener Mengen mit* $\mathrm{A} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathrm{U}_j$*, so gibt es für jedes* $\varepsilon > 0$ *eine offene Menge* $\mathrm{U} \supset \mathrm{A}$ *mit* $\mu(\mathrm{U} \setminus \mathrm{A}) < \varepsilon$.

Die nächste beiden Begriffe sind in gewissem Sinn komplementär zueinander. μ und ν seien zwei Maße über derselben σ-Algebra $\mathfrak{S}$. Dann heißt ν *absolut stetig bezüglich* μ, wenn aus $\nu(\mathrm{A}) = 0$ stets auch $\mu(\mathrm{A}) = 0$ folgt; man schreibt dafür auch $\nu \ll \mu$. Die Bezeichnung dieser Eigenschaft wird verständlich, wenn man folgende alternative Definition betrachtet: ν ist genau dann absolut stetig bezüglich μ, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodaß für alle $\mathrm{A} \in \mathfrak{S}$ aus $\mu(\mathrm{A}) \leqq \delta$ stets $\nu(\mathrm{A}) \leqq \varepsilon$ folgt. Man vergleiche das mit der ε-δ-Definition der Stetigkeit. ν heißt *singulär* bezüglich μ, wenn es eine Menge $\mathrm{A} \in \mathfrak{S}$ gibt mit $\nu(\mathrm{A}) = 0$ und $\mu(\mathrm{M} \setminus \mathrm{A}) = 0$; man schreibt dafür auch $\nu \perp \mu$. Ein singuläres Maß ordnet also unter anderem gewissen Mengen das Maß 0 zu, die bezüglich μ nicht nur von nicht verschwindendem Maß sind, sondern fast, das heißt bezüglich μ bis auf eine Menge vom Maß 0, identisch mit M sind. – Zwei Beispiele sollen diese Definitionen etwas verdeutlichen.

[33] Benannt nach Johann Radon, der Maße mit solchen Eigenschaften als erstrer betrachtete [295]. Vergleiche auch [338].

1. Verwendet man die charakteristische Funktion des Intervalls $[p, \infty)$ mit irgendeinem $p \in \mathbb{R}$,

$$\chi_{[p,\infty)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in [p, \infty), \\ 0 & \text{für} \quad x \notin [p, \infty), \end{cases}$$

so erhält man damit das sogenannte *Diracsche Punktmaß*

$$\mu_{\chi_{[p,\infty)}}(A) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad p \in A, \\ 0 & \text{für} \quad p \notin A. \end{cases}$$

In analoger Weise liefert beispielsweise die Summe der charakteristischen Funktionen von abzählbar vielen disjunkten Intervallen $I_n = [p_n, q_n)$ ein Maß

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p_n \in A \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit $P = \{ p_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ ist dann $\mu_P(X) = \sum\limits_{x \in P \cap X} \mu(\{x\})$ ein *reines Punktmaß*, das den Mengen $\{p_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ das Maß 1 und allen anderen Borelmengen das Maß Null zuordnet. Das ist eine ungewohnte Vorstellung, weil man es gewohnt ist, isolierten Punkten das Volumen und verallgemeinernd damit auch das (Lebesgue-) Maß 0 zuzuschreiben. Das ist aber nur ein sehr spezielles Beispiel für ein Maß, und wie man hier sieht gibt es auch andere Möglichkeiten. Die Maße $\mu_{\chi_{[p,\infty)}}$ und μ_P sind singulär bezüglich des Lebesgue-Maßes.

2. Ein weiteres klassisches Beispiel für ein singuläres Maß liefert die im folgenden beschriebene, nicht ganz alltägliche Funktion. Wir betrachten die Menge

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n} \right) \subset [0, 1];$$

diese Menge entsteht anschaulich aus dem Intervall $[0, 1]$ durch fortwährendes Dritteln und Entfernen des ersten und letzten Drittels ad infinitum. Sie hat das Lebesgue-Maß

$$\lambda(S) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1;$$

folglich hat die komplementäre Menge $C = [0, 1] \setminus S$ das Lebesgue-Maß Null. C ist ein Beispiel für eine überabzählbare Menge vom Maß Null und heißt *Cantor-Menge*. Auf S definieren wir nun eine Funktion $\alpha(x)$ durch

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{für } x \in \left(\dfrac{3k}{3^n}, \dfrac{3k+1}{3^n} \right), \;\; k \in \{ 0, 1, \ldots, 3^{n-1} - 1 \} \\ 1 - \dfrac{1}{2^{n+1}} & \text{für } x \in \left(\dfrac{3k+2}{3^{n+1}}, \dfrac{3k+3}{3^{n+1}} \right), \;\; k \in \{ 0, 1, \ldots, 3^{n-1} - 1 \} \end{cases}$$

und durch stetige Ergänzung machen wir α zu einer stetigen Funktion auf $[0,1]$. Die Funktion α hat die merkwürdige Eigenschaft, daß sie nichtkonstant und stetig ist und ihre Ableitung $\alpha'(x)$ fast überall existiert und fast überall 0 ist; beides in Bezug auf das Lebesgue-Maß. Nun verwenden wir die so konstruierte Funktion α zur Bildung des zugehörigen Lebesgue-Stieltjes-Maßes λ_α. Auch dieses Maß hat merkwürdige Eigenschaften. Da α stetig ist, ist λ_α kontinuierlich, also gilt $\lambda_\alpha(\{p\}) = 0$ für alle einpunktigen Mengen $\{p\}$. Aber λ_α ist auch singulär, denn es gilt beispielsweise $\lambda_\alpha([0,1] \setminus \mathrm{C}) = \lambda_\alpha(\mathrm{S}) = 0$, obwohl C das Lebesgue-Maß 0 und S das Lebesgue-Maß 1 hat.

Stetige und singuläre Maße sind nicht nur aufgrund ihrer Eigenschaften komplementär. Der folgende Satz zeigt, wie sich jedes positive Maß in einen absolut stetigen und einen singulären Anteil zerlegen läßt.

1.19 Zerlegungssatz von Lebesgue:[34] *Sind μ und ν zwei Maße auf einer σ-Algebra $\mathfrak{S}$ über einer Menge* M*, dann gibt es zwei Maße ν_1 und ν_2 auf $\mathfrak{S}$ mit $\nu = \nu_1 + \nu_2$, wobei ν_1 absolut stetig und ν_2 singulär bezüglich μ ist.*

Auf den ersten Blick scheinen die reine Punktmaße genau die singularen Maße zu sein; das oben beschriebende Maß λ_α als ein stetiges singuläres Maß zeigt jedoch, daß das nicht zutrifft. In der Tat läßt sich unter speziellen Voraussetzungen die Zerlegung von Satz 1.19 noch etwas verfeinern. Beispielsweise sei im folgenden M ein Hausdorff-Raum und $\mathfrak{S}$ die Menge $\mathfrak{B}(\mathrm{M})$ der Borelmengen von M. Ein Maß μ auf M heißt *Borelmaß*, wenn es zu jedem $x \in \mathrm{M}$ eine offene Umgebung U gibt, sodaß $\mu(\mathrm{U}) < \infty$ gilt. Eine Funktion f ist eine *Borelfunktion*, wenn $f^{-1}(\mathrm{A})$ eine Borelmenge ist für alle offenen Mengen $\mathrm{A} \in \mathfrak{B}(\mathrm{M})$. Die Menge P der *reinen Punkte* von μ ist definiert als $\mathrm{P} = \{\, x \mid \mu(\{x\}) \neq 0 \,\}$, das sind alle Punkte, die als einelementige Mengen betrachtet nicht vom Maß 0 sind. Wenn μ ein reguläres Borelmaß ist, dann ist P abzählbar. Für beliebige Borelmengen B definiert man nun

$$\mu_\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \sum_{x \in \mathrm{P} \cap \mathrm{B}} \mu(\{x\}) = \mu(\mathrm{P} \cap \mathrm{B}).$$

Offensichtlich gilt $\mu_\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \sum_{x \in \mathrm{B}} \mu_\mathrm{P}(\{x\})$. Ein Maß μ ist kontinuierlich, wenn es keine reinen Punkte hat. μ ist ein reines Punktmaß, wenn

$$\mu(\mathrm{B}) = \sum_{x \in \mathrm{B}} \mu(\{x\})$$

gilt für alle $\mathrm{B} \in \mathfrak{B}(\mathrm{M})$. Für jedes kontinuierliches Maß μ_c ist $\mu_\mathrm{c}(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathrm{M}$; das entspricht der intuitiven Vorstellung, daß einpunktige Mengen das Maß Null haben sollten, was aber wie gerade gesehen nicht den allgemeinsten Fall darstellt. Für reguläre Borelmäße läßt sich nun deren singulärer Anteil stets selbst wieder in ein reines Punktmaß und einen absolut stetigen singulären Anteil zerlegen; man schreibt dafür etwa $\mu_\mathrm{sing} = \mu_\mathrm{p} + \mu_\mathrm{cs}$. Damit

[34] In seiner heute üblichen Form geht dieses Resultat auf Hans Hahn zurück [130].

läßt sich Satz 1.19 zur folgenden Aussage präzisieren.

1.20 Satz: *μ sei ein reguläres Borelmaß auf einem Hausdorffraum* M. *Dann existiert für jedes reguläre Borelmaß ν auf* M *eine kanonische Zerlegung $\nu = \nu_\mathrm{p} + \nu_\mathrm{ac} + \nu_\mathrm{cs}$; dabei ist ν_p ein reines Punktmaß, ν_ac ist absolut stetig und ν_cs kontinuierlich und singulär bezüglich μ.*

In dieser Version wird uns der Zerlegungssatz in Kapitel 4 wiederbegegnen.

Eigentlich scheint es klar zu sein, daß Maße die Wertemenge $[0, \infty]$ haben sollten, da sie ja gewöhnlich im Sinne von „Inhalten“ [35] interpretiert werden. Ist das tatsächlich der Fall, dann heißt das betreffende Maß *positiv*. Wir werden jedoch sehen, daß die Quantenmechanik eine erhebliche Erweiterung dieses Konzepts und die Betrachtung von Maßen erforderlich macht, die Abbildungen auf beliebige Banachräume sind. Entscheidend ist dabei lediglich, daß der Zielraum eine lineare Struktur aufweist.

Zur Formulierung einer solchen allgemeineren Maß-Definition sei $\mathfrak{S}$ wieder eine σ-Algebra[36] von Teilmengen einer nichtleeren Menge M und $\mathcal{E}$ ein Banachraum. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathcal{E}$ heißt *Maß*, wenn sie σ-additiv ist, das heißt wenn gilt: Aus

$$\mathrm{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$$

für Mengen A und A_n, $n \in \mathbb{N}$ aus $\mathfrak{S}$, wobei alle A_n paarweise disjunkt sind, folgt stets

$$\mu(\mathrm{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathrm{A}_n).$$

$\mu(\emptyset) = 0$ folgt daraus von selbst. $\mathcal{E}$ kann ein beliebiger Banachraum sein, wobei im allgemeinen auch ∞ als Wert des Maßes zugelassen wird. Zwei spezielle, eigens Erwähnung verdienende Verallgemeinerungen sind $\mathcal{E} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und $\mathcal{E} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$; man spricht dabei von *signierten Maßen* beziehungsweise von *komplexen Maßen*[37]. Im Rahmen der Quantenmechanik sind darüberhinaus aber auch Banachräume in Gestalt von Hilberträumen, Operatoralgebren und dergleichen von Interesse. So bilden beispielsweise operatorwertige Maße einen wesentlichen Bestandteil der für die Quantenmechanik relevanten Aspekte der Spektraltheorie, wie wir sie in Kapitel 4 betrachten.

Ergänzend seien zwei weitere maßtheoretische Begriffe erwähnt, von denen weiter unten gelegentlich Gebrauch gemacht wird. Da positive Maße natürlich einfacher handhabbar sind als Banachraum-wertige, ist es gelegentlich hilfreich, wenn man letztere in geeigneter Weise

[35] Der Begriff der Inhalte ist hier in Anführungsstriche gesetzt, da er in der Maßtheorie eine eigene klar definierte Bedeutung hat. Ein *Inhalt* ist ebenfalls eine positive Funktion auf einer σ-Algebra, aber eine, die nur endlich additiv zu sein braucht, während von Maßen σ-Additivität verlangt wird. Dies näher zu diskutieren würde hier jedoch zu weit führen. Siehe dazu beispielsweise [160] oder [301].

[36] Eigentlich braucht das System von Teilmengen nur ein Prä-Ring zu sein. Ein System $\mathfrak{A}$ von Teilmengen einer Menge M heißt Prä-Ring, wenn folgendes gilt: Sind A und B Mengen aus $\mathfrak{A}$, so läßt sich $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ als disjunkte Vereinigung endlich vieler Mengen aus $\mathfrak{A}$ darstellen. Näheres dazu findet man in [160].

[37] Näheres hierzu steht beispielsweise in [56].

auf erstere zurückführen kann. Das leistet der Begriff der *totalen Variation*[38]. Dazu sei M eine Menge, $\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra auf M und $\mathcal{E}$ ein normierter Raum. Eine *Zerlegung* von $A \in \mathfrak{S}$ ist eine Familie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ von disjunkten Teilmengen von A mit $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Die Menge aller Zerlegungen einer Menge A heiße $\mathscr{Z}(A)$. Nun sei $\alpha : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathcal{E}$ eine beliebige Mengenfunktion. Die Funktion $v\colon {}^{\mathfrak{S}}\mathcal{E} \times \mathfrak{S} \longrightarrow [0,1]$, definiert durch

$$v(\alpha, A) = \sup \left\{ \sum_{A_j \in \mathfrak{Z}} \|\alpha(A_j)\| \;\middle|\; \mathfrak{Z} \in \mathscr{Z}(A) \right\},$$

heißt totale Variation von α auf A. Ist α eine additive Mengenfunktion, dann ist auch $v(\alpha) : {}^{\mathfrak{S}}\mathcal{E} \longrightarrow [0,1]$ mit $v(\alpha)(A) = v(\alpha, A)$ eine additive Mengenfunktion. Ist α sogar nicht-negativ und additiv, dann gilt $v(\alpha, A) = \alpha(A)$ für alle $A \in \mathfrak{S}$. Ist μ ein Maß auf M, dann ist $v(\mu)$ ein positives Maß auf M; man schreibt üblicherweise $v(\mu) = |\mu|$. Es gilt stets $|\mu|(A) \geqq |\mu(A)|$ für alle $A \in \mathfrak{S}$.

Zur Definition des zweiten der beiden erwähnten Begriffe sei M eine Menge, $\mathfrak{X}$ eine Topologie auf M, außerdem sei $\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra auf M und μ ein beliebiges, reell-, komplex-, vektor- oder operatorwertiges Maß auf $\mathfrak{S}$. Dann heißt die Menge

$$\operatorname{supp} \mu := M \setminus \bigcup_{\substack{A \in \mathfrak{X} \\ |\mu|(A)=0}} A$$

Träger des Maßes μ. Dieser ist als Komplement einer Vereinigung offener Mengen abgeschlossen. Da man den Träger eines Maßes μ durch Heraussortieren nur der offenen Nullmengen erhält, ist die offene Menge $M \setminus \operatorname{supp} \mu$ nicht notwendigerweise eine Nullmenge.

1.2.2 Integrale und integrierbare Funktionen

Nachdem wir nun den Begriff des Maßes auf einer Menge zur Verfügung haben, verwenden wir diesen, um mit der Integralrechnung einen der beiden fundamentalen Bestandteile der Infinitesimalrechnung sehr weitgehend zu verallgemeinern. Integrale erlauben in vielfältiger Weise globale Betrachtungen lokal kontinuierlich veränderlicher Systeme, egal ob es sich um krummlinig begrenzte Flächen, teilweise oder ganz kontinuierliche Spektren linearer Operatoren oder wer weiß was sonst handelt. Die Interpretation der Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung im Rahmen der elemenraren Analysis erweist sich dabei als sehr spezieller Sonderfall.

Bei der Definition des einfachen Riemannschen Integrals bedient man sich bekanntlicherweise eines Approximationsprozesses, also eines Grenzwertprozesses, mit Hilfe von Treppenfunktionen. Dessen geometrische Interpretation über Flächeninhalte zeigt, daß dieser Grenzwertprozeß und damit der Integralbegriff mit maßtheoretischen Hilfsmitteln sehr stark verall-

[38] Da Maße spezielle Funktionen sind, läßt sich dieser Begriff in analoger Weise für beliebige Funktionen mit Werten aus normierten Räumen definieren.

gemeinerbar ist[39]. Dazu sind zunächst einige zusätzliche Definitionen erforderlich. Es sei μ ein Maß auf der Menge M und $\mathrm{A} \subsetneqq \mathrm{M}$ meßbar, außerdem sei $\mathcal{E}$ ein Banachraum mit Norm $\|\ \|$. Eine Funktion $\varphi : \mathrm{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ auf A heißt *einfach*, wenn es eine Zerlegung von A aus paarweise disjunkten meßbaren Teilmengen $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}$ sowie Vektoren $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathcal{E}$ gibt, sodaß

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \chi_{\mathrm{A}_j} c_j,$$

wobei

$$\chi_{\mathrm{M}} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \mathrm{M} \\ 0 & \text{für} \quad x \notin \mathrm{M} \end{cases}$$

die charakteristische Funktion der Menge M ist. Die Menge der einfachen $\mathcal{E}$-wertigen Funktionen auf A nennt man $\mathscr{I}(\mu, \mathrm{A}, \mathcal{E})$. Eine Funktion $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ heißt *meßbar*, wenn es eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathscr{I}(\mu, \mathrm{A}, \mathcal{E})$ gibt, sodaß $\lim\limits_{n \to \infty} \| f(x) - \varphi_n(x) \| = 0$ gilt für fast alle $x \in \mathrm{A}$. Ist $\mathcal{E}$ separabel, dann ist das äquivalent zur Forderung, daß für jede meßbare Menge $\mathrm{B} \subset \mathcal{E}$ auch $f^{-1}(\mathrm{B})$ meßbar ist[40]. Sind f und g meßbar, dann sind auch $f + g$, fg und $|fg|$ meßbar. Ist f eine meßbare Funktion, dann ist ihre *wesentliche Wertemenge* definiert durch $\operatorname{ran\,ess} f = \{\, \xi \in \mathcal{E} \mid \mu(\{\, x \in \mathrm{M} \mid |\, f(x) - \xi \,| < \varepsilon \,\}) > 0 \ \text{ für alle } \ \varepsilon > 0 \,\}$.

Einfache Funktionen stellen eine natürliche Verallgemeinerung der Treppenfunktionen dar, denn definitionsgemäß ist die Menge $\mathscr{I}(\mu, \mathrm{A}, \mathcal{E})$ der einfachen Funktionen dicht in der Menge der meßbaren Funktionen; das ist die entscheidende Eigenschaft zur Definition des maßtheoretischen Integralbegriffs. Damit läßt sich nun zunächst ein elementares *Integral für einfache Funktionen* definieren durch

$$\int_{\mathrm{A}} \varphi \, d\mu := \sum_{j=1}^{n} c_j \, \mu(\mathrm{A}_j).$$

Eine verallgemeinerte Integraldefinition erhält man dann durch Approximation der zu integrierenden Funktionen durch einfache Funktionen, was ebenfalls definitionsgemäß bei meßbaren Funktionen stets möglich ist. Eine Funktion $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ heißt *μ-integrierbar*, wenn folgendes gilt:

(i) f ist meßbar;

[39] Ein sehr interessanter alternativer Zugang zur Integrationstheorie stammt von D. Hoffmann und F.-W. Schäfke. Bei diesem erfolgt die Konstruktion von Integralen nicht über Maße, sondern in Form von stetigen Integralerweiterungen mit Hilfe geeigneter Integralnormen. Dadurch werden im Gegensatz zur hier beschriebenen, klassischen Vorgehensweise Maße zu abgeleiteten, den Integralen nachgeordneten Objekte. Näheres dazu findet man in [163].

[40] Verwendet man diese Eigenschaft als allgemeine Definition der Meßbarkeit von Funktionen, müssen diese für die folgende Integraldefinition im Fall eines nicht separablen Banachraums $\mathcal{E}$ zusätzlich *separabel* sein. Eine Funktion f von einer beliebigen Menge M auf einen beliebigen topologischen Raum X heißt separabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge A von X gibt, sodaß $f(\mathrm{M}) \subset \overline{A}$ gilt. Offensichtlich sind alle Funktionen auf einem separablen Raum auch selbst separabel.

(ii) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N(\varepsilon)$, so daß für die f approximierende Folge $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von einfachen Funktionen

$$\int_A \| \varphi_n - \varphi_m \| \, d\mu < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geqq N(\varepsilon).$$

Wenn klar ist, welches Maß gerade gemeint ist, spricht man anstelle von μ-Integrierbarkeit auch nur von Integrierbarkeit.

Wir definieren dann das Integral für meßbare Funktionen durch den Grenzwert

$$\int_A f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_A \varphi_n \, d\mu. \tag{1.1}$$

Dieser Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Folge $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von einfachen Funktionen[41]. Die Eigenschaft der Integrierbarkeit läßt sich damit auf folgende einprägsame Gestalt bringen: f ist genau dann integrierbar, wenn

$$\int_M \|f\| \, d\mu < \infty \tag{1.2}$$

gilt. Ist f integrierbar, so ist folglich auch $\|f\|$ integrierbar. f ist außerdem genau dann μ-integrierbar, wenn es $v(\mu)$-integrierbar ist.

Für das so definierte allgemeine Integral für $\mathcal{E}$-wertige Funktionen lassen sich nun die üblichen Eigenschaften von und Sätze über Integrale beweisen. Es ist linear und stetig, und für alle integrierbaren Funktionen ist

$$\left\| \int_A f \, d\mu \right\| \leqq \int_A \|f\| \, d\mu,$$

außerdem gilt der

1.21 Satz von der majorisierten Konvergenz:[42] *Es seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\int_M \|f_n\| \, d\mu < \infty$, die punktweise fast überall gegen eine meßbare Funktion f konvergiert, und g eine Funktion mit $\int_M \|g\| \, d\mu < \infty$, sodaß $\|f_n(x)\| \leqq g(x)$ fast überall auf M. Dann gilt*

$$\text{(i)} \quad \int_M \|f\| \, d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int_M \|f_n\| \, d\mu < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

[41] Die hier beschriebenen Banachraum-wertigen Integrale wurden erstmals von Salomon Bochner eingeführt [37] und werden daher auch als *Bochner-Integrale* bezeichnet. Ausführliches dazu sowie zu weitergehenden Verallgemeinerungen des Integralbegriffs steht in [337], ähnliches auch in [163] und [208]. Zum Spezialfall vektorwertiger Verallgemeinerungen des Lebesgue-Integrals, sogenannter Bochner-Lebesgue-Integrale, siehe auch [9].

[42] Wird auch als *Satz von der dominierten Konvergenz* bezeichnet; erstmals 1910 bewiesen von Henri Lebesgue für positive Maße. Einen Beweis für vektorwertige Maße und Banachraum-wertige Funktionen findet man bei [78].

$$\text{(ii)} \quad \int_{M} f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{M} f_n\, d\mu,$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{M} \| f_n - f \|\, d\mu = 0.$$

Für nichtnegative Funktionen und positive Maße kommen weitere bedeutende Resultate dazu, wie beispielsweise das

1.22 Lemma von Fatou:[43] M *sei eine Menge,* $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}(M)$ *eine* σ*-Algebra und* μ *ein Maß auf* $\mathfrak{S}$*. Ist* $\{f_n : M \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid n \in \mathbb{N}\}$ *eine Folge nichtnegativer meßbarer Funktionen, dann gilt*

$$\int_{M} \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty} \int_{M} f_n\, d\mu.$$

oder der

1.23 Konvergenzsatz von Beppo Levi:[44] *Ist* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton steigende Folge nichtnegativer meßbarer Funktionen auf* M*, dann gilt*

$$\int_{M} \sup_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \int_{M} \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{M} f_n\, d\mu.$$

Ist zusätzlich die Folge $\left(\int_{M} f_n\, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt, dann konvergiert* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *punktweise fast überall auf* M*. Mit* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *gilt* $\int_{M} f\, d\mu < \infty$ *und*

$$\int_{M} f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{M} f_n\, d\mu.$$

Über das Integral erhält man das verwendete Maß wieder zurück durch $\int_{A} d\mu = \mu(A)$, das heißt durch Integration der Funktion $f \equiv 1$. Das läßt sich verallgemeinern; das Resultat weist unter anderem den Weg zum oben angedeuteten Sonderfall der elementaren Analysis, wo die Integration als Umkehrung der Differentiation aufgefaßt werden kann, geht aber weit darüber hinaus. Motiviert wird es auch durch den Sachverhalt, daß ein Maß ν genau dann absolut stetig bezüglich einem zweiten Maß μ ist, wenn es eine meßbare Funktion f gibt mit $\int_{A} |f(x)|\, d\sigma < \infty$ für jede beschränkte Menge $A \in \mathfrak{S}$, so daß

$$\int f\, d\mu = \int gf\, d\sigma$$

[43] 1906 erstmals publiziert von Pierre Fatou, der das Resultat Henri Lebesgue zuschreibt [99]. Verallgemeinerungen auf vektorwertige Funktionen liefern [200] und [394].

[44] Auch bekannt als *Satz von der monotonen Konvergenz*. Das Resultat wurde 1906 von seinem Namensgeber entdeckt [217]. Hier gibt es ebenfalls eine Verallgemeinerung auf vektorwertige Funktionen; siehe dazu [362].

gilt für alle meßbaren Funktionen g mit $\int |g|\, d\mu < \infty$. Die Umkehrung dieses Resultats ist der für die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Quantenmechanik gleichermaßen besonders wichtige

1.24 Satz von Radon-Nikodym[45]: *Es seien* M *eine Menge,* $\mathfrak{S}$ *eine* σ*-Algebra und* $\mathcal{E}$ *ein reflexiver Banachraum, außerdem seien* μ *ein* σ*-finites positives Maß und* $\nu : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathcal{E}$ *ein bezüglich* μ *absolut stetiges Maß auf* M. *Dann gibt es eine (bis auf Änderungen auf einer Menge vom* μ*-Maß Null) durch das Maß* ν *eindeutig bestimmte integrierbare Funktion* $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathcal{E}$*, so daß*

$$\nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f\, d\mu \quad \text{für alle } \mathrm{A} \in \mathfrak{S}$$

gilt. f *heißt Dichtefunktion des Maßes* ν*.*

Dieser Satz bildet im übrigen die Grundlage der symbolischen Schreibweise $\dfrac{d\nu}{d\mu} = f$, weswegen man die Funktion f auch als *Radon-Nikodym-Ableitung* des Maßes ν bezeichnet. Das wird zusätzlich durch das Auftreten altbekannter Eigenschaften gerechtfertigt; sind etwa τ und ν absolut stetig bezüglich μ, dann gilt μ-fast überall

$$\frac{d(\,\tau + \nu\,)}{d\mu} = \frac{d\tau}{d\mu} + \frac{d\nu}{\mu},$$

ist τ absolut stetig bezüglich ν und ν bezüglich μ, dann gilt μ-fast überall

$$\frac{d\tau}{d\mu} = \frac{d\tau}{d\nu}\,\frac{d\nu}{d\mu}$$

in Analogie zur Kettenregel, ist ν absolut stetig bezüglich μ und f eine μ-integrierbare Funktion, dann gilt

$$\int_{\mathrm{M}} f\, d\nu = \int_{\mathrm{M}} f\, \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu$$

in Analogie zur Substitutionsregel, und sind μ und ν wechselseitig absolut stetig, dann gilt

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^{-1}.$$

Für nicht reflexive Banachräume ist Satz 1.24 im allgemeinen falsch, aber das ist nicht grundsätzlich so. Es gibt nicht reflexive Banachräume, für die Satz 1.24 gilt. Man sagt dann, der betreffende Raum habe die *Radon-Nikodym-Eigenschaft*[46]. Letztere liegt somit für reflexive Banachräume stets automatisch vor.

Wieder betrachten wir zwei Beispiele.

[45] Der Satz wurde zunächst von Johann Radon für den $\mathbb{R}^n$ bewiesen [295] und später von Otton Nikodym auf beliebige Maßräume verallgemeinert [274].

[46] Ausführliche Informationen findet man in [70].

a) Das Lebesgue-Integral

Wählen wir als Menge $\mathrm{M} = \mathbb{R}^n$ und als Maß das Lebesguemaß, dann wird für meßbare Mengen $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^n$ durch (1.1) das *Lebesgue-Integral*

$$\int_{\mathrm{A}} f \, d\lambda = \int_{\mathrm{A}} f(x) \, dx$$

definiert. Das Lebesgue-Integral ist in gewissem Sinn eine Verallgemeinerung des klassischen Riemann-Integrals, denn einerseits sind alle eigentlich Riemann-integrierbaren Funktionen Lebesgue-integrierbar, und in diesen Fällen sind die Werte beider Integrale gleich, andererseits jedoch gibt es sehr viel mehr Lebesgue-integrierbare Funktionen als Riemann-integrierbare. Ein vielzitiertes Beispiel ist die Dirichlet-Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ irrational ist} \\ 0 & \text{falls } x \text{ rational ist.} \end{cases}$$

Für sie gilt $f(x) = 1$ für fast alle x, und f ist Lebesgue-integrierbar. Deshalb gilt für Lebesgue-Integrale bei der Dirichlet-Funktion

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b dx = b - a.$$

Das Riemann-Integral $\int_a^b f(x) \, dx$ existiert jedoch nicht, da sämtliche Untersummen den Wert Null und sämtliche Obersummen den Wert $b - a$ haben und f folglich nicht Riemann-integrierbar ist. Berücksichtigt man uneigentliche Integrale mit, dann gibt es auch den umgekehrten Fall Riemann-integriebarer Funktionen, die nicht Lebesgue-integrierbar sind. Der Grund dafür ist das Auftreten der Norm hinter dem Integralzeichen in (1.2). Ein klassisches Beispiel ist die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Das Riemann-Integral von f über diesem Intervall existiert, und es gilt

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Gleichzeitig ist jedoch

$$\int_{[0,1]} |f| \, d\lambda = \int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \lim_{j \to \infty} \sum_{n=0}^{j} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

$$\geqq \lim_{j \to \infty} \sum_{n=0}^{j} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| \, dx$$

$$\geqq \lim_{j\to\infty} \sum_{n=0}^{j} \left[\frac{1}{(n+1)\,\pi} \left| \int\limits_{n\,\pi}^{(n+1)\,\pi} \sin x \, dx \right| \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{j\to\infty} \sum_{n=0}^{j} \frac{1}{n+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty,$$

und damit ist f auf $[0, \infty]$ nicht Lebesgue-integrierbar.

Für Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ kann man den Unterschied zwischen Lebesgue-Integralen und Riemann-Integralen anschaulich verdeutlichen. Beim Riemann-Integral wird in diesem Fall bekanntlich die x-Achse, also die Definitionsmenge des Integranden, in Abschnitte zerlegt, deren Länge gegen Null und deren Anzahl gegen Unendlich geht. Ist $\mathrm{Z}_n = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit $x_0 = a$ und $x_n = b$, dann erhält man das Riemann-Integral durch Übergang zu immer feineren Zerlegungen,

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,(\,x_{i+1} - x_i\,).$$

Beim Lebesgue-Integral wird dagegen die y-Achse und damit die Wertemenge der zu integrierenden Funktion in Abschnitte zerlegt, deren Länge dann wieder gegen Null und deren Anzahl gegen Unendlich geht. Man interessiert sich also hier für Mengen der Form $f^{-1}([a, b])$ und deren Maße. Ist $\mathrm{Z}_n = (\,y_0, y_1, \ldots, y_n\,)$ eine Zerlegung des Intervalls $[m, M\,]$ in n Teilintervalle mit $y_0 = m$ und $y_n = M$ sowie $m < f(x) < M$, dann bildet man die Teilmengen $\mathrm{D}_i^{(n)} := f^{-1}([\,y_i, y_{i+1}))$ des Intervalls $[a, b]$ für $i = 0, 1, \ldots, n-1$; die Mengen $\mathrm{D}_i^{(n)}$ sind paarweise disjunkt, und ihre Vereinigung ist das Intervall $[a, b]$, aber es sind im allgemeinen keine Intervalle. Sie sind jedoch Lebesgue-meßbar[47]. Das Lebesgue-Integral erhält man nun wieder durch Übergang zu immer feineren Zerlegungen mit Hilfe des Lebesgue-Maßes λ,

$$\int\limits_{[a,b]} f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} y_i \, \lambda(\mathrm{D}_i^{(n)}).$$

Der Beweis der Äquivalenz dieser hier nur angedeuteten Definition des Lebesgue-Integrals zu der weiter oben gegebenen ist allerdings nicht gerade trivial und sehr aufwendig.

b) Das Lebesgue-Stieltjes-Integral

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei wieder eine vektorwertige Funktion; mit dem durch g erzeugten Lebesgue-Stieltjes-Maß λ_g erhalten wir dann in der oben beschriebenen Weise das

[47] Bei diesen Mengen handelt es sich um projektive Mengen, allerdings nicht um beliebige projektive Mengen, da bei weitem nicht alle projektiven Mengen Lebesgue-meßbar sind. Entsprechend sind auch bei weitem nicht alle Funktionen Lebesgue-integrierbar.

Lebesgue-Stieltjes-Integral

$$\int_A f\,dg \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f\,d\lambda_g.$$

Dabei wird $f(x) = 0$ für $x \notin A$ gesetzt. Natürlich sollte die Funktion g gewisse Anforderungen erfüllen. Ist sie differenzierbar, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\,dg = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g'(x)\,dx. \tag{1.3}$$

Das ist die Verallgemeinerung einer wohlbekannten vektoranalytischen Situation, denn wenn A ein Intervall ist, dann ist g eine differenzierbare Kurve im $\mathbb{R}^n$, und (1.3) ist ein Kurvenintegral. Man muß aber gar nicht so viel von g verlangen, um Lebesgue-Stieltjes-Integrale definieren zu können. Ist g fast überall differenzierbar und hat höchstens abzählbar viele Sprungstellen $x_1, x_2, \ldots$, dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\,dg = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g'(x)\,dx + \sum_k f(x_k)\left[\lim_{\varepsilon\searrow 0} g(\,x_k+\varepsilon\,) - \lim_{\varepsilon\searrow 0} g(\,x_k-\varepsilon\,)\right].$$

Wenn die Reihe auf der rechten Seite konvergiert, dann sind damit auch Integrale über nicht stetige Funktionen mit den erwähnten zusätzlichen Eigenschaften definiert.

Da wir oben Funktionen auf beliebigen Maßräumen betrachtet haben, sind Mehrfachintegrale und sogar Funktionalintegrale dabei implizit mitberücksichtigt. Zur expliziten Berechnung sind hierfür jedoch im allgemeinen technische Tricks erforderlich. Einer davon, und zwar der wichtigste für Mehrfachintegrale überhaupt[48], sei zum Abschluß dieses Kapitels angedeutet. Ist $(M_1, \mathfrak{S}_1, \mu_1), (M_2, \mathfrak{S}_2, \mu_2), \ldots, (M_n, \mathfrak{S}_n, \mu_n)$ eine Familie von Maßräumen, dann lassen sich in naheliegender Weise Maße und Integrale auf dem Produkt $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ konstruieren. Dazu definiert man zu einer Menge $A \subseteqq M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ den *j-ten Schnitt* A^j durch

$$A^j = \{\, x \in M_j \mid (x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in A \,\}.$$

Das *Produktmaß* $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ ist dann definiert durch

$$\begin{aligned}\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n(X) &= \int_{M_1} \prod_{j=2}^{n} \mu_j(X^j)\,d\mu_1 = \int_{M_2} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n} \mu_j(X^j)\,d\mu_2 \\ &= \int_{M_i} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \mu_j(X^j)\,d\mu_i = \ldots = \int_{M_n} \prod_{j=1}^{n-1} \mu_j(X^j)\,d\mu_n.\end{aligned}$$

[48]Funktionalintegrale werden im vorliegenden Buch nicht betrachtet.

Darauf aufbauend erhält man dann völlig analog zu oben Integrale auf Produkträumen, die man wieder durch

$$\int\limits_{\mathrm{M}} f \, d\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n := \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathrm{M}} \varphi_n \, d\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n$$

definiert, wenn f eine integrierbare Funktion und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge einfacher Funktionen ist mit $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$. Die Berechnung solcher Integrale wird wesentlich erleichtert durch den

1.25 Satz von Fubini:[49] $(\mathrm{A}, \mathfrak{S}, \mu)$ *und* $(\mathrm{B}, \mathfrak{T}, \nu)$ *seien zwei Maßräume und* $f : \mathrm{A}\times\mathrm{B} \longrightarrow \mathcal{E}$ *eine* $\mu \otimes \nu$*-meßbare Funktion. Dann gelten:*

(i) Für alle $x \in \mathrm{A}$ *ist* $f(x, \ )$ *eine* ν*-integrierbare Funktion auf* B,

(ii) für alle $y \in \mathrm{B}$ *ist* $f(\ , y)$ *eine* μ*-integrierbare Funktion auf* A,

(iii) $\displaystyle\int\limits_{\mathrm{A}\times\mathrm{B}} f \, d\mu \otimes \nu = \int\limits_{\mathrm{B}} \int\limits_{\mathrm{A}} f(x, y) \, d\mu(x) \, d\mu(y) = \int\limits_{\mathrm{A}} \int\limits_{\mathrm{B}} f(x, y) \, d\mu(y) \, d\mu(x).$

Der Satz von Fubini bildet die Grundlage für alle möglichen mehrfachen Integrale und deren Auswertung, da er es erlaubt, die Reihenfolge der einzelnen Integrationen nach praktischen Belangen auszuwählen.

Damit beschließen wir unseren kurzen Überblick über die wichtigsten maß- und integrationstheoretischen Sachverhalte und gleichzeitig denjenigen über die mathematischen Hilfsmittel, die wir für das vorliegende Buch voraussetzen wollen. Im weiteren Verlauf werden wir die diskutierten Resultate jeweils detailliert beweisen, um damit der eingeschlagenen Intention, die Mathematik nicht primär als Werkzeug, sondern als Selbstzweck zu betrachten, konsequent gerecht zu werden.

[49]Benannt nach Guido Fubini, der als erster einen Satz dieser Form publizierte [107].

Kapitel 2

Vektorräume

Im vorliegenden Buch wird die Mathematik für eine Formulierung der Quantenmechanik beschrieben, bei welcher der Zustandsbegriff im Mittelpunkt steht, wobei quantenmechanische Zustände durch Wellenfunktionen beschrieben werden. Folglich beginnen wir unsere Betrachtungen mit den mathematischen Grundlagen der Räume, deren Elemente solche Wellenfunktionen sind.

2.1 Einige Grundbegriffe aus der linearen Algebra

Die Quantenmechanik begann in ihrer neueren Fassung als eine rein algebraische Theorie. Das blieb zwar nicht sehr lange der Fall, da der Matrizenmechanik von Heisenberg, Born und Jordan schnell die Wellenmechanik Schrödingers an die Seite gestellt wurde. Die Bedeutung, welche der Algebra als Grundlage der Quantenmechanik zukommt, wurde dadurch jedoch nur in ihrer Ausschließlichkeit eingeschränkt, was nicht erst mit Beginn des funktionalanalytischen Zeitalters klar wurde. Der folgende kurze Überblick der wichtigsten algebraischen Grundbegriffe dürfte damit durchaus angemessen sein.

Unter dem Begriff der Algebra werden gleichermaßen zwei unterschiedliche Dinge verstanden, einerseits die *elementare Algebra*, also das Rechnen mit Gleichungen und Variablen, andererseits die *abstrakte Algebra*. Hierbei handelt es sich um die eigentlich oben erwähnte mathematische Grundlagendisziplin; sie beschäftigt sich mit Mengen, die eine sogenannte *algebraische Struktur* aufweisen, das heißt auf denen gewisse innere oder äußere Verknüpfungen definiert sind. Je nachdem, welche Eigenschaften diese Verknüpfungen aufweisen, führt das auf die Betrachtung beispielsweise von Gruppen, Ringen, Körpern oder Moduln

Für die hier verfolgten Zwecke ist es nicht erforderlich, die Algebra in dieser Allgemeinheit zu betrachten; Gegenstand wird stattdessen derjenige Spezialfall sein, bei dem es um Räume mit linearer Struktur geht, sogenannten *Vektorräumen*. Die entsprechende Teildisziplin nennt man *lineare Algerbra*. Sie ist insbesondere auch eine wesentliche Grundlage der Funktionalanalysis und damit der Quantenmechanik in der in diesem Buch präsentierten Formulierung.

2.1.1 Algebraische Strukturen

2.1.1.1 Gruppen, Ringe, Körper

Wir beginnen mit den wichtigsten algebraischen Strukturen, die der linearen Algebra als Grundlagen dienen und betrachten zunächst Mengen mit einer Verknüpfung.

2.1 Definition: M sei eine Menge und $\circ$ eine innere Verknüpfung auf M, also eine Abbildung $\circ : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$. Gilt für diese Verknüpfung das Assoziativgesetz, dann heißt $(\mathrm{M}, \circ)$ *Halbgruppe*. $(\mathrm{M}, \circ)$ heißt *Gruppe*[1], wenn folgendes gilt:

(G1) $\forall\, a, b, c \in \mathrm{M} \quad (\, a \circ b\,) \circ c = a \circ (\, b \circ c\,)$ (Assoziativgesetz),

(G2) $\exists\, e \in \mathrm{M}\ \forall\, a \in \mathrm{M} \quad a \circ e = e \circ a = a$ (Existenz eines neutralen Elementes)

(G3) $\forall\, a \in \mathrm{M}\ \exists\, b \in \mathrm{M} \quad a \circ b = b \circ a = e$ (Existenz inverser Elemente).

Gilt auch noch

(G4) $\forall a, b \in \mathrm{M} \quad a \circ b = b \circ a$ (Kommutativgesetz),

dann nennt man $(\mathrm{M}, \circ)$ *abelsche* oder *kommutative Gruppe*.

Beispiele für Gruppen sind $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit $+$, aber auch der Zauberwürfel, wenn man Kombinationen von Drehungen als Gruppenelemente und deren Hintereinanderausführen als Verknüpfung betrachtet. Hierbei handelt es sich bei allen Beispielen mit Ausnahme des letzten um kommutative Gruppen.

Als nächstes betrachten wir Mengen, auf denen zwei innere Verknüpfungen definiert sind. Man bezeichnet sie üblicherweise mit $+$ und $\cdot$, obwohl damit nicht zwangsläufig irgendeine Addition und Multiplikation gemeint sein muß.

2.2 Definition: Ist M eine Menge mit zwei inneren Verknüpfungen $+ : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ und $\cdot : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$, dann heißt $(\mathrm{M}, +, \cdot)$ *Ring*, wenn

(R1) $(\mathrm{M}, +)$ eine kommutative Gruppe ist,

(R2) $(\mathrm{M}, \cdot)$ eine Halbgruppe ist,

(R3) die distributiven Gesetze gelten:
$\forall\, a, b, c \in \mathrm{M} \quad a \cdot (\, b + c\,) = a \cdot b + a \cdot c \ \wedge\ (\, a + b\,) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$

Das neutrale Element bezüglich $+$ heißt *Nullelement* 0. Existiert auch ein neutrales Element bezüglich $\cdot$, das dann *Einselement* 1 heißt, gilt also $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ für alle $a \in \mathrm{M}$, dann nennt man $(\mathrm{M}, +, \cdot)$ *Ring mit* 1. Ein *kommutativer Ring* ist ein Ring, bei dem die Multiplikation kommutativ ist. Das zu a inverse Element bezüglich $+$ wird im allgemeinen

[1] Obwohl die Gruppentheorie als Spezialgebiert der Algebra von herausragender Bedeutung für die theoretische Physik ist, werden wir darauf verzichten, sie hier ausführlicher zu diskutieren, da das ein Faß ohne Boden wäre und den vorgegebenen Rahmen bei weitem sprengen würde. Für Einzelheiten sei auf entsprechende Spezialliteratur verwiesen, etwa [95] und [120].

mit $-a$ bezeichnet. Gibt es Elemente $a, b \neq 0$ mit $a \cdot b = 0$, so heißen a und b *Nullteiler*. Ein Ring, der keine Nullteiler hat, heißt *nullteilerfrei*; einen kommutativen, nullteilerfreien Ring mit 1 $(0 \neq 1)$ nennt man *Integritätsring*.

Beispiele für Ringe sind $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit $+$ und $\cdot$, ebenso die Menge aller Polynome in n Variablen; das sind alles Integritätsringe. Die Menge $\mathbb{C}^{n \times n}$ aller $n \times n$-Matrizen bildet einen Ring, der weder kommutativ noch nullteilerfrei ist.

Fordern wir für beide innere Verknüpfungen Gruppeneigenschaften, landen wir beim Begriff des Körpers.

2.3 Definition: $(\mathsf{M}, +, \cdot)$ heißt *Körper*, wenn

(K1) $(\mathsf{M}, +, \cdot)$ ein Ring und

(K2) $(\mathsf{M} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe ist.

Ist die Multiplikation nicht kommutativ, so heißt $(\mathsf{M}, +, \cdot)$ *Schiefkörper*.

Beispiele für Körper sind $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit $+$ und $\cdot$; die Menge $\mathbb{H}$ der Quaternionen ist ein Beispiel für einen Schiefkörper.

2.1.1.2 Moduln und Vektorräume

Der Schritt von der allgemeinen zur linearen Algebra wird durch die Einführung von äußeren Verknüpfungen eingeleitet. Sind A und M Mengen, dann ist eine äußere Verknüpfung auf M bezüglich A eine Abbildung $\diamond : \mathsf{A} \times \mathsf{M} \longrightarrow \mathsf{M}$. Es gilt also $\alpha \diamond a \in \mathsf{M}$ für alle $\alpha \in \mathsf{A}$ und alle $a \in \mathsf{M}$. Die Menge A nennt man Operatorenbereich der äußeren Verknüpfung. Häufig sind äußere Verknüpfungen multiplikativer Natur; wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, verwendet man dann auch dafür das Symbol $\cdot$.

Damit kommen wir zu den zentralen Begriffen der linearen Algebra:

2.4 Definition: $(\mathsf{M}, +, \mathsf{R}, \cdot)$ heißt R-*Modul*, wenn $(\mathsf{M}, +)$ eine kommutative Gruppe, $(\mathsf{R}, +, \cdot)$ ein Ring mit 1 und $\cdot$ eine äußere Verknüpfung auf M bezüglich R ist und zusätzlich für alle $a, b \in \mathsf{M}$ und $\alpha, \beta \in \mathsf{R}$ folgendes gilt:

(i) $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$,

(ii) $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$,

(iii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$,

(iv) $1 \cdot a = a$.

Ein Modul $(\mathcal{V}, +, \mathbb{K}, \cdot)$, dessen Operatorenbereich $\mathbb{K}$ ein Körper ist, heißt *Vektorraum* über dem Körper $\mathbb{K}$ (kurz: $\mathbb{K}$-Vektorraum)[2].

Ist auf einem R-Modul $(\mathsf{A}, +, \mathsf{R}, \cdot)$ zusätzlich eine Multiplikation $* : \mathsf{A} \times \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{A}$ definiert, sodaß für alle $a, b, c \in \mathsf{A}$ und alle $\alpha \in \mathsf{R}$

[2] Alternativ ist auch die Bezeichnung *linearer Raum* üblich. Der Begriff wurde ursprünglich von Giuseppe Peano eingeführt [282].

(i) $(a+b)*c = a*c + b*c$,

(ii) $a*(b+c) = a*b + a*c$,

(iii) $\alpha\cdot(a*b) = (\alpha\cdot a)*b = a*(\alpha\cdot b)$

gilt, dann heißt $(\mathrm{A}, +, *, \mathrm{R}, \cdot)$ *Algebra über* R (kurz: R-Algebra). Ist $*$ kommutativ, dann heißt $(\mathrm{A}, +, *, \mathrm{R}, \cdot)$ *kommutative Algebra* über M.

Ist der Kontext jeweils klar, dann spricht man kurz von einem Modul R, einem Vektorraum $\mathcal{V}$ oder einer Algebra A.

Die Elemente eines Vektorraums nennt man auch *Vektoren*, die Elemente des Operatorenbereichs gelegentlich *Skalare*. Jeder Ring mit 1 und erst recht jeder Körper ist ein Modul über sich selbst, jeder Körper ist ein Vektorraum über sich selbst. Bei einer Körpererweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{K}$, also zwei Körpern $\mathbb{L}\supset\mathbb{K}$, bei welchen die Addition und die Multiplikation in $\mathbb{K}$ durch Einschränkung der Addition und der Multiplikation in $\mathbb{L}$ entstehen, ist der Erweiterungskörper $\mathbb{L}$ gleichzeitig ein Vektorraum über dem Teilkörper $\mathbb{K}$. Beispiele für $\mathbb{R}$- beziehungsweise $\mathbb{C}$-Vektorräume sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$, aber auch die Menge $\mathscr{F}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ aller komplexen vektorwertigen Funktionen oder die Funktionenräume $C^n(\mathbb{C}), C^\infty(\mathbb{C}), \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ und $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$, mit denen wir uns weiter unten ausführlich beschäftigen werden.

Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{U}$ eines Vektorraums $\mathcal{V}$ heißt *Untervektorraum* oder kurz *Unterraum* von $\mathcal{V}$, wenn $\mathcal{U}$ bezüglich derselben inneren und äußeren Verknüpfung ein Vektorraum ist. $\{0\}$ und $\mathcal{V}$ sind natürlich Unterräume von $\mathcal{V}$; weniger langweilige Beispiele sind etwa Geraden oder Ebenen im $\mathbb{R}^3$ durch den Ursprung oder die Menge der stetigen reellen Funktionen als Teilmenge der Menge aller reellen Funktionen. Bei der Überprüfung, ob eine Teilmenge eines Vektorraums tatsächlich ein Unterraum ist, hilft das folgene *Kriterium für Unterräume:*

2.5 Satz: *Ist $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathcal{V}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann ist $\mathcal{U}\subset\mathcal{V}$ genau dann ein Unterraum von $\mathcal{V}$, wenn $a+b\in\mathcal{U}$ und $\alpha\cdot a\in\mathcal{U}$ gilt für alle $\alpha\in\mathbb{K}$ und alle $a, b\in\mathcal{U}$, wenn also die innere und die äußere Verknüpfung abgeschlossen in $\mathcal{U}$ sind.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Klar, denn $\mathcal{U}$ ist ein Vektorraum.
„$\Longleftarrow$“: Zunächst hat man zu zeigen, daß $(\mathcal{U}, +)$ eine kommutative Gruppe ist. (G1) folgt sofort aus der Abgeschlossenheit der inneren Verknüpfung. Aus der Abgeschlossenheit der äußeren Verknüpfung folgt $-a\in\mathcal{U}$ für alle $a\in U$ und damit $a-a=0\in\mathcal{U}$, also auch (G2) und (G3). (G4) schließlich gilt in $\mathcal{V}$, also auch in $\mathcal{U}$. Es fehlen noch die Bedingungen (i) bis (iv); diese gelten in $\mathcal{V}$, also auch in $\mathcal{U}$. □

Aus dem Unterraumkriterium folgt unmittelbar, daß der Durchschnitt beliebig vieler Unterräume eines Vektorraums selbst wieder einen Unterraum darstellt. Ist T eine Teilmenge eines Vektorraums $\mathcal{V}$, dann nennt man den Durchschnitt aller T enthaltenden Unterräume von $\mathcal{V}$ die *lineare Hülle* von T oder den *von* T *erzeugten Unterraum von V* und schreibt dafür $\operatorname{span}\mathrm{T}$. Die lineare Hülle von T ist natürlich auch ein Unterraum von $\mathcal{V}$, nämlich der kleinste, der T enthält, und außerdem gilt $\operatorname{span}\mathcal{V}=\mathcal{V}$. Gilt für zwei Unterräume $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ von $\mathcal{V}$ gleichzeitig $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2=\mathcal{V}$ und $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2=\{0\}$, dann heißen $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ *algebraisch* *komplementär*; $\mathcal{U}_1$ ist dann das *algebraische Komplement* von $\mathcal{U}_2$ und umgekehrt. Man kann natürlich auch allgemeinere Summen von Unterräumen eines Vektorraums betrachten. Dazu sei Γ eine endliche oder unendliche Kardinalzahl und $(\mathcal{U}_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ eine Familie von Unterräumen des Vektorraums $\mathcal{V}$, dann ist

$$\sum_{\gamma<\Gamma}\mathcal{U}_\gamma := \left\{ \sum_{\gamma<\Gamma} x_\gamma \;\middle|\; x_\gamma \in \mathcal{V},\ x_\gamma \neq 0 \text{ für höchstens endliche viele } \gamma < \Gamma \right\}$$

ebenfalls ein Unterraum von $\mathcal{V}$, und es gilt $\mathcal{U}_\lambda \subseteqq \sum_{\gamma<\Gamma}\mathcal{U}_\gamma$ für alle $\lambda < \Gamma$. Dabei ist die Darstellung $x = \sum_{j=0}^{n} x_n$ für jedes $x \in \mathcal{V}$ genau dann eindeutig, wenn $\mathcal{U}_\gamma \cap \mathcal{U}_\lambda = \{0\}$ für alle $\gamma, \lambda < \Gamma$ mit $\gamma \neq \lambda$.

Ist $\mathcal{U}$ ein Unterraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums $\mathcal{V}$, dann kann man durch

$$x_1 \sim x_2 :\Longleftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathcal{U}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{V}$ einführen, deren Äquivalenzklassen

$$[x]_\sim = x + \mathcal{U} = \{\, x + u \mid u \in \mathcal{U} \,\}$$

anschaulich als die zu $\mathcal{U}$ parallelen affinen Unterräume in $\mathcal{V}$ deutbar sind. Die Menge aller Äquivalenzklassen einer solchen Äquivalenzrelation heißt *Quotientenraum* von $\mathcal{V}$ nach $\mathcal{U}$; man schreibt dafür[3]

$$\mathcal{V}/\mathcal{U} = \{\, [x]_\sim \mid x \in \mathcal{V} \,\} = \{\, x + \mathcal{U} \mid x \in \mathcal{V} \,\}.$$

Definiert man Addition und Multiplikation repräsentantenweise, so wird $\mathcal{V}/\mathcal{U}$ selbst zu einem Vektorraum.

Im folgenden sei wieder Γ eine endliche oder unendliche Kardinalzahl. Ist $(\mathcal{V}_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ eine Familie von $\mathbb{K}$-Vektorräumen. dann kann man auf deren kartesischem Produkt

$$\mathcal{V} := \prod_{\gamma<\Gamma}\mathcal{V}_\gamma = \{\, (x_\gamma)_{\gamma<\Gamma} \mid x_\gamma \in \mathcal{V}_\gamma,\ \gamma < \Gamma \,\}$$

über $(x_\gamma)_{\gamma<\gamma} + (y_\gamma)_{\gamma<\Gamma} := (\, x_\gamma + y_\gamma \,)_{\gamma<\Gamma}$ und $\alpha\,(x_\gamma)_{\gamma<\Gamma} := (\alpha\, x_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ für $x_\gamma, y_\gamma \in \mathcal{V}_\gamma$, $\gamma < \Gamma$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ eine Addition und eine äußere Multiplikation definieren; $\mathcal{V}$ wird dadurch ebenfalls zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum, den man das *direkte Produkt* von $(\mathcal{V}_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ nennt. Der lineare Unterraum

$$\mathcal{U} := \bigoplus_{\gamma<\Gamma}\mathcal{V}_\gamma := \left\{ (x_\gamma)_{\gamma<\Gamma} \in \prod_{\gamma<\Gamma}\mathcal{V}_\gamma \;\middle|\; x_\gamma \neq 0 \text{ für höchstens endliche viele } \gamma < \Gamma \right\}$$

von $\mathcal{V}$ heißt *direkte Summe* von $(\mathcal{V}_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$. Mit den injektiven Abbildungen $j_\gamma : \mathcal{V}_\gamma \longrightarrow \mathcal{U}$, definiert durch $j_\gamma(x_\gamma) := (\delta_{\gamma\lambda}\, x_\gamma)_{\lambda<\Gamma}$ für $\gamma < \Gamma$, erhält man aus den $\mathcal{V}_\gamma$ lineare Unterräume

[3]Trotz leichter Verwechslungsgefahr, siehe oben

$j_\gamma(\mathcal{V}_\gamma)$ von $\mathcal{U}$. Damit wird die direkte Summe von $(\mathcal{V}_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ zur linearen Hülle von $\bigcup\limits_{\gamma<\Gamma} j_\gamma(\mathcal{V}_\lambda)$, und folglich ist jedes $x \in \bigoplus\limits_{\gamma<\Gamma} \mathcal{V}_\gamma$ in eindeutiger Weise als endliche Summe $x = \sum\limits_{q=1}^{n} j_{\gamma_q}(x_{\gamma_q})$ mit $x_{\gamma_q} \in \mathcal{V}_{\gamma_q}$ darstellbar. Es gilt somit $\bigoplus\limits_{\gamma<\Gamma} \mathcal{V}_\gamma = \sum\limits_{\gamma<\Gamma} j_\gamma(\mathcal{V}_\gamma)$. Ist andererseits $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_n)$ eine endliche Familie von Unterräumen des Vektorraums $\mathcal{V}$, dann gibt es eine kanonische Abbildung $\Phi : \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathcal{V}_i \longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \mathcal{V}_i$ definiert durch

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Diese ist nach Konstruktion linear und außerdem genau dann bijektiv, also ein Isomorphismus, wenn $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{0\}$ für $i \neq j$. In diesem Fall sind die direkte Summe und die gewöhnliche Summe der $\mathcal{V}_i$ also isomorph.

2.1.2 Linearkombinationen und Erzeugendensysteme

$\mathcal{V}$ sei wieder ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$; sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ endlich viele Elemente von $\mathcal{V}$, so heißen Ausdrücke der Form $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, $\alpha_j \in \mathbb{K}$, *Linearkombinationen* von $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Man sieht sofort, daß die lineare Hülle einer Teilmenge T von $\mathcal{V}$ genau die Menge aller aus Elementen von T gebildeten Linearkombinationen ist, oder anders ausgedrückt, span T besteht aus allen Elementen von $\mathcal{V}$, die sich in der Form $\sum\limits_{x\in \mathrm{T}} \alpha_x x$ darstellen lassen, wobei jeweils höchstens endlich viele der $\alpha_x \in \mathbb{K}$ von 0 verschieden sind.

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{V}$, $n \in \mathbb{N}$, heißen *linear unabhängig*, wenn aus $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$ folgt, daß sämtliche $\alpha_j = 0$ sind, das Nullelement also nur durch eine triviale Linearkombination darstellbar ist, andernfalls heißen sie *linear abhängig*. Unendlich viele x_γ, $\gamma < \Gamma$, nennt man linear unabhängig, wenn je endlich viele von ihnen linear unabhängig sind, andernfalls linear abhängig. Linear unabhängige Teilmengen von Vektorräumen sind naturgemäß besonders wichtig; das gibt Anlaß zu folgender

2.6 Definition: (i) Eine Teilmenge T eines Vektorraums $\mathcal{V}$ heißt *Erzeugendensystem* von $\mathcal{V}$, wenn span (T) $= \mathcal{V}$ gilt.
(ii) Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $\mathcal{V}$ heißt *Hamel-Basis* von $\mathcal{V}$.

Statt Hamel-Basis sagt man auch algebraische Basis oder kurz Basis. Eine Basis ist gleichzeitig eine größte mögliche linear unabhängige Teilmenge von $\mathcal{V}$. Jedes Element von $\mathcal{V}$ kann in eindeutiger Weise als Linearkombination aus endlich vielen Elementen einer Basis von $\mathcal{V}$ dargestellt werden. Darüberhinaus ist die Größe der Basen eines Vektorraums eine Invariante, wie folgendes Resultat zeigt [229].

2.7 Satz: *Je zwei Basen eines Vektorraums haben dieselbe Mächtigkeit.*

Beweis: $\mathcal{V}$ sei ein Vektorraum und B_1 und B_2 zwei Basen mit $|\mathrm{B}_1| =: \kappa_1$ und $|\mathrm{B}_2| =: \kappa_2$. Ist eine der beiden Basen endlich, dann auch die andere, und der Satz ist trivial. Deshalb seien beide Basen unendlich, also $\kappa_1, \kappa_2 \geqq \aleph_0$. Jedes Element x von B_1 ist eindeutig als Linearkombination $x = \sum_{j=1}^{n_x} \alpha_{x,j}\, y_{x,j}$ aus endlich vielen Elementen von B_2 darstellbar. Dabei ist die Menge $\mathrm{A} := \{\, y_{x,j} \mid j = 1, 2, \ldots, n_x,\ x \in \mathrm{B}_1\}$ der in allen diesen Linearkombinationen vorkommenden Elemente von B_2 bereits identisch mit B_2, denn andernfalls wäre ein nicht in A enthaltenes solches Element y als endliche Linearkombination aus Elementen von B_1 und folglich auch als endliche Linearkombination aus Elementen von $\mathrm{B}_2 \setminus \{y\}$ darstellbar; dann wäre B_2 jedoch linear abhängig. B_2 ist daher als Vereinigungsmenge aus κ_1 vielen endlichen Mengen darstellbar; es folgt $\kappa_2 \leqq \aleph_0\, \kappa_1$ und somit auch $\kappa_2 \leqq \kappa_1$. Vertauscht man die beiden Basen, findet man analog $\kappa_1 \leqq \kappa_2$, insgesamt also $\kappa_1 = \kappa_2$. □

Die Mächtigkeit der Basen eines Vektorraums $\mathcal{V}$ nennt man die *Dimension* von $\mathcal{V}$; man schreibt dafür $\dim \mathcal{V}$. Ist $\mathcal{U}$ ein Unterraum von $\mathcal{U}$, dann ist die *Codimension* von $\mathcal{U}$ definiert durch $\operatorname{codim} \mathcal{U} := \dim \mathcal{V}/\mathcal{U}$. Das folgende Resultat liefert einen Zusammenhang zwischen der Dimension eines $\mathbb{K}$-Vektorraums $\mathcal{V}$ und den Mächtigkeiten von $\mathbb{K}$ und $\mathcal{V}$.

2.8 Lemma: *$\mathcal{V}$ sei ein Vektorraum über einem unendlichen Körper $\mathbb{K}$ und* B *eine Hamel-Basis von $\mathcal{V}$. Dann gilt $|\mathcal{V}| = |\mathbb{K}|\,|\mathrm{B}| = \max\{|\mathbb{K}|, |\mathrm{B}|\}$.*

Beweis: Da jedes Element von $\mathcal{V}$ in eindeutiger Weise als endliche Linearkombination von Elementen aus B darstellbar ist, gilt $|\mathcal{V}| = |[\mathbb{K}]^{<\omega} \times [\mathrm{B}]^{<\omega}|$. Weil $\mathbb{K}$ unendlich ist, folgt daraus unmittelbar die Behauptung. □

Es gibt Vektorräume mit endlichen und solche mit unendlichen Basen und entsprechend endlich- und unendlichdimensionale Vektorräume. Beispiele für endlichdimensionale Vektorräume sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ für $n \in \mathbb{N}$, Beispiele für unendlichdimensionale Vektorräume sind die ℓ^p- und $\mathscr{L}^p$-Räume mit $1 \leqq p \leqq \infty$, auf die wir zurückkommen werden. Ist $\mathbb{L}$ ein Erweiterungskörper eines Körpers $\mathbb{K}$, so heißt die Dimension von $\mathbb{L}$ als Vektorraum über $\mathbb{K}$ *Körpergrad* von $\mathbb{L}$ über $\mathbb{K}$; man schreibt dafür $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$. Der Körpergrad einer Körpererweiterung kann ebenfalls endlich oder unendlich sein. So ist etwa einerseits $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) : \mathbb{Q}] = 4$ und $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$, andererseits aber $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$, das heißt, $\mathbb{R}$ ist als $\mathbb{Q}$-Vektorraum unendlichdimensional[4]. Allgemein gilt für jede echte Körpererweiterung $\mathbb{R}/\mathbb{K}$ stets $[\mathbb{R} : \mathbb{K}] = \infty$, eine Aussage, die wir weiter unten präzisieren werden. Körperwerweiterungen stellen einen zentralen Gegenstand der Algebra dar[5]. Von fundamentaler Bedeutung ist nun der folgende

[4]Dieses Beispiel wurde von Georg Hamel entdeckt [138], was später den Hamelbasen ihren Namen einbrachte.

[5]Das fängt mit der für beliebige Körper $\mathbb{M} \supset \mathbb{L} \supset \mathbb{K}$ gültigen Relation $[\mathbb{M} : \mathbb{K}] = [\mathbb{M} : \mathbb{L}] \cdot [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ an. Diese führt einerseits über die Betrachtung algebraischer Körperweiterungen auf einen zentralen Baustein der algebraischen Zahlentheorie mit Highlights wie der Galoistheorie oder dem Satz von Kronecker-Weber, wonach jeder Zahlkörper mit abelscher Galoisgruppe Teilkörper eines Kreisteilungskörpers ist, und andererseits auf die Theorie der unendlichen Körpererweiterungen, bei der insbesondere die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ und deren Teilkörper im Mittelpunkt stehen [205].

2.9 Satz: *Jeder Vektorraum besitzt eine Basis*[6].

Beweis: Sei $\mathfrak{E}$ die Menge aller linear unabhängiger Teilmengen des Vektorraumes $\mathcal{V}$ über dem Körper $\mathbb{K}$, eine Menge, die durch die Relation $\subset$ teilgeordnet wird. Jede linear geordnete Teilmenge $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{E}$ besitzt mit der Vereinigung über alle Elemente von $\mathfrak{E}$ eine obere Schranke in $\mathfrak{E}$, und da die $\mathfrak{L}$'s eine aufsteigende Familie von Inklusionen darstellen, ist diese Vereinigung selbst auch linear unabhängig. Nach dem Zornschen Lemma[7] gibt es dann in $\mathfrak{E}$ ein maximales Element, also eine maximale linear unabhängige Teilmenge $\mathrm{B} \subset \mathcal{V}$. Es gilt $\mathrm{span}(\mathrm{B}) = \mathcal{V}$, denn gäbe es ein $x \in \mathcal{V}$, das nicht in $\mathrm{span}(\mathrm{B})$ enthalten ist, dann würde

$$\alpha\, x + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, y_j = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha, \alpha_j \in \mathbb{K} \quad \text{und} \quad y_j \in \mathrm{B}$$

auf $\alpha\, x \in \mathrm{span}(\mathrm{B})$ führen, also auf $\alpha = 0$ wegen $x \notin \mathrm{span}(\mathrm{B})$, und damit wäre auch $\mathrm{B} \cup \{x\}$ linear unabhängig – ein Widerspruch. Daher ist B eine Basis des Vektorraums $\mathcal{V}$. $\square$

Die Tatsache, daß bei obigem Beweis das Zornsche Lemma zum Einsatz kommt, zeigt, worin die Aussage von Satz 2.9 genau betrachtet besteht: Die Existenz einer Basis für jeden Vektorraum folgt aus dem Auswahlaxiom[8]. Blass konnte 1984 beweisen, daß auch umgekehrt aus der Existenz einer Basis für jeden Vektorraum das Auswahlaxiom folgt [36]. Das hat die bemerkenswerte Konsequenz der Äquivalenz von Satz 2.9 und dem Auswahlaxiom[9].

Eine wichtige Erweiterung zum Satz 2.9 ist die folgende Verallgemeinerung eines populären Resultats der elementaren linearen Algebra.

2.10 Basisergänzungssatz: *Zu jeder linear unabhängigen Teilmenge* X *eines Vektorraums* $\mathcal{V}$ *gibt es eine Hamel-Basis von* $\mathcal{V}$*, welche* X *enthält.*

---

[6] Für Moduln ist das nicht der Fall. Ein Modul, für den eine Basis existiert, heißt *freier Modul*.

[7] Das *Zornsche Lemma* besagt folgendes: *Jede halbgeordnete Menge, in der jede linear geordnete Teilmenge eine obere Schranke hat, besitzt mindestens ein maximales Element*. Es ist benannt nach M. Zorn, der dieses Resultat mit Blick auf transzendente Körpererweiterungen veröffentlichte [400]. Vergleichbare Maximumsprinzpien wurden bereits zuvor publiziert, beispielsweise von Haussdorf, Janiszewski, Brouwer und Kuratowski. Einen Überblick hierüber mit weiteren Literaturangaben liefert [47]. Das Zornsche Lemma, das Auswahlaxiom, der Wohlordnungssatz und der Satz von Tychonoff sind jeweils paarweise äquivalent; dadurch sind diese vier Theoreme weit über ihre universelle technische Verwendbarkeit von fundamentaler Bedeutung. Vergleiche Anmerkung 9 auf S. 15.

[8] Satz 2.9 befindet sich damit in guter Gesellschaft, denn es gibt jede Menge weitere höchst prominente Theoreme der Mathematik, bei denen man zum Beweis ebenfalls auf das Auswahlaxiom angewiesen ist. Der Satz von Tychonoff wurde in diesem Zusammenhang bereits erwähnt, der Satz von Bolzano-Weierstraß, der Existenzsatz von Peano für gewöhnliche Differentialgleichungen und der Satz von Hahn Banach (siehe Abschnitt 2.2.3.7) sind weitere spektakuläre Beispiele unter vielen anderen. Das mag als Argument gegen jedwede konstruktrivistischen Denkverbote in der Mathematik genügen; eine Diskussion dieser Thematik ist zwar überaus spannend, unterbleibt aber im vorliegenden Buch.

[9] Die Äquivalenz gilt dabei für die Aussage, daß Vektorräume über *beliebigen* Körpern eine Hamel-Basis haben. Die Existenz von Basen bei Vektorräumen über den reellen oder den komplexen Zahlen ist eine sehr viel schwächere Eigenschaft; ob auch hieraus schon das Auswahlaxiom folgt, ist noch unbekannt.

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen von $\mathcal{V}$, welche X entalten. $\mathfrak{A}$ wird durch $\subseteqq$ teilgeordnet, und analog zum Beweis von Satz 2.9 folgt daraus mit dem Zornschen Lemma die Existenz eines maximalen Elements B, das gleichzeitig eine Basis von $\mathcal{V}$ ist. Da $B \in \mathfrak{A}$, gilt $X \subset B$. $\square$

Bisher haben wir bei der Betrachtung von Vektorräumen nur von rein algebraischen Begriffen Gebrauch gemacht. Um das Gebiet zusätzlich auch für die Analysis zu erschließen, was insbesondere die Betrachtung von Grenzwerten beinhaltet und natürlich den wesentlichen Bestandteil des vorliegenden Buchs darstellt, sind zusätzliche Strukturen erforderlich, denen wir uns nun zuwenden.

2.2 Topologische Vektorräume

2.2.1 Einleitende Betrachtungen

Auf dem allgemeinsten Weg erreicht man die soeben beschriebene Erweiterung des Vektorraumbegriffs, indem man Vektorräumen eine mit ihren algebraischen Eigenschaften verträgliche topologische Struktur aufprägt. Eine solche Verträglichkeit liegt dann vor, wenn die in Vektorräumen definierten algebraischen Operationen topologische Eigenschaften unangetastet lassen. Das leistet folgende

2.11 Definition: Ein Vektorraum $\mathcal{V}$ über dem Körper $\mathbb{K}$, auf dem eine Topologie $\mathfrak{V}$ gegeben ist, heißt *topologischer Vektorraum*, wenn die Addition $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ und die skalare Multiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ bezüglich $\mathfrak{V}$ stetig sind.

$\mathfrak{V}$ nennt man in diesem Fall *Vektorraumtopologie*. Sämtliche topologische Begriffe übertragen sich entsprechend. Die Vektorraumstruktur erlaubt zusätzliche Verfeinerungen. Beispielsweise gibt es nun ein ausgezeichnetes Nullelement sowie Skalare, um mit diesen und den Vektoren zu rechnen. Davon macht man bei folgenden Begriffen Gebrauch: Eine Umgebung von $0 \in V$ heißt *Nullumgebung*, eine Menge der Form $S = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K} \wedge |\lambda| \leqq 1 \wedge x \in S\}$ heißt *kreisförmig*. Insbesondere lassen sich nun Eigenschaften wie Stetigkeit und Beschränktheit auch auf lineare Abbildungen anwenden, wovon wir demnächst ausgiebig Gebrauch machen werden.

Ein einfaches Kriterium für die Eigenschaft eines Vektorraums mit Topologie, ein topologischer Vektorraum zu sein, ist unmittelbar ersichtlich.

2.12 Lemma: $(\mathcal{V}, \mathfrak{V}, \mathbb{K})$ *ist genau dann ein topologischer Vektorraum, wenn folgende Eigenschaften vorliegen:*

(1) Für alle $x, y \in \mathcal{V}$ und jeder Umgebung U von $x + y$ gibt es Umgebungen U_x von x und U_y von y, so daß $U_x \cup U_y \subset U$ gilt.

(2) Für alle $\delta_0 \in \mathbb{K}$, alle $x_0 \in \mathcal{V}$ und jede Umgebung U von $\delta_0 x_0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung U_0 von x_0, so daß $\{\, \delta y \mid \delta \in \mathbb{K},\, |\delta - \delta_0| < \varepsilon,\, y \in U_0 \,\} \subset U$ gilt.

Damit enthält in einem topologischen Vektorraum jede Nullumgebung eine kreisförmige Nullumgebung, und zu jedem Punkt gibt es eine Umgebungsbasis aus kreisförmigen Mengen.

Mit Blick auf spätere Anwendungen beweisen wir nun eine bedeutende Aussage über den Raum $C(\mathcal{V})$ der stetigen skalaren Funktionen auf einem kompakten topologischen Raum $\mathcal{V}$. Definiert man dort eine Metrik d durch

$$d(f,g) := \sup_{x \in \mathcal{V}} |\, f(x) - g(x)\,|$$

für $f, g \in C(\mathcal{V})$, dann wird $C(\mathcal{V})$ ein vollständiger metrischer Raum. Wir benötigen zunächst einen weiteren Stetigkeits-Begriff.

2.13 Definition: Eine Teilmenge A von $C(\mathcal{V})$ heißt *gleichgradig stetig*, wenn es zu jedem $x \in \mathcal{V}$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x gibt, sodaß $|\, f(x) - f(y)\,| < \varepsilon$ gilt für alle $y \in$ U und alle $f \in$ A.

Das angedeutete Resultat ist der

2.14 Satz von Arzelà-Ascoli:[10] *$\mathcal{V}$ sei ein kompakter topologischer Raum. Eine Teilmenge* A *von $C(\mathcal{V})$ ist genau dann relativ kompakt, wenn sie gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: A ist eine relativ kompakte Teilmenge des vollständigen Raums $C(\mathcal{V})$ und folglich präkompakt. Daher gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Familie $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ von Funktionen aus A, sodaß

$$\mathrm{A} \subset \bigcup_{j=1}^{n} \{\, f \in C(\mathcal{V}) \mid \|\, f - f_j \,\| < \varepsilon/3 \,\}.$$

Da die $f_1, f_2, \ldots, f_n$ stetig sind, gibt es entsprechend auch zu jedem $x \in \mathcal{V}$ eine Umgebung U von x mit

$$|\, f_j(x) - f_j(y)\,| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $y \in$ U und $j = 1, 2, \ldots, n$.

Außerdem gibt es für jedes $f \in \mathcal{V}$ ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sodaß

$$f \in \{\, f \in C(\mathcal{V}) \mid \|\, f - f_j \,\| < \varepsilon/3 \,\}.$$

Daraus folgt für alle $y \in$ U

$$|\, f(x) - f(y)\,| \leqq |\, f(x) - f_j(x)\,| + |\, f_j(x) - f_j(y)\,| + |\, f_j(y) - f(y)\,| = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

„$\Longleftarrow$“: Da A gleichgradig stetig ist, erhält man für jedes $x \in \mathcal{V}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ in Gestalt von $\mathrm{U}_n(x) := \{\, y \in \mathcal{V} \mid \forall f \in \mathrm{A} \mid f(x) - f(y) \mid < 1/n \,\}$ eine Umgebung von x. Dabei gilt $\mathcal{V} = \bigcup_{x \in \mathcal{V}} \mathrm{U}_n(x)$, und da $\mathcal{V}$ kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $\mathcal{A}_n$ von $\mathcal{V}$,

[10] Benannt nach Cesare Arzelà [14], [15] und Giulio Ascoli [16], die eine etwas speziellere Version des Satzes bewiesen. Die allgemeinere Fassung wurde von Maurice Fréchet entdeckt [105].

sodaß $\mathcal{V} = \bigcup_{x \in \mathcal{A}_n} \mathrm{U}_n(x)$. Die Menge $\mathcal{A}_\infty := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n$ ist abzählbar und folglich schreibbar als $\mathcal{A}_\infty = (t_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Nun sei $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine beliebige gleichmäßig beschränkte Folge in A. Dann ist die skalare Folge $(f_m(t_i))_{m \in \mathbb{N}}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ebenfalls beschränkt. Daher gibt es jeweils konvergente Teilfolgen $(f_{m_{i,j}}(t_i))_{j \in \mathbb{N}}$, und die Diagonalfolge $(g_j)_{j \in \mathbb{N}} = (f_{m_{i,j}})_{j \in \mathbb{N}}$ liefert für alle $t \in \mathcal{A}_\infty$ ein konvergente Folge $(g_j(t))_{j \in \mathbb{N}}$. Wegen $\mathcal{V} = \bigcup_{y \in \mathcal{A}_n} \mathrm{U}_n(y)$ gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathcal{V}$ ein $t \in \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_\infty$, sodaß $t \in \mathrm{U}_n(t)$ und damit $|\, f(x) - f(t)\,| < 1/n$. Für $m, n \in \mathbb{N}$ folgt dann

$$
\begin{aligned}
|\, g_m(x) - g_n(x)\,| &\leqq |\, g_m(x) - g_m(t)\,| + |\, g_m(t) - g_n(t)\,| + |\, g_n(t) - g_n(x)\,| \\
&\leqq \frac{2}{n} + |\, g_m(t) - g_n(t)\,|,
\end{aligned}
$$

und die gleichmäßige Beschränktheit liefert

$$
d(g_m, g_n) = \sup_{x \in \mathcal{V}} |\, f_m(x) - f_n(x)\,| \leqq \frac{2}{n} + \sup_{t \in \mathcal{A}_n} |\, f_m(t) - f_n(t)\,|
$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$, das heißt, $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ enthält eine Teilfolge, die eine Cauchy-Folge ist. Damit ist A präkompakt, und weil $C(\mathcal{V})$ vollständig ist, auch relativ kompakt. □

2.2.2 Lokalkonvexe Räume

Für die hier verfolgten Zwecke genügt die Betrachtung zweier Spezialfälle topologischer Vektorräume[11], deren einer gleichzeitig eine Verallgemeinerung des anderen darstellt. Der erste der beiden macht zunächst die Einführung des Begriffs der konvexen Menge erforderlich. Eine Teilmenge A eines $\mathbb{K}$-Vektorraums $\mathcal{V}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in \mathrm{A}$ und alle $\lambda \in [0, 1]$

$$
\lambda x + (1 - \lambda)\, y \in \mathrm{A}
$$

gilt; eine Menge heißt *absolut konvex*, wenn sie kreisförmig und konvex ist. Das ist äquivalent dazu, daß für alle $x, y \in \mathrm{A}$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| + |\mu| \leqq 1$

$$
\lambda x + \mu y \in \mathrm{A}
$$

gilt. Da der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen wieder konvex ist, gibt es zu jeder Menge $\mathrm{A} \subset \mathcal{V}$ eine kleinste konvexe Menge C mit $\mathrm{A} \subset \mathrm{C} \subset \mathcal{V}$; diese heißt *konvexe Hülle* von A. Entsprechend gibt es zu A auch stets eine kleinste absolut konvexe Menge Γ mit $\mathrm{A} \subset \Gamma \subset \mathcal{V}$, die *absolut konvexe Hülle* von A. Konvexe Mengen werden unter anderem betrachtet, weil Umgebungen mit dieser Eigenschaft von besonderer Bedeutung sind. Damit formulieren wir folgende

2.15 Definition: Ein topologischer Vektorraum $\mathcal{E}$ heißt *lokalkonvexer Raum*, wenn jeder Punkt $x \in \mathcal{E}$ eine Umgebungsbasis aus konvexen Mengen besitzt[12].

[11] Ausführliche Informationen dazu findet man beispielsweise in [323].
[12] Der Begriff des lokalkonvexen Vektorraums stammt von John von Neuman [272].

Lokalkonvexe Räume stellen die wichtigste Klasse topologischer Vektorräume dar. Insbesondere ist es stets möglich, auf ihnen stetige lineare Funktionale zu konstruieren, die mehr tun, als einfach den ganzen Raum auf Null abzubilden. Damit erhält der Begriff der Dualräume einen Sinn, das sind die Räume der stetigen Funktionale auf den Vektorräumen, die dann ihrerseits wieder algebraische und topologische Strukturen tragen. Dazu später mehr; zunächst wenden wir uns einem wichtigen Beispiel für die zusätzlichen Strukturen zu, die lokalkonvexe Räume mitbringen. Dazu benötigen wir Normen auf Vektorräumen, das heißt eine Verallgemeinerung der Vorstellung der Länge von Vektoren.

2.16 Definition: Eine *Norm* auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathcal{V}$ ist eine Funktion $\|\ \| : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit den Eigenschaften[13]

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x \in \mathcal{V}\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$,

(ii) $\forall x, y \in \mathcal{V}\ \|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung),

(iii) $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

Gelten nur die ersten beiden Eigenschaften, dann heißt $\|\ \| : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ *Halbnorm* auf $\mathcal{V}$.

Nun sei $\mathrm{J} \subsetneqq \mathbb{N}$ eine beliebige Indexmenge. Eine Familie $(\|\ \|_j)_{j \in \mathrm{J}}$ stetiger Halbnormen auf einem Vektorraum $\mathcal{V}$ heißt *Fundamentalsystem von Halbnormen*, wenn es zu jeder Nullumgebung U in $\mathcal{V}$ ein $j \in \mathrm{J}$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodaß für die Menge $\mathrm{U}_j := \{x \in \mathcal{V} \mid \|x\|_j < 1\}$ die Inklusion $\varepsilon\,\mathrm{U}_j \subset \mathrm{U}$ gilt. Offensichtlich ist bei einem Fundamentalsystem von Halbnormen, welches aus nur einem einzigen Element besteht, letzteres automatisch nicht nur eine Halbnorm, sondern sogar eine Norm.

Die Existenz von Fundamentalsystemen aus Halbnormen erweist sich nun als charakteristisch für lokalkonvexe Räume:

2.17 Satz: *Ein topologischer Vektorraum ist genau dann ein lokalkonvexer Raum, wenn seine Topologie durch ein Fundamentalsystem von Halbnormen erzeugt werden kann.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Wir zeigen zunächst, daß jeder lokalkonvexe Vektorraum $\mathcal{E}$ eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Mengen besitzt. Da Translationen konvexer Mengen konvex sind, besitzt $\mathcal{E}$ eine Nullumgebungsbasis $\mathfrak{U}_2$ aus konvexen Mengen. Ist U_1 eine beliebige Nullumgebung, dann gibt es folglich eine konvexe Nullumgebung $\mathrm{U}_2 \subset \mathrm{U}_1$. Aus Lemma 2.12 (2) folgt mit $\delta_0 = 0$ und $x_0 = 0$, daß es auch eine kreisförmige Nullumgebung $\mathrm{U}_3 \subset \mathrm{U}_2$ gibt. Sei nun U die konvexe Hülle von U_3, dann gilt $\mathrm{U} \subset \mathrm{U}_3 \subset \mathrm{U}_2 \subset \mathrm{U}_1$. Damit ist U kreisförmig und folglich absolutkonvex. Führt man diese Konstruktion für alle Umgebungen aus $\mathfrak{U}_2$ durch, erhält man eine Nullumgebungsbasis $\mathfrak{U}$ aus absolutkonvexen Mengen.
Nun betrachten wir für jedes $\mathrm{U} \in \mathfrak{U}$ die Funktion $\|\ \|_\mathrm{U} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}_0^*$ mit

$$\|x\|_\mathrm{U} := \inf\{\, t > 0 \mid x \in t\,\mathrm{U}\,\}.$$

[13] Die weitverbreitete Schreibweise $\|\ \|$ wurde von Erhard Schmidt eingeführt [332]; die drei Normaxiome wurden erstmals explizit von Eduard Helly formuliert [146].

Als nächstes zeigen wir für diese Funktion die Gültigkeit der Halbnormaxiome. Einerseits ist U absolutkonvex, daher gilt für alle $x \in \mathcal{E}$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_{\mathrm{U}} &= \inf \{ t > 0 \mid \lambda x \in t\,\mathrm{U} \} = \inf \{ t > 0 \mid |\lambda|\, x \in t\,\mathrm{U} \} \\ &= |\lambda| \inf \{ t > 0 \mid x \in t\,\mathrm{U} \} = |\lambda|\, \|x\|_{\mathrm{U}},\end{aligned}$$

woraus Eigenschaft (i) folgt. Andererseits gilt für $x \in t\,U$ und $y \in s\,\mathrm{U}$

$$x + y \in (\,t + s\,)\,\mathrm{U},$$

denn aus

$$\frac{1}{t+s}\,(\,x+y\,) = \frac{1}{t\,(\,t+s\,)}\,t\,x + \frac{1}{s\,(\,t+s\,)}\,s\,y$$

folgt

$$\frac{1}{t+s}\,(x+y) \in \mathrm{U}.$$

Das liefert $\|\,x+y\,\|_{\mathrm{U}} \leqq t+s$ und weiter $\|\,x+y\,\|_{\mathrm{U}} \leqq \|x\|_{\mathrm{U}} + \|y\|_{\mathrm{U}}$, also Eigenschaft (ii). Für alle $\mathrm{U} \in U$ ist somit $\|\ \|_{\mathrm{U}}$ eine Halbnorm.

Für jedes $x \in \mathcal{E}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x/n = 0$, woraus $\mathcal{E} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} n\,\mathfrak{U}$ und somit auch $\operatorname{span}\mathfrak{U} = \mathcal{E}$ folgt. Daher sind die Halbnormen $\|\ \|_{\mathrm{U}}$ auf ganz $\mathcal{E}$ definiert. Da jedes $\mathrm{U} \in \mathfrak{U}$ absolutkonvex ist, gilt jeweils

$$\{\, x \in \mathcal{E} \mid \|x\|_{\mathrm{U}} < 1 \,\} \subset \mathrm{U} \subset \{\, x \in \mathcal{E} \mid \|x\|_{\mathrm{U}} \leqq 1 \,\}$$

und damit für jedes $\varepsilon > 0$ auch

$$\varepsilon\,\mathrm{U} \subset \{\, x \in \mathcal{E} \mid \|x\|_{\mathrm{U}} \leqq \varepsilon \,\}.$$

Folglich ist jede Halbnorm $\|\ \|_{\mathrm{U}}$ stetig in 0. Mit der Abschätzung $\big|\,\|x\|_{\mathrm{U}} - \|y\|_{\mathrm{U}}\,\big| \leqq \|\,x-y\,\|_{\mathrm{U}}$ für alle $x, y \in \mathcal{E}$ folgt daraus, daß für alle $x \in \mathcal{E}$ und jede Nullumgebung J in $\mathbb{R}$ eine Umgebung W von x existiert, sodaß für alle $y \in \mathrm{W}$ die Relation $\|\,x-y\,\|_{\mathrm{U}} \in J$ gilt. Damit sind alle Halbnormen $\|\ \|_{\mathrm{U}}$ stetig auf ganz $\mathcal{E}$.

Zu jeder Nullumgebung $\mathcal{U}$ in $\mathcal{E}$ gibt es ein $\mathrm{U} \in \mathfrak{U}$ mit $\mathrm{U} \subset \mathcal{U}$. Hierfür gilt

$$\{\, x \in \mathcal{E} \mid \|x\|_{\mathrm{U}} < 1 \,\} \subset \mathrm{U} \subset \mathcal{U},$$

und folglich ist $(\|\ \|_{\mathrm{U}})_{\mathrm{U}\in\mathfrak{U}}$ ein Fundamentalsystem von Halbnormen.

Um die hierdurch festgelegte Topologie $\mathfrak{E}$ zu konstruieren, definieren wir für alle $x \in \mathcal{E}$, alle $\mathrm{U} \in \mathfrak{U}$ und alle $\varepsilon > 0$ Umgebungen

$$\mathrm{V}_{\mathrm{U},\varepsilon}(x) = \{\, y \in \mathcal{E} \mid \|\,x-y\,\|_{\mathrm{U}} < \varepsilon \,\}$$

und damit

$$\mathfrak{E} = \{\, \mathrm{A} \subset \mathcal{E} \mid \forall\, x \in \mathrm{A}\ \exists\, \mathrm{U} \in \mathfrak{U}\ \exists\, \varepsilon > 0\ \ \mathrm{V}_{\mathrm{U},\varepsilon}(x) \subset \mathrm{A} \,\}.$$

$\emptyset$ und $\mathcal{E}$ gehören trivialerweise zu $\mathfrak{E}$. Für $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathfrak{E}$ gibt es für alle $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ ein $\mathsf{V}_{\mathsf{U},\varepsilon}(x)$ mit $\mathsf{V}_{\mathsf{U},\varepsilon}(x) \subset \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$, etwa wenn man $\varepsilon < \inf \{ \| x - y \|_{\mathsf{U}} \mid \mathsf{U} \in \mathfrak{U},\ y \in \partial(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \}$ wählt. Und ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{E}$, dann gilt mit $\mathsf{V}_{\mathsf{U},\varepsilon}(x) \subset \mathsf{X}$ für eine Menge $\mathsf{X} \in \mathfrak{A}$ auch

$$\mathsf{V}_{\mathsf{U},\varepsilon}(x) \subset \bigcup_{\mathsf{X} \in \mathfrak{A}} \mathsf{X}.$$

Folglich ist $\mathfrak{E}$ eine Topologie für $\mathcal{E}$.
„$\Longleftarrow$“: Nun sei $\mathcal{E}$ ein topologischer Vektorraum, dessen Topologie $\mathfrak{E}$ durch ein Fundamentalsystem $(\| \ \|_j)_{j \in \mathsf{J}}$ von Halbnormen gegeben ist. Außerdem sei für alle $j \in \mathsf{J}$ und alle $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{U}_{j,\varepsilon} = \{ y \in \mathcal{E} \mid \|x\|_j < \varepsilon \}.$$

Wir zeigen, daß

$$\mathfrak{B} = \left\{ \bigcap_{J=1}^{n} \mathsf{U}_{j,\varepsilon_j}(x) \ \middle|\ n \in \mathbb{N},\ j \in \mathsf{J},\ \varepsilon_j > 0 \right\} \subset \mathfrak{E}$$

eine konvexe Nullumgebungsbasis ist. Dazu betrachten wir für alle $j \in \mathsf{J}$ die Unterräume $\mathcal{A}_j = \{ x \in \mathcal{E} \mid \|x\|_j = 0 \}$ sowie die Quotientenräume $\mathcal{E}_j = \mathcal{E}/\mathcal{A}_j = \{ x + \mathcal{A}_j \mid x \in \mathcal{E} \}$; gleichzeitig werden dadurch lineare stetige surjektive Abbildungen

$$\pi_j : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_j, \quad x \longmapsto \pi_j(x) = x + \mathcal{A}_j = \{ y \in \mathcal{E} \mid \| x - y \|_j = 0 \}.$$

definiert, die jedem x aus $\mathcal{E}$ passende Elemente in jedem Quotientenraum zuordnen. Außerdem wird aus jeder Halbnorm $\| \ \|_j$ im zugehörigen Quotientenraum jeweils eine echte Norm $\| \ \|_{\mathcal{E}_j}$, definiert durch $\|\pi_j(x)\|_{\mathcal{E}_j} = \|x\|_j$. In den normierten Räumen $\mathcal{E}_j$ sind die Mengen $\mathsf{B}_{j,\varepsilon} = \{ x \in \mathcal{E}_j \mid \|x\|_{\mathcal{E}_j} < \varepsilon \}$ konvexe Nullumgebungen und somit die Systeme $\mathfrak{B}_j = \{ \mathsf{B}_{j,\varepsilon_j} \mid j \in \mathsf{J},\ \varepsilon_j > 0 \}$ jeweils konvexe Nullumgebungsbasen. Da die π_j linear und stetig sind, sind für alle $j \in \mathsf{J}$ auch die Mengen $\pi_j^{-1}(\mathsf{B}_{j,\varepsilon}) = \mathsf{U}_{j,\varepsilon}$ konvex, und $\mathfrak{B}$ ist eine konvexe Nullumgebungsbasis in $\mathcal{E}$. Folglich ist $\mathcal{E}$ ein lokalkonvexer Raum. $\square$

Der Beweis hat natürlich mit erbracht, daß es auf jedem lokalkonvexen Raum stets ein Fundamentalsystem von Halbnormen gibt. Die Aussage von Satz 2.17 wird gelegentlich zum Anlaß genommen, lokalkonvexe Räume gleich über die Forderung der Existenz von Fundamentalsystemen von Halbnormen zu definieren. Die an jedem Punkt vorhandenen konvexen Umgebungsbasen werden dann zu einer daraus abgeleiteten Eigenschaft. Eine solche Definition stellt jedoch eine stärkere Eigenschaft dar, und entsprechend läßt man dann bei dieser Betrachtungsweise üblicherweise die Voraussetzung, der in Frage stehende Raum solle ein topologischer Vektorraum sein, in der Definition fort, da man diese Eigenschaft auf der Grundlage der in Satz 2.17 beschriebenen Topologie auch direkt beweisen kann. Lokalkonvexe Vektorräume sind in Band 2 an wichtiger Stelle von Bedeutung.

2.2.3 Banachräume

2.2.3.1 Normierte Räume

Wir kommen nun zum zweiten hier zu betrachtenden Spezialfall topologischer Vektorräume, den *normierten Räumen*, also Vektorräumen, auf denen eine Norm definiert ist. Entsprechend heißt ein topologischer Vektorraum *normierbar*, wenn man auf ihm eine Norm definieren kann. Das ist für eine sehr allgemeine Klasse lokalkonvexer Räume der Fall.

2.18 Satz: *Ein lokalkonvexer Raum ist genau dann normierbar, wenn er eine beschränkte Nullumgebung besitzt.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: $\mathcal{E}$ sei ein lokalkonvexer Raum mt Norm $\|\ \|$. Eine Nullumgebung in $\mathcal{E}$ ist beispielsweise durch $\mathrm{U} = \{\, x \in \mathcal{E} \mid \|x\| \leqq 1 \,\}$ gegeben. $\mathcal{E}$ besitzt als lokalkonvexer Raum ein Fundamentalsystem $(\|\ \|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Halbnormen, und für jede solche Halbnorm $\|\ \|_n$ gibt es ein $C_n > 0$ mit $\|x\|_n < C_n \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{E}$. Damit gilt $\|x\|_n < C_n$ für alle $x \in \mathrm{U}$ und alle $n \in \mathbb{N}$, das heißt, U ist in der durch $(\|\ \|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegebenen Topologie auf $\mathcal{E}$ beschränkt.
„$\Longleftarrow$“: U sei eine beschränkte Nullumgebung in $\mathcal{E}$. Dann gibt es eine Halbnorm $\|\ \|_j \in (\|\ \|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\{\, x \in \mathcal{E} \mid \|x\|_j \leqq 1 \,\} \subseteqq \mathrm{U}. \tag{2.1}$$

Außerdem gibt es für alle Halbnormen aus $(\|\ \|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein $C_n > 0$, sodaß $\|x\|_n \leqq C_n$ für alle $x \in \mathrm{U}$. Daraus folgt

$$\mathrm{U} \subseteqq \{\, x \in \mathcal{E} \mid \|x\|_n \leqq 1/C_n \,\}. \tag{2.2}$$

(2.1) und (2.2) liefern gemeinsam $\|x\|_j \geqq \|x\|_n / C_n$ und damit auch $\|x\|_n \leqq C_n \|x\|_j$ für alle $x \in \mathcal{E}$. Damit Ist bereits $(\|\ \|_j)$ ein einelementiges Fundamentalsystem von Halbnormen und folglich $\|\ \|_j$ eine Norm auf $\mathcal{E}$. □

Ein spezielles Resultat über normierte Räume wird sich später als nützlich erweisen. Es liefert ein Kriterium für deren Separabilität oder Nichtseparabilität.

2.19 Satz: M *sei eine überabzählbare Teilmenge des normierten Vektorraums $\mathcal{E}$. Gibt es ein $\delta > 0$, sodaß zu je zwei Elementen a und b von* M *mit $a \neq b$ stets $\|\, a - b \,\| > \delta$ gilt, dann ist $\mathcal{E}$ nicht separabel.*

Beweis: Sei $\delta > 0$, und es gelte $\|\, a - b \,\| > \delta$ für alle $a, b \in \mathrm{M}$ mit $a \neq b$. Wäre $\mathcal{E}$ separabel, dann gäbe es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}$, sodaß für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $x \in \mathrm{M}$ ein a_j existiert mit $\|\, x - a_j \,\| < \varepsilon$. Da M überabzählbar ist, gibt es außerdem Elemente $a, b \in \mathrm{M}$ mit $\|\, a - a_j \,\| < \varepsilon/2$ und $\|\, a_j - b \,\| < \varepsilon/2$ mit ein und demselben a_j. Doch dann gilt nach Voraussetzung $\|\, a - a_j \,\| + \|\, a_j - b \,\| > \|\, a - b \,\| > \delta$ und damit $\varepsilon > \delta$ – ein Widerspruch. Folglich ist $\mathcal{E}$ nicht separabel. □

Dieser Satz besagt ganz anschaulich, daß jeder normierte Raum, der eine überabzählbare Teilmenge aus isolierten Punkten besitzt, nicht separabel ist. Eine überabzählbare Menge isolierter Punkte ist zu groß, um durch eine abzählbare Menge elementweise approxiemierbar zu sein.

Über normierte Räume könnte man noch sehr viel mehr berichten; diese Teilklasse der Vektorräume ist jedoch für die hier verfolgten Zwecke noch immer zu groß, weswegen wir uns weiter einschränken.

2.2.3.2 Definition und Beispiele für Banachräume

Damit ist die Bühne frei für die eigentlichen Hauptdarsteller dieses Abschnitts und auch eines Großteils dieses Kapitels. Auf jedem normierten Raum $(\mathcal{V}, \|\ \|)$ wird durch

$$d(x, y) := \| x - y \|, \quad x, y \in \mathcal{V}$$

eine Metrik definiert, die *kanonische Metrik* des Raums $\mathcal{V}$. Die Metrikeigenschaften von d sowie die Eigenschaft eines jeden normierten Raums, vermöge der durch d definierten Topologie ein topologischer Vektorraum zu sein, folgen dabei unmittelbar aus den Normeigenschaften von $\|\ \|$. Das führt auf den namensgebenden Begriff dieses Abschnitts.

2.20 Definition: Ein bezüglich seiner kanonischen Metrik vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum*.

Trivialerweise ist jeder abgeschlossene Unterraum eines Banachraums selbst auch ein Banachraum. Aus der Vollständigkeit folgt für jeden Banachraum $\mathcal{E}$ unmittelbar $|\mathcal{E}| \geqq \mathfrak{c}$, denn die Vervollständigung einer Menge von konvergenten Folgen enthält stets eine zu $\mathbb{R}$ isomorphe Teilmenge. Das Gleichheitszeichen gilt dabei speziell für den separablen Fall. Die Frage der Mächtigkeit von Banachräumen im allgemeinen ist für sich genommen sehr interessant, weswegen wir in Abschnitt 2.2.3.8 darauf zurückkommen. – Ebenso direkt folgt aus Satz 2.17, daß jeder normierte Raum und damit erst recht jeder Banachraum ein lokalkonvexer Raum ist. Für die Mengen $\mathfrak{V}$ aller Vektorräume, $\mathfrak{T}$ aller topologischer Vektorräume, $\mathfrak{L}$ aller lokalkonvexer Vektorräume und $\mathfrak{B}$ aller Banachräume gilt also

$$\mathfrak{V} \supset \mathfrak{T} \supset \mathfrak{L} \supset \mathfrak{B},$$

wobei es sich jeweils um echte Inklusionen handelt.

Jeder endlichdimensionale normierte Vektorraum ist ein Banachraum. Bei unendlichdimensionalen normierten Vektorräumen ist das nicht mehr ganz so trivial; hier gibt es nicht vollständige und vollständige Exemplare. Wir nennen einige Beispiele für Banachräume.

1. Die euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ mit der Norm $\|x\| = \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^2 \Big)^{1/2}$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$,

2. der Raum c_0 der Nullfolgen, der Raum c der konvergenten Folgen sowie der Raum ℓ^∞ der beschränkten Folgen aus Elementen von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit der Supremumsnorm $\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} (a_n)$,

3. die ℓ^p-Räume für $1 \leqq p < \infty$, das sind die Räume der reellen oder komplexen Folgen mit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$ und der p-Norm $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \Big)^{1/p}$ [14],

4. der Raum $C(\mathrm{X})$ der stetigen reellen oder komplexen Funktionen auf einer kompakten Menge X mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup\{\,|f(x)| \mid x \in \mathrm{X}\,\}$ [15].

5. Es seien $r \in \mathbb{N}$ beliebig, $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall auf $\mathbb{R}$ und $C^r[a, b]$ der Raum der r-fach stetig differenzierbaren reellen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Mit der Norm $\|f\|_r = \sum_{n=1}^{r} \|f^{(n)}\|_\infty$ wird $C^r[a, b]$ zu einem Banachraum.

6. $n, r \in \mathbb{N}$ seinen beliebig und $\Omega \subseteqq \mathbb{R}^n$ ein kompaktes Gebiet; für $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ sei

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$

und für reelle oder komplexe auf $\overline{\Omega}$ definierte Funktionen sei

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Für den Raum $C^r(\overline{\Omega})$ der Funktionen, die auf dem Abschluß $\overline{\Omega}$ von Ω stetig sind und auf Ω selbst stetige partielle Ableitungen bis einschließlich der Ordnung r besitzen, sei die Norm $\|\ \|_r$ definiert durch

$$\|f\|_r = \sum_{|\alpha| \leqq r} \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha f(x)|.$$

Damit ist $C^r(\overline{\Omega})$ ein Banachraum.

7. $\mathrm{D} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\,\}$ sei die offene Einheitskreisscheibe in der komplexen Ebene, $\mathscr{H}^\infty$ der Raum der beschränkten holomorphen Funktionen $f : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\mathscr{A}(\mathrm{D})$ der Raum der Funktionen $f \in C(\overline{\mathrm{D}})$, für die $f \restriction \mathrm{D}$ holomorph ist. Mit der Supremumsnorm sind $\mathscr{H}^\infty$ und $\mathscr{A}(\mathrm{D})$ Banachräume.

8. Ist X eine beliebige Menge und $1 \leqq p < \infty$, dann sei $\ell^p(\mathrm{X})$ der Raum der Funktionen $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ oder $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{C}$, für welche die Reihe $\sum_{x\in \mathrm{X}} |f(x)|^p$ existiert[16]. Mit der p-Norm $\|f\|_p = \Big(\sum_{x\in\mathrm{X}} |f(x)|^p \Big)^{1/p}$ wird $\ell^p(\mathrm{X})$ zu einem Banachraum[17].

[14] Da die Abbildungen $\|\ \|_p$ für $0 < p < 1$ keine Normen sind, sind die entsprechenden ℓ^p-Räume zwar vollständige metrische Räume vermöge der jeweils durch $d(x, y) := \|\,x - y\,\|_p$ definierten Metriken, sie sind aber keine Banachräume und nicht einmal lokalkonvex. Näheres in [353] und [354].

[15] Man beachte hierbei, daß die Konvergenz in der Supremumsnorm mit der gleichmäßigen Konvergenz identisch ist.

[16] Wie man über überabzählbar vielen Summanden summiert, steht in Abschnitt 2.2.3.8.

[17] Für $0 < p < 1$ gilt hier dasselbe wie bei Beispiel 3.

9. X sei wieder eine beliebige Menge, dann ist der Raum $\ell^\infty(X)$ der beschränkten reellen oder komplexen Funktionen auf X mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ ein Banachraum[18].

10. Es sei $(M, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum, $\mathcal{E}$ ein Banachraum mit der Norm $\| \ \|$, und für $1 \leqq p < \infty$ sei außerdem

$$\mathcal{L}^p(M, \mu, \mathcal{E}) = \left\{ f : M \longrightarrow \mathcal{E} \;\middle|\; \int_M \|f\|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

Auf $\mathcal{L}^p(M, \mu, \mathcal{E})$ ist durch

$$\|f\|_p = \left(\int_M \|f\|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

eine Halbnorm sowie durch

$$f \sim g \iff \| f - g \|_p = 0$$

eine Äquivalenzrelation definiert. $\mathscr{L}^p(M, \mu, \mathcal{E})$ sei die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim$; für sie gilt

$$\mathscr{L}^p(M, \mu, \mathcal{E}) = \mathcal{L}^p(M, \mu, \mathcal{E}) \,/\, \{ f \in \mathcal{L}^p(M) \mid f = 0 \ \ \mu\text{-fast überall} \},$$

das heißt, sie entsteht, indem man in $\mathcal{L}^p(M, \mu, \mathcal{E})$ Funktionen jeweils identifiziert, die sich nur auf einer Menge vom Maß Null unterscheiden. Auf $\mathscr{L}^p(M, \mu, \mathcal{E})$ ist $\| \ \|_p$ eine Norm, und $\mathscr{L}^p(M, \mu, \mathcal{E})$ wird damit zu einem Banachraum[19].

11. $(M, \mathfrak{S}, \mu)$ sei wieder ein Maßraum. $\mathcal{L}^\infty(M, \mu, \mathcal{E})$ sei der Raum der auf M wesentlich Norm-beschränkten $\mathcal{E}$-wertigen Funktionen, also derjenigen Funktionen, die höchstens auf einer Menge vom Maß Null unbeschränkt sind. Wieder definieren wir

$$\mathscr{L}^\infty(M, \mu, \mathcal{E}) = \mathcal{L}^\infty(M, \mu, \mathcal{E}) \,/\, \{ f \in \mathcal{L}^\infty(M, \mu, \mathcal{E}) \mid f = 0 \ \ \mu\text{-fast überall} \}.$$

Mit der Norm

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} \{ \|f(x)\| \mid x \in M \} = \inf \{ C \geqq 0 \mid \|f(x)\| \leqq C \ \ \mu\text{-fast überall} \}$$

ist $\mathscr{L}^\infty(M, \mu, \mathcal{E})$ ein Banachraum[20].

---

[18] ℓ^p und ℓ^∞ aus Beispiel 2 und 3 sind in Beispiel 8 und 9 als Spezialfälle für $X = \mathbb{N}$ enthalten.

[19] Für $0 < p < 1$ ist auch hier $\| \ \|_p$ keine Norm; mit den durch $d(f, g) := \| f - g \|_p^p$ definierten Metriken sind die zugehörigen Räume $\mathscr{L}^p(M, \mu, \mathcal{E})$ dafür jeweils vollständige metrische Räume und gleichzeitig topologische, aber nicht lokalkonvexe Vektorräume. In der Tat ist für alle diese Räume die einzige konvexe Nullungebung jeweils der gesamte Raum selbst. Näheres dazu steht in [254].

[20] Für $1 \leqq p \leqq \infty$ ist $\mathscr{L}^p(M, \mu, \mathcal{E})$ außerdem ein Hausdorff-Raum, im Gegensatz zu $\mathcal{L}^p(M, \mu, \mathcal{E})$.

12. $(\mathrm{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ sei erneut ein Maßraum, μ jetzt ein komplexes Maß, und $\mathscr{Z}$ die Menge aller Zerlegungen der Menge A in disjunkte Teilmengen. Dann heißt das durch

$$|\mu|(\mathrm{A}) = \sup_{\mathfrak{Z} \in \mathscr{Z}} \sum_{\mathrm{B} \in \mathfrak{Z}} |\mu(\mathrm{B})|$$

definierte positive Maß $|\mu|$ die *Variation* von μ. Damit definieren wir die *Variationsnorm* eines Maßes durch

$$\|\mu\| = |\mu|(\mathrm{M}).$$

Mit dieser Norm ist der Raum $\mathscr{M}(\mathrm{M}, \mathfrak{S})$ aller komplexer Maße auf M ein Banachraum.

Durch Wahl von μ als *Zählmaß*, das heißt $\mu(\mathrm{A}) = |\mathrm{A}|$ für endliche und $\mu(\mathrm{A}) = \infty$ für unendliche Mengen[21], erhält man die Identität $\ell^p(\mathrm{M}) = \mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu, \mathbb{R})$ beziehungsweise $\ell^p(\mathrm{M}) = \mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu, \mathbb{C})$ für $1 \leqq p \leqq \infty$, das heißt, die ℓ^p-Räume sind spezielle $\mathscr{L}^p$-Räume. Den $\mathscr{L}^p$- und den ℓ^p-Räumen widmen wir etwas weiter unten jeweils eigene Abschnitte.

Bei der Konstruktion von Banachräumen ist jeweils die Wahl einer passenden Norm wesentlich. Beispielsweise ist der Raum $C(\mathrm{X})$ mit der $\| \ \|_p$-Norm für $1 \leqq p < \infty$ kein Banachraum, da er in dieser Norm nicht vollständig ist. Bei Räumen stetiger oder differenzierbarer Funktionen ist die Kompaktheit der Definitionsmengen für die Banachraum-Eigenschaft wesentlich. Der Raum $C(\Omega)$ der stetigen Funktionen und der Raum $C^\infty(\Omega)$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf einer offenen oder unbeschränkten Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$ sind keine Banachräume, da man auf ihnen überhaupt keine Normen definieren kann; die Normierung geht dabei jeweils schief, weil es in beiden Räumen unbeschränkte Funktionen gibt. Man kann auf ihnen jedoch jeweils ein Fundamentalsystem von Halbnormen angeben. Ist $(\mathrm{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Teilmengen von Ω mit $\mathrm{K}_1 \subset \mathrm{K}_2 \subset \ldots \subset \Omega$ und $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathrm{K}_j = \Omega$, dann wird durch

$$(\|f\|_j)_{j \in \mathbb{N}} = \big(\sup_{x \in \mathrm{K}_j} |f(x)| \big)_{j \in \mathbb{N}}$$

auf $C(\mathrm{X})$ ein vollständiges System von Halbnormen definiert, bezüglich dem $C(\Omega)$ ein vollständiger lokalkonvexer Raum ist. Ebenso wird $C^\infty(\Omega)$ durch das durch

$$(\|f\|_j)_{j \in \mathbb{N}} = \big(\sup_{|\alpha| \leqq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)| \big)_{j \in \mathbb{N}}$$

definierte vollständige System von Halbnormen zu einem vollständigen lokalkonvexen Raum. In beiden Fällen kann man durch

$$d(f_1, f_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\| f_1 - f_2 \|_j}{1 + \| f_1 - f_2 \|_j}$$

[21] Mit dem Zählmaß lassen sich alle endlichen oder unendlichen absolut konvergenten Reihen als Lebesgue-Integrale darstellen.

jeweils eine Metrik definieren, wodurch $C(\Omega)$ und $C^{\infty}(\Omega)$ zu vollständigen lokalkonvexen metrisierbaren Räumen, also zu *Frécheträumen* werden[22]. Diese bilden eine unmittelbare Verallgemeinerung der Banachräume; alle Banachräume sind Frécheträume, und alle Frécheträume sind lokalkonvexe Vektorräume.

Wir ergänzen diesen Abschnitt durch eine kurze Betrachtung des Begriffs der direkten Summe, wie er im Abschnitt 2.1.1.2 aufgetaucht ist, für Banachräume. Bei endlich vielen Summanden ist die Sache hier ziemlich klar; sind $\mathcal{E}_j$ für $j = 1, 2, \ldots, n$, normierte Räume über demselben Körper und ist $\| \ \|_j$ jeweils die Norm von $\mathcal{E}_j$, dann erhält man auf $\bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j$ mit $\|x\| = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_j$ für $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wieder eine Norm, und sind die $\mathcal{E}_j$ jeweils selbst schon Banachräume, dann ist $\bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j$ mit der Norm $\| \ \|$ ebenfalls ein Banachraum. Etwas komplizierter wird es bei unendlich vielen Summanden. Γ sei eine unendliche Ordinalzahl und $(\mathcal{E}_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ eine Familie normierter Räume über demselben Körper. Nun existiert für die algebraische direkte Summe

$$\bigoplus_{\gamma<\Gamma} \mathcal{E}_\gamma = \left\{ (x_\gamma)_{\gamma<\Gamma} \in \prod_{\gamma<\Gamma} \mathcal{E}_\gamma \;\middle|\; x_\gamma \neq 0 \text{ für höchstens endliche viele } \gamma < \Gamma \right\}$$

die Norm $\|x\| = \sum_{\gamma<\Gamma} \|x_\gamma\|_\gamma$ zwar konstruktionsbedingt nach wie vor, $\bigoplus_{\gamma<\Gamma} \mathcal{E}_\gamma$ ist jedoch im allgemeinen auch dann nicht vollständig, wenn sämtliche $\mathcal{E}_\gamma$ Banachräume sind. Wir behelfen uns durch eine modifizierte Definition und nennen

$$\bigoplus_{\gamma<\Gamma}^{T} \mathcal{E}_\gamma = \left\{ (x_\gamma)_\gamma \in \prod_{\gamma<\Gamma} \mathcal{E}_\gamma \;\middle|\; \sum_{\gamma<\Gamma} \|x_\gamma\|_\gamma < \infty \right\}$$

die *topologische* direkte Summe von $(\mathcal{E}_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$. Wieder erhalten wir hierauf durch $\|x\| = \sum_{\gamma<\Gamma} \|x_\gamma\|_\gamma$ für $x = (x_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ eine Norm, wobei solche Summen natürlich präzise definiert werden müssen; wir kommen in Abschnitt 2.2.3.8 darauf zurück. Mit der Norm $\| \ \|$ ist $\bigoplus_{\gamma<\Gamma}^{T} \mathcal{E}_\gamma$ genau dann ein Banachraum, wenn alle $\mathcal{E}_\gamma$ Banachräume sind; in diesem Fall ist die topologische direkte Summe die Vervollständigung der algebraischen in der Norm $\| \ \|$.

2.2.3.3 Unendliche Reihen

Die Kombination aus algebraischer und topologischer Struktur ermöglicht in normierten Räumen Konvergenzbetrachtungen für unendliche Reihen. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in einem normierten Raum $\mathcal{E}$ heißt *konvergent*, wenn die Folge $(S_N)_{N\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen

[22] Die dritte dieser Eigenschaften ist äquivalent dazu, eine abzählbare Nullumgebungsbasis zu besitzen.

der Reihe konvergiert[23], sie heißt *absolut konvergent*, wenn auch die reelle Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ konvergiert, und sie heißt *unbedingt konvergent*, wenn die Reihe $\sum\limits_{\pi(n)=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$ für jede Umordnung π von $\mathbb{N}$ gegen dasselbe Element x von $\mathcal{E}$ konvergiert[24]. Nicht jede konvergente Reihe konvergiert auch absolut[25]; umgekehrt gilt jedoch der folgende

2.21 Satz: *Ein normierter Raum $\mathcal{E}$ ist genau dann ein Banachraum, wenn in $\mathcal{E}$ jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

Beweis: „$\Longrightarrow$": $\mathcal{E}$ sei ein Banachraum und $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{E}$ mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < \infty$. Dann gilt für die Partialsummen

$$\lim_{m,n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j - \sum_{j=1}^{n} a_j \right\| = \lim_{m,n\to\infty} \left\| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right\| \leqq \lim_{m,n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{m} \|a_j\| = 0,$$

das heißt, die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist eine Cauchy-Folge und folglich ist die Reihe konvergent.

„$\Longleftarrow$": Nun sei $\mathcal{E}$ ein normierter Raum und $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{E}$. Für diese läßt sich stets eine Teilfolge $\{a_{j_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sowie eine Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ finden mit $\| a_{j_n+1} - a_{j_n} \| \leqq b_n$ und $\sum\limits_{j=1}^{m} b_j \leqq 1$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\sum_{n=1}^{m} \| a_{j_n+1} - a_{j_n} \| \leqq \sum_{j=1}^{m} b_j \leqq 1,$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, das heißt, die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_{j_n+1} - a_{j_n})$ ist absolut konvergent und damit nach Voraussetzung auch konvergent. Für diese erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{j_n+1} - a_{j_n}) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (a_{j_n+1} - a_{j_n}) = \lim_{m\to\infty} (a_m - a_1) = \lim_{m\to\infty} a_m - a_1$$

und damit die Konvergenz der Teilfolge $\{a_{j_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ wie auch der Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ selbst. $\square$

[23]Unter Konvergenz ist hier natürlich stets Konvergenz in der Norm-Topologie zu verstehen.

[24]Der Begriff wurde samt zweier alternativer Definitionen von Orlicz eingeführt [279], [280]; vergleiche hierzu auch [158].

[25]Hierbei gilt der *Riemannsche Umordnungssatz:* Konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren, können durch jeweiliges geeignetes Umsortieren der Summanden dazu gebracht werden, gegen jeden beliebigen anderen Grenzwert zu konvergieren und sogar zu divergieren.

Die Konvergenz absolut konvergenter Reihen in normierten Räumen ist damit ein charakteristisches Merkmal für Banachräume[26].

Unbedingte und absolute Konvergenz sind nur in endlichdimensionalen Vektorräumen äquivalent[27]. In unendlichdimensionalen Banachräumen folgt aus der der absoluten die unbedingte Konvergenz, die umgekehrte Richtung ist jedoch falsch, wie der Satz von Dvoretzky und Rogers zeigt [83], [183], [184][28]. Zum Beweis dieses Satzes ist zunächst ein Hilfssatz erforderlich, der gleichfalls auf Dvoretzky und Rogers zurückgeht.

2.22 Lemma: *In jedem normierten n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathcal{V}$ gibt es eine Familie von Einheitsvektoren $e_1, e_2, \ldots, e_n$, sodaß für jedes m mit $1 \leqq m \leqq n$ und jede Linearkombination aus m dieser Vektoren die Ungleichung*

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, e_j \right\| \leqq \left[1 + \sqrt{\frac{m\,(m-1)}{n}} \right] \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^2} \tag{2.3}$$

erfüllt ist.

Beweis: E sei dasjenige der Einheitskugel K von $\mathcal{V}$ einbeschriebene Ellipsoid, dessen Volumen V maximal ist, und $\| \ \|_{\mathsf{E}}$ sei diejenige Norm in $\mathcal{V}$, in der E selbst zur Einheitskugel wird. In $\mathcal{V}$ gibt es

(i) eine Basis $\{u_j\}_{1 \leqq j \leqq n}$ und eine quadratische Matrix $(\alpha)_{ij} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, sodaß

  (1) K durch die Menge der Punkte $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{V}$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, t_i\, t_j \leqq 1$ festgelegt wird[29] und

  (2) $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ii}\, u_{k,i}\, u_{l,i} = \delta_{kl}$ gilt für die Komponenten $u_{j,i}$ der Elemente von $\{u_j\}_{1 \leqq j \leqq n}$,

(ii) und eine Basis $\{e_j\}_{1 \leqq j \leqq n}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\text{a)} \quad \|e_j\| = \|e_j\|_{\mathsf{E}} = 1,$$

$$\text{b)} \quad e_j = \sum_{i=1}^{j} \gamma_{ji}\, u_i \quad \text{mit} \quad \gamma_{jj} > 0,$$

[26] Satz 2.21 läßt sich auf beliebige vollständige metrische Räume ausdehnen, allerdings nur in einer Richtung. Ist $\mathcal{E}$ ein vollständiger metrischer Raum mit Metrik d, dann ist eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1})$, was eine Verallgemeinerung der absoluten Konvergenz darstellt.

[27] In der elementaren linearen Algebra taucht erstere deswegen gar nicht als eigenständiger Begriff auf.

[28] Ein alternativer Beweis wurde von Singer angegeben [346].

[29] Das ist natürlich genau die Forderung, die Basis $\{u_j\}_{1 \leqq j \leqq n}$ solle bezüglich des durch E definierten Skalarprodukts eine Orthonormalbasis sein. Mehr zu diesen Begriffen in den Abschnitten 2.2.3.11 und 2.3.3.

$$\text{c)} \quad \sum_{i=1}^{j-1} \gamma_{ji}^2 = 1 - \gamma_{jj}^2 \leqq \frac{j-1}{j},$$

jeweils für $1 \leqq j \leqq n$. Das zeigt man mit vollständiger Induktion über j: Für $j = 1$ wählen wir für $u_1 = e_1$ einen beliebeigen Punkt aus $\partial \mathsf{K} \cap \partial \mathsf{E}$; hierfür ist (i) und (ii) trivialerweise erfüllt. Nun nehmen wir an, wir hätten bereits je j Vektoren $\{u_i\}_{1 \leqq i \leqq j}$ und $\{e_i\}_{1 \leqq i \leqq j}$ mit (i) und (ii) gefunden. Die Vektoren $\{u_i\}_{1 \leqq i \leqq j}$ können durch Vektoren $\{v_i\}_{j+1 \leqq i \leqq n}$ zu einer Basis von $\mathcal{V}$ mit Eigenschaft (1) ergänzt werden.
Wir konstruieren Vektoren u_{j+1} und e_{j+1}, sodaß die Familien $\{u_i\}_{1 \leqq i \leqq j}$ und $\{e_i\}_{1 \leqq i \leqq j}$ die Eigenschaften (i) und (ii) erfüllen. Dazu betrachten wir für beliebiges $\varepsilon > 0$ das durch

$$(1+\varepsilon)^{n-j} \sum_{i=1}^{j} t_i^2 + \frac{1}{(1+\varepsilon+\varepsilon^2)^j} \sum_{i=j+1}^{n} t_i^2 \leqq 1 \tag{2.4}$$

definierte Ellipsoid E'; für dessen Volumen V' gilt

$$V' = \frac{(1+\varepsilon+\varepsilon^2)^{j(n-j)}}{(1+\varepsilon)^{j(n-j)}} V > V.$$

Damit gibt es Punkte von E', die außerhalb von K liegen und folglich auch einen Punkt $x_\varepsilon \in \partial \mathsf{K} \cap \mathsf{E}'$. Für diesen gilt $\|x_\varepsilon\|_{\mathsf{E}} \geqq \|x_\varepsilon\| = 1$, also

$$\sum_{j=1} x_{\varepsilon j}^2 \geqq 1. \tag{2.5}$$

Aus (2.4) und (2.5) ergibt sich für die Koordinaten von x_ε die Ungleichung

$$[(1+\varepsilon)^{n-j} - 1] \sum_{i=1}^{j} x_{\varepsilon i}^2 + \left[\frac{1}{(1+\varepsilon+\varepsilon^2)^j} - 1\right] \sum_{i=j+1}^{n} x_{\varepsilon i}^2 \leqq 1$$

und hieraus nach Division durch ε

$$\frac{(1+\varepsilon)^{n-j} - 1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{j} x_{\varepsilon i}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{(1+\varepsilon+\varepsilon^2)^j} - 1\right] \sum_{i=j+1}^{n} x_{\varepsilon i}^2 \leqq 1.$$

Verwenden wir die aus der elementaren Analysis bekannten Relationen

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(\xi+\varepsilon)^{n-j} - \xi}{\varepsilon} = \frac{d}{d\xi} \xi^{n-j} = (n-j)\, x^{n-j-1}$$

und

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{(\xi+\varepsilon+\varepsilon^2)^j} - \frac{1}{\xi^j} \right] \right\} = \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\xi^j} = -\frac{j}{\xi^{j+1}}$$

sowie für ε eine Nullfolge, mit der gleichzeitig x_ε gegen einen Vektor $x \in \mathcal{V}$ konvergiert, erhalten wir für dessen Koordinaten die Relation

$$(n - j) \sum_{i=1}^{j} x_i^2 - j \sum_{i=j+1}^{n} x_i^2 \leqq 1. \tag{2.6}$$

Aus $x \in \partial \mathrm{K} \cap \mathrm{E}$ folgt $\|x\| = \|x\|_{\mathrm{E}} = 1$, außerdem ist die Familie $\{ u_1, u_2, \ldots, u_j, x \}$ für $j < n$ aufgrund von (2.6) linear unabhängig, folglich ist x ein Kandidat für e_{j+1}. Dazu wählen wir $u_{j+1} \in \operatorname{span}\{ u_1, u_2, \ldots, u_j, e_{j+1} \}$ so, daß einerseits

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}\, u_{k,i}\, u_{j+1,i} = 0$$

gilt für $k = 1, 2, \ldots, j$ [30] und andererseits der Koeffizient $\gamma_{j+1\,j+1}$ der Linearkombination

$$e_{j+1} = \sum_{i=1}^{j+1} \gamma_{j+1\,i}\, u_i \tag{2.7}$$

positiv ist. Für u_{j+1} und e_{j+1} sind nun die Eigenschaften (i) und (ii) nachzuweisen.
(i) und (ii) a) und b) sind dabei offensichtlich erfüllt, es fehlt also noch (ii) c). Vergleich von (2.6) mit (2.7) liefert zunächst die Relationen

$$\gamma_{j+1\,i} = x_i \quad \text{für} \quad i \leqq j$$

und

$$\gamma_{j+1\,j+1}^2 = \sum_{i=j+1}^{n} x_i^2,$$

sodaß (2.6) zu

$$(n - j) \sum_{i=1}^{j} \gamma_{j+1\,i}^2 - j\, \gamma_{j+1\,j+1}^2 = n \sum_{i=1}^{j} \gamma_{j+1\,i}^2 - j \sum_{i=1}^{j+1} \gamma_{j+1\,i}^2 \leqq 1$$

wird. Gleichzeitig folgt aus der Normierung von e_{j+1}

$$\|e_{j+1}\|_{\mathrm{E}}^2 = \sum_{i=1}^{j+1} \gamma_{j+1\,i}^2 = 1$$

und damit

$$\sum_{i=1}^{j} \gamma_{j+1\,i}^2 = 1 - \gamma_{j+1\,j+1}^2 \leqq \frac{j}{n},$$

[30] Das bedeutet, daß u_{j+1} zu $u_1, u_2, \ldots, u_j$ orthogonal ist bezüglich des durch E definierten Skalarprodukts.

also gerade (ii) c).
Nun kommen wir zur eigentlichen Behauptung. Dazu ist zu zeigen, daß die Familie $\{e_j\}_{1 \leqq j \leqq n}$ die Ungleichung (2.3) erfüllt. Eine erste Abschätzung ergibt

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j \right\| &\leqq \left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j \right\|_{\mathsf{E}} \leqq \left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j \right\|_{\mathsf{E}} + \left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (u_j - e_j) \right\|_{\mathsf{E}} \\ &\leqq \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^2} + \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| \, \| u_j - e_j \|_{\mathsf{E}} \\ &\leqq \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^2} + \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| \sum_{k=1}^{m} \| u_k - e_k \|_{\mathsf{E}} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^2} \left(1 + \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \| u_k - e_k \|_{\mathsf{E}}^2} \right),\end{aligned}$$

eine zweite

$$\begin{aligned}\| u_j - e_j \|_{\mathsf{E}}^2 = \sum_{i=1}^{j-1} \gamma_{ji}^2 + (1 - \gamma_{jj})^2 \;&=\; (1 - \gamma_{jj}^2) + (1 - \gamma_{jj})^2 \\ = 2 (1 - \gamma_{jj}) \leqq 2 (1 - \gamma_{jj}^2) &\leqq 2 \frac{j-1}{n},\end{aligned}$$

und beides zusammen liefert genau die Ungleichung (2.3). □

Damit kommen wir zum Beweis vom bereits angekündigten

2.23 Satz von Dvoretzky-Rogers: *Ist $\mathcal{E}$ ein unendlichdimensionaler Banachraum, dann gibt es zu jeder konvergenten Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j$ mit positiven Summanden eine unbedingt konvergente Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ in $\mathcal{E}$ mit $\|a_j\|^2 = c_j$ für alle $j \in \mathbb{N}^*$.*

Beweis: Wir zerlegen zunächst die Folge $\{c_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ in Abschnitte $\{c_n\}_{n_i \leqq n \leqq n_{i+1}}$ mit $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$, sodaß jeweils $\sum\limits_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} c_n \leqq 2^{-2i}$ gilt für $i = 1, 2, \ldots$; weil die Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j$ konvergiert, ist das stets möglich. Zur Konstruktion der Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ wählen wir die ersten n_1 Vektoren a_j beliebig, jedoch so, daß $\|a_j\|^2 = c_j$ gilt für $1 \leqq j \leqq n_1$. Um nun Lemma 2.22 anwenden zu können, wählen wir eine Folge $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von Unterräumen von $\mathcal{E}$ mit den Dimensionen $\dim \mathcal{E}_i = (n_{i+1} - n_i) (n_{i+1} - n_i - 1)$. Für $m = n_{i+1} - n_i$ und

$n = (n_{i+1} - n_i)(n_{i+1} - n_i - 1)$ gilt $\left[1 + \sqrt{\frac{m(m-1)}{n}}\right] = 2$, folglich gibt es nach Lemma 2.22 in jedem Unterraum $\mathcal{E}_i$ eine Familie $\{e_n\}_{n_i+1 \leqq n \leqq n_{i+1}}$ normierter Vektoren mit

$$\left\| \sum_{n=n_j+1}^{n_{j+1}} \alpha_n e_n \right\| \leqq 2 \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^2} \tag{2.8}$$

für beliebige Linearkombinationen aus den Vektoren dieser Familien. Wir zeigen, daß die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ mit $a_j = \sqrt{c_j}\, e_j$ die gewünschten Eigenschaften hat.

Nach Konstruktion gilt $\|a_j\|^2 = c_j$ für alle $j \in \mathbb{N}^*$. Zum Nachweis der unbedingten Konvergenz der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ betrachten wir einen beliebigen Abschnitt $\sum_{j=n+1}^{m} a_j$; dazu sei i ein Index mit $n_i \leqq n \leqq n_{j+1}$ und $\beta_j \in \{-1, +1\}$, dann gilt zunächst die Abschätzung

$$\left\| \sum_{j=n+1}^{m} \beta_j a_j \right\| \leqq \sum_{k=i}^{\infty} \max_{\beta_j = \pm 1} \left\| \sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} \beta_j a_j \right\|. \tag{2.9}$$

Nun folgt mit $|\alpha_j| = \sqrt{c_j}$ aus (2.8)

$$\max_{\beta_j = \pm 1} \left\| \sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} \beta_j a_j \right\| \leqq 2 \sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j} \leqq 2^{-i+1}, \tag{2.10}$$

weil die rechte Seite von (2.8) nicht von den Vorzeichen der α_j abhängt. (2.9) und (2.10) liefern zusammen

$$\left\| \sum_{j=n+1}^{m} \beta_j a_j \right\| \leqq \sum_{k=i}^{\infty} 2^{-k+1} = 2^{-i+2}.$$

Wenn m immer größer wird, dann wird auch i immer größer, somit gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$, sodaß

$$\left\| \sum_{j=n+1}^{m} \beta_j a_j \right\| < \varepsilon$$

gilt, das heißt, die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j a_j$ konvergiert gemäß dem Cauchy-Kriterium, und zwar unabhängig von der Anordnung der Koeffizienten $\beta_j = \pm 1$, und damit konvergiert die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ unbedingt. □

Das zentrale, uns hier interessierende Resultat ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz von Dvoretzky-Rogers.

2.24 Corollar: *In jedem unendlichdimensionalen Banachraum gibt es eine unbedingt konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert.*

Beweis: Nach Satz 2.23 gibt es in jedem unendlichdimensionalen Banachraum eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|x_n\| = 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodaß aufgrund der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ unbedingt konvergiert. Aufgrund der Divergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ jedoch nicht absolut. □

Damit ist die Nichtäquivalenz von absoluter und unbedingter Konvergenz bei unendlichen Reihen eine weitere charakteristische Eigenschaft unendlichdimensionaler Banachräume.

2.2.3.4 Lineare Abbildungen

Ein wesentlicher Aspekt der Funktionalanalysis ist die Betrachtung von Abbildungen auf linearen Räumen, dabei nicht nur, aber insbesondere von solchen, die selbst linear sind. Wir fassen zunächst die wichtigsten hierbei erforderlichen Grundbegriffe zusammen; einzelne davon wurden weiter oben schon verwendet. $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$ seien Vektorräume über demselben Körper $\mathbb{K}$ und $\mathcal{A}$ eine Abbildung von $\mathcal{V}_1$ nach $\mathcal{V}_2$ mit Definitionsmenge $\operatorname{dom}\mathcal{A} \subsetneqq \mathcal{V}_1$. Die Menge $\ker\mathcal{A} := \{\, x \in \mathcal{V} \mid \mathcal{A}x = 0 \,\}$ heißt *Kern* von $\mathcal{A}$, die Menge $\operatorname{ran}\mathcal{A} = \{\, \mathcal{A}x \mid x \in \operatorname{dom}\mathcal{A} \,\}$ *Wertemenge* von $\mathcal{A}$. Die Menge $\Gamma(\mathcal{A}) := \{\, (x, \mathcal{A}x) \mid x \in \operatorname{dom}\mathcal{A} \,\} \subset \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ heißt *Graph* von $\mathcal{A}$. Eine Abbildung $\mathcal{B}$ heißt *Fortsetzung* der Abbildung $\mathcal{A}$, wenn $\Gamma(\mathcal{A}) \subset \Gamma(\mathcal{B})$; man schreibt dann $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Eine Abbildung $\mathcal{A} : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{V}_2$ heißt *injektiv*, wenn aus $\mathcal{A}\,x \neq \mathcal{A}\,y$ stets $x \neq y$ folgt, und sie heißt *surjektiv*, wenn $\operatorname{ran}\mathcal{A} = \mathcal{V}_2$ gilt. Eine Abbildung heißt *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Bijektive Abbildungen nennt man auch *invertierbar* oder *umkehrbar*, da es zu einer bijektiven Abbildung $\mathcal{B}$ stets eine eindeutig bestimmte Abbildung $\mathcal{B}^{-1}$ gibt mit $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{B} = \mathcal{B}\,\mathcal{B}^{-1} = \mathbf{1}$. Diese heißt *inverse Abbildung* oder *Umkehrabbildung* von $\mathcal{B}$. Gilt für eine Abbildung $\mathcal{A}$ von einem metrischen Vektorraum $\mathcal{E}_1$ auf einen zweiten metrischen Vektorraum $\mathcal{E}_2$ die Relation $d_1(x, y) = d_2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y)$ für alle $x, y \in \mathcal{E}_1$, dann heißt $\mathcal{A}$ eine *Isometrie*; ist $\mathcal{A}$ zusätzlich bijektiv, dann heißt $\mathcal{A}$ *isometrischer Isomorphismus*.

Nach diesen allgemeinen Vorbemerkungen kommen wir nun zum namensgebenden Begriff des vorliegenden Abschnitts.

2.25 Definition: Eine Abbildung $\mathcal{A}$ zwischen zwei Vektorräumen heißt *linear*, wenn $\mathcal{A}(\,\lambda\, x + \mu\, y\,) = \lambda\,\mathcal{A}\,x + \mu\,\mathcal{A}\,y$ gilt für alle $x, y \in \operatorname{dom}\mathcal{A}$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Daraus folgt für jede lineare Abbildung $\mathcal{A}$ sofort $\mathcal{A}\,0 = 0$. Die Definition sagt mit anderen Worten, daß eine Abbildung zwischen zwei Vektorräumen genau dann linear ist, wenn sie ein Vektorraum-Homomorphismus ist[31]. Ist eine lineare Abbildung $\mathcal{A} : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{V}_2$ bijektiv, dann nennt man $\mathcal{A}$ einen *Isomorphismus*; $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$ heißen dann zueinander *isomorph*. Unter dem

[31] Unter einem Homomorphismus versteht man eine *strukturerhaltende* Abbildung zwischen zwei algebraischen Strukturen. „Strukturerhaltend“ bedeutet dabei, daß unter der Abbildung die Verknüpfungen der einen algebraischen Struktur auf diejenigen der anderen übertragen werden. Damit variiert die Definition, je nachdem um was für algebraische Strukturen es sich dabei handelt.

Abstandskoeffizienten zweier isomorpher normierter Räume $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ versteht man die Größe

$$d(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) := \inf \{ \|\mathcal{T}\| \, \|\mathcal{T}^{-1}\| \mid \mathcal{T} : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2 \text{ ist ein Isomorphismus} \}$$

Ein *Endomorphismus* ist eine lineare Abbildung von $\mathcal{V}$ nach $\mathcal{V}$. Ein Endomorphismus, der ein Isomorphismus ist, heißt *Automorphismus*. Ein Endomorphismus $\mathcal{P}$ auf $\mathcal{V}$ heißt *Projektion*, wenn $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ gilt. Für jede Projektion $\mathcal{P}$ auf $\mathcal{V}$ gilt $\mathcal{V} = \operatorname{ran} \mathcal{P} \oplus \ker \mathcal{P}$. Mit $\mathcal{P}$ ist natürlich auch $\mathcal{Q} = \mathbf{1} - \mathcal{P}$ eine Projektion, denn

$$\mathcal{Q}^2 = (\mathbf{1} - \mathcal{P})^2 = \mathbf{1}^2 - 2\,\mathcal{P} + \mathcal{P}^2 = \mathbf{1} - \mathcal{P} = \mathcal{Q}$$

Hierbei gilt $\operatorname{ran} \mathcal{P} = \ker \mathcal{Q}$ und $\ker \mathcal{P} = \operatorname{ran} \mathcal{Q}$. Ist $\mathcal{A}$ ein Endomorphismus auf einem Vektorraum $\mathcal{V}$ und $\mathcal{U}$ ein Unterraum von $\mathcal{V}$ mit $\mathcal{A}\,\mathcal{U} \subseteqq \mathcal{U}$, dann heißt $\mathcal{U}$ *invariant unter* $\mathcal{A}$ oder kurz $\mathcal{A}$*-invariant*.

Auf den ersten Blick scheinen lineare Abbildungen auf Vektorräumen recht übersichtliche Angelegenheiten zu sein. Der Eindruck täuscht, wenn er auch durch den folgenden Sachverhalt durchaus nahegelegt wird.

2.26 Satz: *Sind $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ Vektorräume über demselben Körper,* B *eine Hamel-Basis von $\mathcal{E}$ und* X *eine Teilmenge von $\mathcal{F}$ mit $|\mathsf{B}| \geqq |\mathsf{X}|$, dann gibt es zu jeder Surjektion $f : \mathsf{B} \longrightarrow \mathsf{X}$ genau eine lineare Abbildung $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ mit*

$$\mathcal{A}\, u = f(u)$$

für alle $u \in \mathsf{B}$. Für $\mathcal{A}$ gilt mit $n \in \mathbb{N}$ für $\{ u_1, u_2, \ldots, u_n \} \subset \mathsf{B}$ und $x = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, u_j \in \mathcal{E}$

$$\mathcal{A}\, x = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, f(u_j).$$

Beweis: B ist eine Hamel-Basis von $\mathcal{E}$, folglich besitzt jedes $x \in \mathcal{E}$ eine eindeutige Darstellung der Form $x = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, u_j$. Damit wird durch $x \longmapsto \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, f(u_j)$ in eindeutiger Weise eine Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{F}$ definiert. Für $\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{A}\, u = f(u)$ und außerdem für alle $x, y \in \mathcal{E}$ mit Darstellungen $x = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, u_j$ und $y = \sum_{j=0}^{n} \beta_j\, u_j$ (die Zahl der Summanden sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit für x und y gleich) und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\mathcal{A}\,(\lambda\, x + \mu\, y) = \mathcal{A} \sum_{j=0}^{n} (\lambda\, \alpha_j + \mu \beta_j)\, u_j = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, f(u_j) + \sum_{j=0}^{n} \beta_j\, f(u_j) = \lambda\, \mathcal{A}\, x + \mu\, \mathcal{A}\, y,$$

das heißt, $\mathcal{A}$ ist linear.
Sei nun $\mathcal{B} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ irgendeine weitere lineare Abbildung mit $\mathcal{B}\, u = f(u)$ für alle $u \in \mathsf{B}$, dann gilt

$$\mathcal{B}\, x = \mathcal{B} \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, u_j = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, \mathcal{B}\, u_j = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, f(u_j) = \mathcal{A}\, x,$$

also $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. □

Lineare Abbildungen sind somit durch ihre Werte auf einer Hamel-Basis bereits eindeutig bestimmt. Dabei können diese Werte zur Konstruktion einer linearen Abbildung beliebig vorgegeben werden. Die Existenz einer Hamel-Basis wird durch Satz 2.9 für jeden Vektorraum garantiert. Wirklich hilfreich ist das jedoch nur für endlich- und abzählbar unendlichdimensionale Vektorräume. Bei überabzählbar unendlichdimensionalen Vektorräumen ist es schon gar nicht möglich, überhaupt eine Hamel-Basis in konstruktiver Weise anzugeben, und die Größe solcher Basen macht es auch nicht gerade einfacher. Dazu später mehr.

Wie üblich ist auch bei linearen Abbildungen die Unterscheidung von stetigen und nichtstetigen Vetretern von besonderer Bedeutung. Die Abgründe, die sich dabei auftun, lassen sich bereits anhand des Falls der reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen erahnen; faßt man $\mathbb{R}$ als unendlichdimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraum (und damit als unendlichdimensionalen Banachraum) auf, kann man neben den wohlbekannten stetigen linearen Funktionen, die alle von der Form $f(x) = a\,x$ sind[32], auch unstetige lineare Funktionen konstruieren. Dieser Sachverhalt wurde von Hamel entdeckt [138], der dabei zeigte, daß es sich dabei genau um die unstetigen Lösungen der Cauchyschen Funktionalgleichung

$$f(\,x+y\,) = f(x) + f(y)$$

handelt [138]. Ist $\mathrm{B} = \{a_\gamma\}_{\gamma<\Gamma}$ eine Hamel-Basis von $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$[33] und damit jede reelle Zahl in der Form $x = \sum_{j=1}^{n_x} q_j\,a_j$ darstellbar mit $q_1, q_2, \ldots, q_{n_x} \in \mathbb{Q}$, dann definiert man für beliebige $x \in \mathbb{R}$ die Funktion f durch

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n_x} f_j\,q_j$$

mit Zahlen $f_j \in [-\infty, \infty]$. Sofern jeweils die Verhältnisse $f_1/q_1, f_2/q_2, \ldots, f_{n_x}/q_{n_x}$ nicht alle denselben Wert annehmen, erhält man für jede Wahl der f_j eine unstetige $\mathbb{Q}$-lineare Funktion; diese Funktionen sind sogar nirgends stetig, und ihre Graphen füllen die x, y-Ebene jeweils vollständig aus[34].

Es handelt sich hierbei lediglich um einen Spezialfall eines allgemeinen und äußerst wichtigen, bei unendlichdimensionalen Banachräumen auftretenden Sachverhalts im Zusammenhang mit linearen Abbildungen, der uns in diesem Buch wiederholt begegnen wird. Kurz gesagt bilden die merkwürdigen linearen Abbildungen den Normalfall, während diejenigen,

[32] Daß in der Schulmathematik praktisch durchgehend, aber fälschlicherweise nicht nur diese Funktionen, sondern auch die affinen, also solche der Form $f(x) = a\,x + b$ als „linear“ bezeichnet werden, ist ebenso haarsträubend wie ärgerlich.

[33] Obwohl B natürlich eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, gilt $|\mathrm{B}| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, wie Lemma 2.8 zeigt. Siehe dazu auch Satz 2.31 weiter unten.

[34] Solche Funktionen bilden nicht etwa eine Besonderheit, sondern den Normalfall unter den Lösungen der Cauchyschen Funktionalgleichung. Es gibt insgesamt $|\mathbb{R}|^{|\mathbb{R}|} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$ Lösungen für diese Gleichung, von welchen nur $\mathfrak{c}$ stetig und folglich $2^{\mathfrak{c}}$ nirgends stetig sind.

die mancher womöglich gerne als Standard hätte, die großen Ausnahmen sind. Grundlage dafür ist das folgende

2.27 Lemma: *$\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ seien zwei Banachräume über demselben Körper mit Normen $\| \ \|_{\mathcal{E}}$ und $\| \ \|_{\mathcal{F}}$. Dann sind für jede lineare Abbildung $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathcal{A}$ ist gleichmäßig stetig auf ganz $\mathcal{E}$,

(ii) $\mathcal{A}$ ist stetig auf ganz $\mathcal{E}$,

(iii) $\mathcal{A}$ ist stetig in einem Vektor $x_0 \in \mathcal{E}$,

(iv) Für alle $x \in \mathcal{E}$ gibt es ein $C > 0$, sodaß $\| \mathcal{A}\, x \|_{\mathcal{F}} \leqq C \, \|x\|_{\mathcal{E}}$.

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii), (ii) $\Longrightarrow$ (iii): klar.
(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_0 = 0$. Da $\mathcal{A}$ stetig in 0 ist, gibt es ein $\lambda > 0$, sodaß $\| \mathcal{A}\, x \|_{\mathcal{F}} \leqq 1$ für alle $x \in \mathcal{E}$ mit $\|x\|_{\mathcal{E}} \leqq \lambda$. Wählen wir hier speziell $x = \frac{\lambda}{\|y\|_{\mathcal{E}}} \, y$ für ein beliebiges nichtverschwindendes $y \in \mathcal{E}$, erhalten wir $\|x\|_{\mathcal{E}} = \lambda$, also auch

$$\| \mathcal{A}\, x\|_{\mathcal{F}} = \left\| \frac{\lambda}{\|y\|_{\mathcal{E}}} \mathcal{A}\, y \right\|_{\mathcal{F}} = \frac{\lambda}{\|y\|_{\mathcal{E}}} \, \| \mathcal{A}\, y \|_{\mathcal{F}} \leqq 1$$

und damit

$$\| \mathcal{A}\, y \|_{\mathcal{F}} \leqq \frac{1}{\lambda} \, \|x\|_{\mathcal{E}},$$

also die Behauptung für $C > 1/\lambda$.
(iv) $\Longrightarrow$ (i): Für beliebige $x_1, x_2 \in \mathcal{E}$ gilt

$$\| \mathcal{A}\, x_1 - \mathcal{A}\, x_2 \|_{\mathcal{F}} = \| \mathcal{A}\,(\, x_1 - x_2\,) \|_{\mathcal{F}} < C \, \| \, x_1 - x_2 \, \|_{\mathcal{E}}.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ erhält man dann mit $\delta = \varepsilon/C$ aus $\| \, x_1 - x_2 \, \|_{\mathcal{E}} \leqq \delta$ stets $\| \mathcal{A}\, x_1 - \mathcal{A}\, x_2 \|_{\mathcal{F}} < \varepsilon$, das heißt, $\mathcal{A}$ ist gleichmäßig stetig auf $\mathcal{E}$. □

Gemäß den ersten drei Aussagen von Lemma 2.27 ist eine lineare Abbildung von einem Banachraum auf einen anderen, die in einem Punkt stetig ist, immer schon stetig und sogar gleichmäßig stetig auf dem gesamten Ausgangsraum. Die vierte Aussage beschreibt die wichtigste Eigenschaft stetiger Abbildungen überhaupt und gibt Anlaß zur nächsten

2.28 Definition: Ist $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ eine lineare Abbildung zwischen den Banachräumen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$, dann heißt die Größe $\| \mathcal{A} \| := \min \{\, C \in [0, \infty] \mid \| \mathcal{A}\, x \|_{\mathcal{F}} \leqq C \, \|x\|_{\mathcal{E}} \,\} \in [0, \infty]$ *Operatornorm* der Abbildung $\mathcal{A}$.

Der Nachweis der Normeigenschaften erfolgt durch direktes Nachrechnen. Ferner gilt die unmittelbar ersichtliche Abschätzung $\| \mathcal{A}\, x \|_{\mathcal{F}} \leqq \| \mathcal{A}\| \, \|x\|_{\mathcal{E}}$. Man zeigt leicht, daß für die Operatornorm

$$\begin{aligned} \| \mathcal{A}\| &= \inf \{ \, C \in [0, \infty] \mid \| \mathcal{A}\, x \|_{\mathcal{F}} \leqq C \, \|x\|_{\mathcal{E}} \, \} \\ &= \sup_{\substack{x \in \operatorname{dom} \mathcal{A} \\ \|x\|_{\mathcal{E}} < 1}} \| \mathcal{A}\, x \| = \sup_{\substack{x \in \operatorname{dom} \mathcal{A} \\ \|x\|_{\mathcal{E}} \leqq 1}} \| \mathcal{A}\, x \| = \sup_{\substack{x \in \operatorname{dom} \mathcal{A} \\ \|x\|_{\mathcal{E}} = 1}} \| \mathcal{A}\, x \| = \sup_{\substack{x \in \operatorname{dom} \mathcal{A} \\ x \neq 0}} \frac{\| \mathcal{A}\, x \|_{\mathcal{F}}}{\|x\|_{\mathcal{E}}} \end{aligned}$$

gilt; diese Relationen lassen sich jeweils alternativ als Definitionen verwenden. Wir bemerken ausdrücklich, daß die so definierte Norm eines Operators unendlich sein kann und halten das neben ein paar anderen Dingen gleich formell fest.

2.29 Definition: $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ seien Banachräume und $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ eine lineare Abbildung.

(i) $\mathcal{A}$ heißt *beschränkt*, wenn $\| \mathcal{A} \| < \infty$ gilt; $\mathcal{A}$ heißt *unbeschränkt*, wenn $\| \mathcal{A} \| = \infty$ gilt.

(ii) $\mathcal{A}$ heißt *abgeschlossen*, wenn $\Gamma(\mathcal{A})$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ ist.

(iii) $\mathcal{A}$ heißt *abschließbar*, wenn es eine abgeschlossene lineare Abbildung $\mathcal{B} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ gibt mit $\overline{\Gamma(\mathcal{A})} = \Gamma(\mathcal{B})$. Dann heißt $\mathcal{B}$ *Abschluß* von $\mathcal{A}$, und man schreibt $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{A}}$.

Mit Definition 2.29 ergibt sich sofort folgender fundamentaler Sachverhalt: *Die unbeschränkten Abbildungen sind genau die unstetigen Abbildungen*. Insbesondere sind unbeschränkte lineare Abbildungen *unstetig in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs*[35].

Der Unterschied zwischen „stetig" und „abgeschlossen" ist subtil. Das wird besonders deutlich, wenn man die Begriffe mit Hilfe konvergenter Folgen beschreibt. Eine lineare Abbildung $\mathcal{A}$ ist genau dann stetig, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \quad \Longrightarrow \quad \Big(\lim_{n \to \infty} \mathcal{A}\, x_n = y \;\wedge\; \mathcal{A}\, x = y \Big)$$

gilt; sie ist abgeschlossen, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\operatorname{dom} \mathcal{A}$

$$\Big(\lim_{n \to \infty} x_n = x \;\wedge\; \lim_{n \to \infty} \mathcal{A}\, x_n = y \Big) \quad \Longrightarrow \quad \big(x \in \operatorname{dom} \mathcal{A} \;\wedge\; \mathcal{A}\, x = y \big)$$

gilt. Folglich ist jede beschränkte lineare Abbildung von einem Banachraum auf einen zweiten abgeschlossen, dagegen ist keineswegs jede abgeschlossene lineare Abbildung beschränkt. Ist jedoch $\mathcal{A}$ abgeschlossen und $\mathcal{B}$ beschränkt, dann ist auch $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ abgeschlossen. Auch die Eigenschaft, unbeschränkt zu sein, läßt sich in dieser Weise veranschaulichen. Zu jeder

[35] Man beachte, daß sich die Begriffe der Beschränktheit und der Unbeschränktheit nicht so, wie sie aus der gewöhnlichen Analysis angewandt auf skalare Funktionen bekannt sind, übertragen lassen. Wenn man versucht, sich eine „beschränkte lineare Funktion" vorzustellen, erkennt man schnell, warum man in der Funktionalanalysis Beschränktheit nicht mit der Existenz irgendeiner oberen Schranke gleichsetzen darf, da solche Abbildungen notwendigerweise alles auf den Nullvektor abbilden würden.

unbeschränkten linearen Abbildung $\mathcal{A}$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ normierter Vektoren in $\operatorname{dom}\mathcal{A}$, sodaß die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \|\mathcal{A}\,x_n\|$ unbeschränkt ist. Hiermit läßt sich die zunächst etwas unklare Wahl der Bezeichnung des Attributs „unbeschränkt" am anschaulichsten rechtfertigen.

Die Menge aller beschränkten linearen Abbildungen von einem normierten Raum $\mathcal{E}$ in einen zweiten normierten Raum $\mathcal{F}$ bezeichnet man mit $\mathscr{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$. Das nächste Resultat beschreibt, welche Voraussetzungen an den Ausgangs- und den Zielraum zu stellen sind, damit ein solcher Raum beschränkter Abbildungen vollständig ist.

2.30 Satz: *Ist $\mathcal{E}$ ein normierter Raum und $\mathcal{F}$ ein Banachraum, dann ist $\mathscr{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ ebenfalls ein Banachraum.*

Beweis: $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Cauchy-Folge in $\mathscr{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$ gebe es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $n, m > n_0$

$$\|\mathcal{A}_m - \mathcal{A}_n\| < \varepsilon$$

gilt. Daraus folgt für alle $x \in \mathcal{E}$

$$\|\mathcal{A}_m x - \mathcal{A}_n x\|_{\mathcal{F}} \leqq \|\mathcal{A}_m - \mathcal{A}_n\|\,\|x\|_{\mathcal{E}} < \varepsilon\,\|x\|_{\mathcal{E}}, \tag{2.11}$$

was zeigt, daß für alle $x \in \mathcal{E}$ die Folge $(\mathcal{A}_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{F}$ ist. Da $\mathcal{F}$ vollständig ist, konvergiert jede dieser Folgen gegen einen Grenzwert in $\mathcal{F}$, wodurch eine Abbildung $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ mit $\mathcal{A}\,x := \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{A}_n x$ definiert wird. Für diese gilt folgendes:

1. Für alle $x, y \in \mathcal{E}$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ist

   $$\mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n(\lambda x + \mu y) = \lambda \lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n x + \mu \lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n y = \lambda \mathcal{A}\,x + \mu \mathcal{A}\,y,$$

   $\mathcal{A}$ ist somit linear.

2. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist

   $$\big|\,\|\mathcal{A}_m\| - \|\mathcal{A}_n\|\,\big| \leqq \|\mathcal{A}_m - \mathcal{A}_n\|,$$

   folglich ist $(\|\mathcal{A}_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und konvergiert damit gegen einen Grenzwert $g \in \mathbb{R}$. Damit folgt für alle $x \in \mathcal{E}$

   $$\|\mathcal{A}\,x\|_{\mathcal{F}} = \Big\|\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n x\Big\|_{\mathcal{F}} = \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{A}_n x\|_{\mathcal{F}} \leqq \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{A}_n\|\,\|x\|_{\mathcal{E}} = g\,\|x\|_{\mathcal{E}},$$

   und somit ist $\mathcal{A}$ beschränkt mit $\|\mathcal{A}\| \leqq g$.

3. Aus (2.11) folgt zunächst für alle $x \in \mathcal{E}$ und alle $n > n_0$

   $$\lim_{m\to\infty} \|\mathcal{A}_m x - \mathcal{A}_n x\|_{\mathcal{F}} = \|\mathcal{A}\,x - \mathcal{A}_n x\|_{\mathcal{F}} < \varepsilon\,\|x\|_{\mathcal{E}}$$

   und weiter

   $$\sup_{\substack{x\in\mathcal{E}\\ x\neq 0}} \frac{\|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_n)\,x\|_{\mathcal{F}}}{\|x\|_{\mathcal{E}}} = \|\mathcal{A} - \mathcal{A}_n\| < \varepsilon$$

   für alle $\varepsilon > 0$ und alle $n > n_0$. Folglich gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathcal{A} - \mathcal{A}_n\| = 0$, also auch $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$.

Cauchy-Folgen aus $\mathscr{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ haben somit stets einen Grenzwert in $\mathscr{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, und folglich ist $\mathscr{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ ein Banachraum. $\square$

$\mathscr{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$-Räume weisen jedoch noch mehr Struktur auf, denn durch Hintereinanderausführen zweier beschränkter Abildungen erhalt man wieder eine solche. Man kann sogar noch etwas mehr beweisen.

2.31 Satz: *Sind $\mathcal{E},\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ normierte Räume sowie $\mathcal{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ und $\mathcal{B} \in \mathscr{L}(\mathcal{F},\mathcal{G})$, dann gilt $\mathcal{A}\,\mathcal{B} \in \mathscr{L}(\mathcal{E},\mathcal{G})$ und $\|\,\mathcal{A}\,\mathcal{B}\,\| \leqq \|\,\mathcal{A}\|\,\|\mathcal{B}\|$.*

Beweis: $\mathcal{A}\,\mathcal{B}$ ist natürlich linear; außerdem gilt für alle $x \in \mathcal{E}$

$$\|\,\mathcal{A}\,\mathcal{B}\,x\,\| \leqq \|\,\mathcal{A}\|\,\|\,\mathcal{B}\,x\,\| \leqq \|\,\mathcal{A}\|\,\|\mathcal{B}\|\,\|x\|,$$

also $\|\,\mathcal{A}\,\mathcal{B}\,\| \leqq \|\,\mathcal{A}\|\,\|\mathcal{B}\|$, und damit ist $\mathcal{A}\,\mathcal{B}$ beschränkt. $\square$

Häufig hat man es zunächst mit stetigen Abbildungen auf dichten Teilräumen des betrachteten Banachraums zu tun. Das spielt jedoch keine Rolle, denn der folgende Satz zeigt, daß man solche Abbildungen stetig auf den ganzen Raum fortsetzen kann.

2.32 Satz: *$\mathcal{D}$ sei ein dichter Unterraum eines normierten Raums $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ ein Banachraum, außerdem sei $\mathcal{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{D},\mathcal{F})$. Dann gibt es genau ein $\mathcal{B} \in \mathscr{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ mit $\mathcal{B}\restriction\mathcal{D} = \mathcal{A}$, und es gilt $\|\mathcal{B}\| = \|\mathcal{A}\|$.*

Beweis: Da $\mathcal{D}$ dicht in $\mathcal{E}$ ist, kann man zu jedem $x \in \mathcal{E}$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}$ wählen mit $\lim\limits_{n\to\infty} = x \in \mathcal{E}$. Eine solche Folge ist stets eine Cauchy-Folge in $\mathcal{D}$, und da $\mathcal{A}$ nach Lemma 2.27 gleichmäßig stetig ist, ist $(\mathcal{A}\,x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{F}$. Weil $\mathcal{F}$ ein Banachraum ist, konvergiert daher $(\mathcal{A}\,x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert $y \in \mathcal{F}$. Damit wird durch $\mathcal{B} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ mit $\mathcal{B}\,x = y$ in eindeutiger Weise eine lineare Abbildung $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{E}$ definiert, welche die gewünschten Eigenschaften hat. $\square$

Das nächste Resultat wird sich als sehr nützlich für Kapitel 4 erweisen; es stellt eine Verallgemeinerung der geometrischen Reihe sowie deren Summenformel aus der elementaren Analysis dar und liefert gleichzeitig ein Verfahren, mit dem gelegentlich inverse Abbildungen bestimmt werden können.

2.33 Satz: *$\mathcal{E}$ sei ein normierter Raum und $\mathcal{A}$ ein beschränkter Endomorphismus auf $\mathcal{E}$, für den die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n$ konvergiert. Dann ist die Abbildung $\mathbf{1} - \mathcal{A}$ invertierbar, und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n = (\,\mathbf{1} - \mathcal{A}\,)^{-1}. \tag{2.12}$$

Beweis: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt zunächst

$$(\mathbf{1} - \mathcal{A}) \sum_{n=0}^{m} \mathcal{A}^n = \sum_{n=0}^{m} \mathcal{A}^n (\mathbf{1} - \mathcal{A}) = \sum_{n=0}^{m} \mathcal{A}^n - \sum_{n=0}^{m} \mathcal{A}^{n+1} = \mathbf{1} - \mathcal{A}^{n+1}.$$

Nach Voraussetzung gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{A}^n = 0$, und mit Satz 2.31 folgt einerseits

$$\begin{aligned}(\mathbf{1} - \mathcal{A}) \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n &= (\mathbf{1} - \mathcal{A}) \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \mathcal{A}^n \\ &= \lim_{m\to\infty} \left[(\mathbf{1} - \mathcal{A}) \sum_{n=0}^{m} \mathcal{A}^n \right] = \lim_{m\to\infty} (\mathbf{1} - \mathcal{A}^{n+1}) = \mathbf{1}\end{aligned}$$

und andererseits analog

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n (\mathbf{1} - \mathcal{A}) = \mathbf{1}. \qquad \square$$

Die Reihe (2.12) heißt *Neumann-Reihe*[36] der Abbildung $\mathcal{A}$. Wenn der betrachtete normierte Raum vollständig ist, genügt bereits eine einfachere Voraussetzung; das zeigt das folgende

2.34 Corollar: *Ist $\mathcal{E}$ ein Banachraum und $\mathcal{A}$ ein beschränkter Endomorphismus auf $\mathcal{E}$ mit $\| \mathcal{A} \| < 1$, dann ist die Abbildung $\mathbf{1} - \mathcal{A}$ invertierbar, und es gilt*

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n = (\mathbf{1} - \mathcal{A})^{-1}$,

(ii) $\| (\mathbf{1} - \mathcal{A})^{-1} \| \leqq \dfrac{1}{1 - \| \mathcal{A} \|}$.

Beweis: Für $\| \mathcal{A} \| < 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| \mathcal{A}^n \| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \| \mathcal{A} \|^n < \infty,$$

das heißt, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n$ konvergiert absolut. Da $\mathcal{E}$ ein Banachraum ist, konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n$ nach Satz 2.21 auch selbst. Nach Satz 2.33 ist daher die Abbildung $\mathbf{1} - \mathcal{A}$ invertierbar. Für die Norm der inversen Abbildung gilt

$$\| (\mathbf{1} - \mathcal{A})^{-1} \| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n \right\| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \| \mathcal{A} \|^n = \frac{1}{1 - \| \mathcal{A} \|}. \qquad \square$$

[36] Benannt ausnahmsweise einmal nicht nach John von Neumann, sondern nach Carl Neumann, der sie in einer Abhandlung über Potentialtheorie einführte [266].

Wir kommen nun zu zwei Folgerungen aus Satz 1.11, die zu den wichtigsten Aussagen der gesamten Funktionalanalysis zählen. Für die erste davon sei an eine grundlegende Eigenschaft stetiger Abbildungen erinnert; diese sind bekanntlich dadurch charakterisiert, daß bei ihnen die Urbilder offener Mengen stets offen und die Urbilder abgeschlossener Mengen stets abgeschlossen sind. Bei offenen Abbildungen ist das nicht so; sie bilden zwar offene Mengen auf offene Mengen ab, abgeschlossene Mengen im allgemeinen jedoch keinesfalls auf abgeschlossene Mengen. Stattdessen gilt der

2.35 Satz von der offenen Abbildung: *Sind $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ Banachräume, dann ist eine stetige lineare Abbildung $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ genau dann offen, wenn sie surjektiv ist.*

Beweis:[37] „$\Longrightarrow$“: Wir betrachten offene Kugeln $\mathsf{K}_r(a) = \{\, x \in \mathcal{E} \mid \|\, x - a\,\|_{\mathcal{E}} < r\,\}$ in $\mathcal{E}$ beziehungsweise $\mathsf{K}'_r(b) = \{\, y \in \mathcal{F} \mid \|\, y - b\,\|_{\mathcal{F}} < r\,\}$ in $\mathcal{F}$. Die Abbildung $\mathcal{A}$ sei linear und offen, folglich gibt es für alle $\delta > 0$ ein $\varepsilon > 0$, sodaß $\mathsf{K}'_\varepsilon(0) \subset \mathcal{A}\,\mathsf{K}_\delta(0)$. Damit gibt es für alle $y \in \mathcal{F}$ ein $n \in \mathbb{N}$, sodaß $y \in \mathsf{K}'_{n\,\varepsilon}(0)$, es gilt also $\mathcal{F} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{K}'_{n\,\varepsilon}(0)$. Da außerdem $\mathsf{K}'_\varepsilon(0) \subset \mathcal{A}\,\mathsf{K}_{n\,\delta}(0)$ ist, folgt $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}\,\mathcal{E}$. Daneben gilt trivialerweise $\mathcal{A}\,\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, zusammen also $\mathcal{A}\,\mathcal{E} = \mathcal{F}$, und $\mathcal{A}$ ist surjektiv.

„$\Longleftarrow$“: Nun sei $\mathcal{A}$ surjektiv. Wir zeigen zuerst, daß es ein $\varepsilon > 0$ und ein $\rho > n$ gibt mit

$$\mathsf{K}'_\varepsilon(0) \subset \overline{\mathcal{A}\,\mathsf{K}_\rho(0)} \tag{2.13}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\mathcal{A}\,\mathcal{E} = \mathcal{F}$ gilt $\mathcal{F} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}\,\mathsf{K}_n(0) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathcal{A}\,\mathsf{K}_n(0)}$, und da $\mathcal{F}$ nach Satz 1.11 von zweiter Kategorie ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, ein $\varepsilon > 0$ und ein $y \in \mathcal{F}$, sodaß $\mathsf{K}'_\varepsilon(y) \subset \overline{\mathcal{A}\,\mathsf{K}_n(0)}$ gilt. Nun gibt es zu jedem $y \in \mathcal{F}$ ein $x \in \mathcal{E}$ mit $\mathcal{A}x = y$, also ist

$$\mathsf{K}'_\varepsilon(0) \subset \overline{\mathcal{A}\,\mathsf{K}_n(0)} - y = \overline{\mathcal{A}\,\mathsf{K}_n(0)} - \mathcal{A}x = \overline{\mathcal{A}\,(\,\mathsf{K}_n(0) - x\,)} = \overline{\mathcal{A}\,\mathsf{K}_n(-x)}. \tag{2.14}$$

Wählt man nun $\rho \geqq n + \|x\|_{\mathcal{E}}$, so folgt $\overline{\mathcal{A}\,\mathsf{K}_n(-x)} \subset \overline{\mathcal{A}\,\mathsf{K}_\rho(0)}$ und hieraus mit (2.14) wie gewünscht (2.13).

Als nächstes zeigen wir, daß es ein $\rho > 0$ gibt mit

$$\mathsf{K}'_\varepsilon(0) \subset \mathcal{A}\,\mathsf{K}_\rho(0). \tag{2.15}$$

Dazu konstruieren wir für jedes $y \in \mathcal{F}$ mit $\|y\|_{\mathcal{F}} < \rho$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathsf{K}_{\varepsilon/2^n}(0)$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}\,x_n = y, \tag{2.16}$$

indem wir mit vollständiger Induktion zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Big\|\, y - \sum_{j=1}^{n} \mathcal{A}\,x_j \Big\|_{\mathcal{F}} < \frac{\rho}{2^n} \tag{2.17}$$

[37] Der hier vorgestellte Beweis stammt von Schauder [327].

gilt. Zunächst sei $x_1 \in \mathrm{K}_\varepsilon(0)$ so, daß $\| y - \mathcal{A}\, x_1 \|_\mathcal{F} < \rho$; ein solches gibt es gemäß (2.13). Nun sei $x_2 \in \mathrm{K}_{\varepsilon/2}(0)$ mit $\| y - \mathcal{A}\, x_1 - \mathcal{A}\, x_2 \|_\mathcal{F} < \rho/2$; auch dessen Existenz ist durch (2.13) garantiert. Hat man das bis zu irgendeinem festen n wiederholt und so ein $x_n \in \mathrm{K}_{\varepsilon/2^{n-1}}(0)$ gefunden, das die Ungleichung (2.17) erfüllt, gibt es dazu vermöge (2.13) stets ein $x_{n+1} \in \mathrm{K}_{\varepsilon/2^n}(0)$ mit

$$\left\| y - \sum_{j=1}^{n} \mathcal{A}\, x_j - \mathcal{A}\, x_{n+1} \right\|_\mathcal{F} = \left\| y - \sum_{j=1}^{n+1} \mathcal{A}\, x_j \right\|_\mathcal{F} < \frac{\rho}{2^n}.$$

Damit gilt (2.17) für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun ist nach Voraussetzung $\|x_j\|_\mathcal{E} < \varepsilon/2^{j-1}$ und damit

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_\mathcal{E} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j-1}} = 2\,\varepsilon, \tag{2.18}$$

das heißt, die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ konvergiert absolut; da $\mathcal{E}$ vollständig ist, ist sie nach Satz 2.21 auch konvergent. Für den Grenzwert $\sum_{j=0}^{\infty} x_j := x$ gilt aufgrund der Abschätzung (2.18)

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j \right\|_\mathcal{E} \leqq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_\mathcal{E} < 2\,\varepsilon,$$

also $x \in \mathrm{K}_{2\varepsilon}(0)$, und wegen (2.16) außerdem $\mathcal{A}\, x = y$. Damit gilt $\mathrm{K}'_\varepsilon(0) \subset \mathcal{A}\, \mathrm{K}_{2\varepsilon}(0)$, also mit $\rho = 2\,\varepsilon$ genau (2.15).
Damit können wir nun zeigen, daß $\mathcal{A}$ offen ist. Für $x \in \mathcal{E}$ und $\delta > 0$ gilt

$$\mathcal{A}\, \mathrm{K}_\delta(x) = \mathcal{A}\,(\, \mathrm{K}_\delta(0) + x\,) = \frac{\delta}{\rho}\, \mathcal{A}\, \mathrm{K}_\rho(0) + \mathcal{A}\, x,$$

mit (2.15) also

$$\frac{\delta}{\rho}\, \mathrm{K}'_\varepsilon(0) + \mathcal{A}\, x = \mathrm{K}_{\delta\,\varepsilon/\rho}(\mathcal{A}\, x) \subset \mathcal{A}\, \mathrm{K}_\varepsilon(x).$$

Da jede offene Teilmenge U von $\mathcal{E}$ eine offene Kugel enthält, folgt daraus

$$\mathrm{K}_{\delta\,\varepsilon/\rho}(\mathcal{A}\, x) \subset \mathcal{A}\, \mathrm{U}$$

für alle $x \in \mathrm{U}$, das heißt, für jeden Punkt in $\mathcal{A}\,\mathrm{U}$ gibt es eine offene Umgebung, die ganz in $\mathcal{A}\,\mathrm{U}$ ist, und damit ist $\mathcal{A}\,\mathrm{U}$ für jedes offene $\mathrm{U} \subset \mathcal{E}$ offen. □

Eine unmittelbare Konsequenz ist das folgende

2.36 Corollar: *$\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ seien Banachräume. Ist $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ eine stetige lineare bijektive Abbildung, dann ist ihre Umkehrabbildung $\mathcal{A}^{-1}$ stetig*[38].

[38] Dieses Resultat wurde von Banach gefunden [19]. Da es zum Satz von der offenen Abbildung äquivalent ist, wurde dieser somit indirekt ebenfalls von Banach entdeckt.

Eine weitere Konsequenz aus dem Satz von der offenen Abbildung ist nicht ganz so unmittelbar klar, sie ergibt sich aber sehr einfach aus obigem Corollar[39].

2.37 Satz vom abgeschlossenen Graphen: *$\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ seien Banachräume und $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ eine lineare Abbildung. Ist der Graph von $\mathcal{A}$ abgeschlossen, dann ist $\mathcal{A}$ stetig.*

Beweis: $\Gamma(\mathcal{A})$ ist als abgeschlossener Unterraum des Banachraums $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ selbst ein Banachraum. Wir betrachten die Projektionen $\mathcal{P}_{\mathcal{E}} : \Gamma(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{E}$ mit $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}(x, y) := x$ und $\mathcal{P}_{\mathcal{F}} : \Gamma(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{F}$ mit $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}(x, y) := y$. Das sind stetige lineare Abbildungen, und für sie gilt die Relation $\mathcal{A} = \mathcal{P}_{\mathcal{F}} \circ \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{-1}$. Als Projektion auf das Argument ist $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ bijektiv, nach Corollar 2.36 ist somit $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{-1}$ stetig, und damit ist auch $\mathcal{A}$ stetig. □

Satz 2.37 liefert selbst wiederum unmittelbar ein bedeutendes

2.38 Corollar: *Sind $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ Banachräume und ist die lineare Abbildung $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ abgeschlossen mit $\operatorname{dom} \mathcal{A} = \mathcal{E}$, dann ist $\mathcal{A}$ beschränkt.*

Interessanter als der Satz selbst ist dabei dessen Gegenaussage, die einmal mehr ein Beispiel für die besonderen Eigenschaften unbeschränkter Operatoren darstellt. Wir halten sie daher trotz ihrer Offensichtlichkeit eigens explizit fest.

2.39 Corollar: *Sind $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ Banachräume und ist $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ eine lineare unbeschränkte abgeschlossene Abbildung, dann ist $\operatorname{dom} \mathcal{A}$ ein echter Unterraum von $\mathcal{E}$.*

Unbeschränkte abgeschlossene Operatoren können somit nie auf dem ganzen Banachraum, auf dem sie wirken, definiert sein. Das macht solche Abbildungen ziemlich sperrig in der Handhabung; wir kommen weiter unten darauf zurück.

Die zweite Folgerung aus dem Satz von Baire, die wir hier betrachten, besagt, daß unter geeigneten Voraussetzungen aus der punktweisen Beschränktheit einer Familie linearer Abbildungen bereits die Beschränktheit der gesamten Familie in der Operatornorm folgt. Das ist die Aussage vom

2.40 Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit: *Es seien $\mathcal{E}$ ein Banachraum, $\mathcal{F}$ ein normierter Raum und $\boldsymbol{\mathcal{A}} \subset \mathscr{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ mit $\sup\limits_{\mathcal{A} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}} \| \mathcal{A} x \|_{\mathcal{F}} < \infty$ für alle $x \in \mathcal{E}$. Dann gilt $\sup\limits_{\mathcal{A} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}} \| \mathcal{A} \| < \infty$.*

Beweis:[40] Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{E}_n := \{ x \in \mathcal{E} \mid \sup\limits_{\mathcal{A} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}} \| \mathcal{A} x \|_{\mathcal{F}} < n \}$. Dann gilt einerseits für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n = \bigcap_{\mathcal{A} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}} \{ x \in \mathcal{E} \mid \| \mathcal{A} x \|_{\mathcal{F}} < n \},$$

[39] Auch dieser Satz stammt von Banach [21].

[40] Der Satz wurde erstmals von Banach [18] und Hahn [131] bewiesen, allerdings ohne Verwendung des Kategorienprinzips; vergleiche auch [24] und [348]. Die Verwendung eines Kategorienarguments ist eine Idee von Stanislaw Saks.

das heißt, jedes $\mathcal{E}_n$ ist der Durchschnitt der Urbilder der abgeschlossenen Kugel

$$\overline{\mathrm{K}_n(0)} = \{\, y \in \mathcal{F} \mid \|y\|_{\mathcal{F}} < n \,\}$$

unter den $\mathcal{A}$. Diese sind sämtlich stetig, folglich sind alle $\mathcal{E}_n$ Durchschnitte abgeschlossener Mengen und damit selbst abgeschlossen. Andererseits gilt

$$\mathcal{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n,$$

und da $\mathcal{E}$ vollständig ist, enthält nach Satz 1.11 mindestens ein $\mathcal{E}_n$ eine offene Kugel. Damit gibt es für ein $N \in \mathbb{N}$, ein $x_0 \in \mathcal{E}$ und ein $\varepsilon > 0$, sodaß für alle $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ mit $\| x - x_0 \|_{\mathcal{E}} < \varepsilon$ auch $x \in \mathcal{E}_N$ gilt. Daraus folgt für $x \in \mathcal{E}$ mit $\|x\|_{\mathcal{E}} < \varepsilon$ und alle $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \| \mathcal{A}\, x \|_{\mathcal{F}} &= \| \mathcal{A}\,(\, x + x_0 - x_0 \,) \|_{\mathcal{F}} = \| \mathcal{A}\,(\, x + x_0 \,) - \mathcal{A}\, x_0 \|_{\mathcal{F}} \\ &\leqq \| \mathcal{A}\,(\, x + x_0 \,) \|_{\mathcal{F}} + \| \mathcal{A}\, x_0 \|_{\mathcal{F}} \leqq 2\, N. \end{aligned}$$

Lassen wir stattdessen $x \in \mathcal{E}$ mit beliebiger Norm zu, gilt für alle $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ und $0 < \eta < \varepsilon$

$$\left\| \mathcal{A}\, \frac{\eta}{\|x\|_{\mathcal{E}}}\, x \right\|_{\mathcal{F}} \leqq 2\, N,$$

also auch

$$\| \mathcal{A}\, x \|_{\mathcal{F}} \leqq \frac{2\, N}{\eta}\, \|x\|_{\mathcal{E}}$$

und damit $\| \mathcal{A} \| \leqq 2\, N/\eta < \infty$ für alle $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$. □

Eine erstaunliche Konsequenz aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ergibt sich, wenn man Folgen stetiger linearer Abbildungen betrachtet. Während aus der punktweisen Konvergenz einer Folge stetiger reeller Funktionen keineswegs die Stetigkeit der Grenzfunktion folgt – hierzu ist die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge erforderlich – ist das bei linearen Abbildungsfolgen auf Banachräumen anders.

2.41 Corollar: *Es seien $\mathcal{E}$ ein Banachraum, $\mathcal{F}$ ein normierter Raum und $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Ist für jedes $x \in \mathcal{E}$ die Folge $(\mathcal{A}_n\, x)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$ konvergent, dann wird durch $\mathcal{A}\, x := \lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n\, x$ eine Abbildung $\mathcal{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ definiert.*

Beweis: Nach Satz 2.30 ist $\mathcal{A}$ linear. In einem normierten Raum ist jede konvergente Folge beschränkt, damit ist $\sup_{n \in \mathbb{N}} \| \mathcal{A}_n\, x \|_{\mathcal{F}} < \infty$ für alle $x \in \mathcal{E}$, und nach Satz 2.35 folgt

$$\| \mathcal{A}\, x \|_{\mathcal{F}} = \Big\| \lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n\, x \Big\|_{\mathcal{F}} = \lim_{n\to\infty} \| \mathcal{A}_n\, x \|_{\mathcal{F}} \leqq \sup_{n \in \mathbb{N}} \| \mathcal{A}_n\, x \|_{\mathcal{F}} \leqq \sup_{n \in \mathbb{N}} \| \mathcal{A}_n \|\, \|x\|_{\mathcal{F}}.$$

Somit ist $\mathcal{A}$ auch beschränkt, und zusammengenommen gilt $\mathcal{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. □

2.2.3.5 Kompakte Abbildungen

Wir kommen nun zu einer speziellen Klasse von Abbildungen, die in ihrem Verhalten noch weitergehend demjenigen von linearen Abbildungen auf endlichdimensionalen Vektorräumen ähneln, als das die beschränkten Abbildungen ganz allgemein ohnehin schon tun. Dazu formulieren wir zunächst ihre

2.42 Definition: $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ seien normierte Vektorräume. Eine lineare Abbildung $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ heißt *kompakt*, wenn sie jede beschränkte Teilmenge ihrer Definitionsmenge auf eine relativ kompakte Menge abbildet[41].

Die Menge aller kompakter linearer Abbildungen von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{F}$ wird mit $\mathscr{C}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ bezeichnet. Statt $\mathscr{C}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ schreibt man $\mathscr{C}(\mathcal{E})$. Ist $\mathcal{F}$ ein Banachraum, dann ist auch $\mathscr{C}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ ein Banachraum. Eine beschränkte Abbildung $\mathcal{A}$ auf dem Banachraum $\mathcal{E}$ ist genau dann kompakt, wenn man aus jeder beschränkten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $\mathcal{E}$ eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ auswählen kann, so daß die Folge $(\mathcal{A}\,x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Ist $\mathcal{A}$ kompakt und $\mathcal{T}$ beschränkt, dann ist $\mathcal{A}\,\mathcal{T}$ kompakt. Kompakte Abbildungen sind stets beschränkt, denn wäre die kompakte Abbildung $\mathcal{A}$ unbeschränkt, dann gäbe es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathcal{A}\,x_n\|/\|x_n\| = \infty$. Damit ist die Folge $(x_n/\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ zwar beschränkt, es gilt jedoch $\|\mathcal{A}\,x_m - \mathcal{A}\,x_n\| \geqq \big|\,\|\mathcal{A}\,x_m\| - \|\mathcal{A}\,x_n\|\,\big|$ und damit $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|\mathcal{A}\,x_m - \mathcal{A}\,x_n\| \neq 0$, das heißt, die Menge $\{\, x_n/\|x_n\| \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ ist nicht kompakt – ein Widerspruch. Das umgekehrte gilt nicht, wie beispielsweise die identische Abbildung auf einem beliebigen unendlichdimensionalen Banachraum zeigt, die beschränkt, aber nicht kompakt ist[42]. Ein weiteres Beispiel ist der Operator $\widehat{S} : \ell^2(\mathbb{C}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{C})$, definiert durch $\widehat{S}\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$; dieser ist ebenfalls beschränkt, aber nicht kompakt. Generell ist die Frage nach beschränkten, nicht kompakten Abbildungen zwischen Banachräumen eine nichttriviale Angelegenheit. Für $1 \leqq q < p < \infty$ etwa gilt $\mathscr{C}(\ell^p,\ell^q) = \mathscr{L}(\ell^p,\ell^q)$[43], ebenso wie $\mathscr{C}(c_0,\ell^p) = \mathscr{L}(c_0,\ell^p)$[44]. Inwieweit es allgemein zu vorgegebenen Banachräumen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ Unterräume $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}$ und beschränkte, nicht kompakte Abbildungen von $\mathcal{U}$ nach $\mathcal{F}$ gibt, ist bis jetzt nicht bekannt[45].

Eine besonders wichtige Charakteristik kompakter Abbildungen ist ihre Eigenschaft, schwache Konvergenz in starke Konvergenz umzuwandeln; genauergesagt gilt der folgende

2.43 Satz: *Sind $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ Banachräume, $\mathcal{A} \in \mathscr{C}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Folge in* $\operatorname{dom}\mathcal{A}$*, dann ist $(\mathcal{A}\,x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark konvergent.*[46]

[41] Kompakte Abbildungen werden gelegentlich auch als *vollstetige Abbildungen* bezeichnet. Siehe aber auch Anmerkung 46.

[42] Das ist nicht ganz so trivial, wie man meinen könnte; siehe etwa [336], wo dieser Sachverhalt am Beispiel der identischen Abbildung auf dem Raum ℓ^1 explizit demonstriert wird.

[43] Das ist der Inhalt des Theorems von Pitt [290].

[44] Siehe [226].

[45] Siehe hierzu [245].

[46] Die Umkehrung dieses Satzes ist im allgemeinen falsch; sie ist dann richtig, wenn im Banachraum $\mathcal{E}$ jede beschränkte Teilmenge eine schwache Cauchy-Folge enthält. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn $\mathcal{E}$ reflexiv oder $\mathcal{E}'$ (und damit auch $\mathcal{E}$) separabel ist. Manche Autoren nehmen das zum Anlaß, kompakte und

Beweis: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge, die schwach gegen $x \in \operatorname{dom}\mathcal{A}$ konvergiert. Dann konvergiert $(\mathcal{A}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zumindest schon schwach gegen $\mathcal{A}x \in \mathcal{F}$. Nun betrachten wir die Abbildung $j : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}''$ mit $j_y(f) = f(y)$ für $y \in \mathcal{E}$ und $f \in \mathcal{E}'$; hierfür gilt

$$\overline{\{\, f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\,\}} = \{\, j_{x_n}(f) \mid n \in \mathbb{N}\,\},$$

also ist die Folge $(j_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise beschränkt. Nach Satz 2.40 ist dann $(\|j_{x_n}\|)_{n\in\mathbb{N}}$ und somit auch $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt. Damit ist die Menge $\{\,\mathcal{A}x_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ kompakt, es existiert also eine Teilfolge $(\mathcal{A}x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{i\to\infty} \mathcal{A}x_{n_i} = \mathcal{A}x$. Wäre nun $(\mathcal{A}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent, dann gäbe es in der Menge $\{\,\mathcal{A}x_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ eine unendliche Teilmenge A und ein $\delta > 0$ mit $\|\mathcal{A}y - \mathcal{A}x\| > \delta$ für alle $y \in \mathrm{A}$. Andererseits ist A kompakt, also gibt es dort eine Folge, die gegen $\mathcal{A}\psi$ konvergiert – ein Widerspruch. □

Für den folgende Satz brauchen wir wieder eine

2.44 Definition: Es seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ Banachräume und $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ eine Abbildung. Dann ist deren *duale Abbildung* $\mathcal{A}' : \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{E}'$ definiert durch $\mathcal{A}'f = f \circ \mathcal{A}$ für alle $f \in \mathcal{F}'$.

Für duale Abbildungen kompakter Abbildungen gilt der

2.45 Satz von Schauder:[47] *Sind $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ Banachräume und ist $\mathcal{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, dann ist $\mathcal{A}$ genau dann kompakt, wenn $\mathcal{A}'$ kompakt ist.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Ist $\mathcal{A}$ kompakt, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathcal{F}'$ und $\mathrm{K} = \{\, x \in \mathcal{E} \mid \|x\| \leqq 1\,\}$, dann ist $\mathrm{C} = \overline{\mathcal{A}\,\mathrm{K}}$ kompakt. Nun sei die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $g_n = f_n \restriction \mathrm{C}$; sie ist beschränkt und wegen

$$|\, g_n(a) - g_n(b)\,| \leqq \sup_{j\in\mathbb{N}} \|f_j\|\, \|\, a - b\,\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a, b \in \mathcal{F}$ gleichgradig stetig. Nach Satz 2.14 ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ damit relativ kompakt, und folglich gibt es eine Teilfolge $(g_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$, die gleichmäßig konvergent ist. Mit dieser folgt

$$\|\,\mathcal{A}'f_{n_i} - \mathcal{A}'f_{n_j}\,\| = \|\,\mathcal{A}'g_{n_i} - \mathcal{A}'g_{n_j}\,\| = \sup_{x\in\mathrm{B}} |\, g_{n_i}(\mathcal{A}x) - g_{n_j}(\mathcal{A}x)\,|$$

für alle $x \in \mathcal{E}$, und weil $\mathcal{A}\,\mathrm{K}$ nach Definition von K dicht in K ist, gilt weiter

$$\|\,\mathcal{A}'f_{n_i} - \mathcal{A}'f_{n_j}\,\| = \|\, g_{n_i} - g_{n_j}\,\|_\infty .$$

Damit ist $(\mathcal{A}'g_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge der Folge $(\mathcal{A}'f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, das heißt, $\mathcal{A}'$ ist kompakt.

---

vollstetige Abbildungen unterschiedlich zu definieren. In dieser Terminologie heißt eine Abbildung genau dann vollstetig, wenn sie schwach konvergente Folgen auf stark konvergente abbildet; die beiden Begriffe sind dann nur in Banachräumen mit der erwähnten Eigenschaft äquivalent.

[47] Von seinem Entdecker veröffentlicht in [329].

„$\Longleftarrow$“: Ist $\mathcal{A}'$ kompakt, dann ist wie soeben gezeigt $\mathcal{A}''$ kompakt. Definiert man die Abbildung $j^{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}''$ durch $j_x^{\mathcal{E}}(f) = f(x)$ für alle $f \in \mathcal{E}'$, dann ist auch $\mathcal{A}'' j^{\mathcal{E}}$ kompakt. Nun gilt für alle $x \in \mathcal{E}$ und alle $f \in \mathcal{F}'$

$$\mathcal{A}'' j_x^{\mathcal{E}}(f) = j_x^{\mathcal{E}}(\mathcal{A}' f) = \mathcal{A}' f(x) = f(\mathcal{A} x) = j_{\mathcal{A}x}^{\mathcal{F}}(f),$$

das heißt, es ist $\mathcal{A}'' j^{\mathcal{E}} = j^{\mathcal{F}} \mathcal{A}$, und damit ist $j^{\mathcal{F}} \mathcal{A}$ kompakt. $j^{\mathcal{F}}$ ist außerdem eine Isometrie von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{F}''$, und damit ist $\mathcal{A}$ kompakt. □

Aufgrund seiner Bedeutung beweisen wir ein weiteres allgemeines Resultat über kompakte Abbildungen. Es handelt sich um den Fixpunktsatz von Schauder und damit den wohl wichtigsten Fixpunktsatz der Funktionalanalysis; wie der Name schon andeutet, heißt dabei x ein *Fixpunkt* der Abbildung $\mathcal{A}$, wenn $\mathcal{A}\,x = x$ gilt. Dabei wird $\mathcal{A}$ *nicht* als notwendig linear vorausgesetzt. Wir betrachten zunächst die folgende, allgemeinere Version.

2.46 Satz: [48] *$\mathcal{E}$ sei ein vollständiger metrischer Vektorraum und* G *eine nichtleere, abgeschlossene, beschränkte, konvexe und kompakte Teilmenge von $\mathcal{E}$. Dann besitzt jede stetige Abbildung $\mathcal{A} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$ einen Fixpunkt.*

Beweis: [49] Da G kompakt ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ aus G, sodaß

$$\mathrm{G} \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{B}_\varepsilon(\xi_j)$$

mit $\mathrm{B}_\varepsilon(\xi_j) = \{\, x \in \mathcal{E} \mid d(x, \xi_j) < \varepsilon \,\}$. Nun sei $\mathrm{C} := \mathrm{G} \cap \operatorname{span}\{\, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \,\}$, außerdem definieren wir für $j = 1, 2, \ldots, n$ Funktionen $f_j : \mathrm{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_j(x) = \begin{cases} \varepsilon - d(x, \xi_j) & \text{für} \quad d(x, \xi_j) < \varepsilon, \\ 0 & \text{für} \quad d(x, \xi_j) \geqq \varepsilon \end{cases}$$

und Funktionen $g_j : \mathrm{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g_j(x) = \frac{f_j(x)}{\sum\limits_{j=1}^{n} f_j(x)}.$$

Die f_j und g_j sind stetig, und für $j = 1, 2, \ldots, n$ und alle $x \in \mathrm{G}$ gilt $0 \leqq g_j(x) \leqq 1$ sowie $\sum\limits_{j=1}^{n} g_j(x) = 1$. Nun definieren wir noch die Abbildung $\mathcal{B} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{C}$ durch

$$\mathcal{B}\,x = \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\, \xi_j$$

[48] Diesen Satz publizierte Schauder in einem Aufsatz im selben Heft wie den gerade bewiesenen [328]. In dieser Arbeit liefert er auch die unten beschriebene speziellere Version für beliebige Banachräume und anschließend auch eine noch speziellere für separable Banachräume, wobei er – wenig überraschend – erwähnt, daß er beim Auffinden der jeweiligen Beweise in umgekehrter Reihenfolge vorgegangen sei.

[49] Der hier gezeigte Beweis, der die eher prosaische Originalfassung von Schauder etwas formal-übersichtlicher gestaltet, stammt von Heuser [147].

und erhalten damit durch $\mathcal{C} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A} \restriction \mathrm{C} : \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{C}$ einen beschränkten Endomorphismus. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz[50] besitzt $\mathcal{C}$ einen Fixpunkt x_ε, es gilt also

$$\mathcal{C}\, x_\varepsilon = \mathcal{B}\, \mathcal{A}\, x_\varepsilon = x_\varepsilon. \tag{2.19}$$

Für jedes $x \in \mathrm{G}$ ist

$$\mathcal{B}\, x - x = \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\, \xi_j - \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\, x = \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\, (\, \xi_j - x\,)$$

und damit

$$d(\mathcal{B}\, x, x) \leqq \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\, d(\xi_j, x) < \varepsilon \sum_{j=1}^{n} g_j(x) = \varepsilon. \tag{2.20}$$

Mit (2.19) und (2.20) folgt

$$d(\mathcal{A}\, x_\varepsilon, x_\varepsilon) = d(\mathcal{A}\, x_\varepsilon, \mathcal{B}\, \mathcal{A}\, x_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Damit gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in G mit

$$d(\mathcal{A}\, x_n, x_n) < \frac{1}{n},$$

und weil G kompakt ist außerdem eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ und ein $\widehat{x} \in \mathrm{G}$ mit

$$\lim_{j \to \infty} \mathcal{A}\, x_{n_j} = \widehat{x}.$$

Es folgt

$$\lim_{j \to \infty} x_{n_j} = \widehat{x}$$

und weil $\mathcal{A}$ beschränkt und damit stetig ist weiter

$$\lim_{j \to \infty} \mathcal{A}\, x_{n_j} = \mathcal{A}\, \widehat{x}.$$

Insgesamt liefert das $\mathcal{A}\, \widehat{x} = \widehat{x}$, das heißt, $\widehat{x}$ ist der gesuchte Fixpunkt von $\mathcal{A}$. □

Nun kommen wir zum oben erwähnten, ungleich populäreren Resultat, das zeigt, daß sich für Banachräume die Forderung nach Kompaktheit von der Menge G auf die Abbildung $\mathcal{A}$ umwälzen läßt. Dazu brauchen wir zwei Hilfssätze, zunächst das folgende

2.47 Lemma: *Eine Teilmenge* A *eines Banachraums ist genau dann relativ kompakt, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n \in \mathbb{N}$ *gibt, sodaß* $\mathrm{A} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{A}_j$ *gilt mit* $\max_{x,\, y \in \mathrm{A}_j} \| x - y \| < \varepsilon$ *für* $j = 1, 2, \ldots, n$.

[50] In der hier verwendeten Form ist der Brouwersche Fixpunktsatz genau die endlichdimensionale Variante des Schauderschen Fixpunktsatzes und besagt entsprechend folgendes: *$\mathcal{E}$ sei ein endlichdimensionaler, normierter Vektorraum und* G *eine kompakte, konvexe Teilmenge von $\mathcal{E}$. Dann besitzt jede beschränkte Abbildung $\mathcal{A}$:* G $\longrightarrow$ G *einen Fixpunkt.* Die von L. E. J. Brouwer entdeckte Originalfassung des Satzes betrachtet den Sonderfall beschränkter Endomorphismen auf der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ [45].

Beweis: „$\Longrightarrow$" Wir nehmen an, A sei eine relativ kompakte Menge, für die es ein $\overline{\varepsilon} > 0$ gibt, sodaß für jede endliche Familie $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_N)$ von Teilmengen mit $\max\limits_{x,\, y \,\in\, \mathrm{A}_j} \| x - y \| < \overline{\varepsilon}$ für $j = 1, 2, \dots, N$ stets $\mathrm{A} \supsetneqq \bigcup\limits_{j=1}^{N} \mathrm{A}_j$ gilt. Wählt man nun eine beliebige echte Teilmenge A_1 von A mit $\max\limits_{x,\, y \,\in\, \mathrm{A}_1} \| x - y \| < \overline{\varepsilon}$, dann gibt es ein $x_1 \in \mathrm{A}$ mit $\| x - x_1 \| > \overline{\varepsilon}$ für alle $x \in \mathrm{A}_1$. Wählt man eine weitere Teilmenge A_2 von A mit $\max\limits_{x,\, y \,\in\, \mathrm{A}_2} \| x - y \| < \overline{\varepsilon}$ und $\mathrm{A} \supsetneqq \mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2$, dann gibt es ebenso ein $x_2 \in \mathrm{A}$ mit $\| x_1 - x_2 \| > \overline{\varepsilon}$. Auf diese Weise findet man induktiv zu jedem $N \in \mathbb{N}$ Teilmengen $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_N$ mit $\max\limits_{x,\, y \,\in\, \mathrm{A}_j} \| x - y \| < \overline{\varepsilon}$ für $j = 1, 2, \dots, N$ und Elemente $x_1, x_2, \dots, x_N$ von A mit $\| x_i - x_j \| > \overline{\varepsilon}$ für $i \neq j$. Insgesamt hat man damit eine Folge $(x_j)_{j \,\in\, \mathbb{N}}$ in A konstruiert, die keine konvergente Teilfolge enthalten kann – ein Widerspruch.

„$\Longleftarrow$" Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Familie $(\mathrm{A}_{n,1}, \mathrm{A}_{n,2}, \dots, \mathrm{A}_{n,N})$ von Teilmengen mit $\max\limits_{x,\, y \,\in\, \mathrm{A}_{n,j}} \| x - y \| < 1/n$ für $j = 1, 2, \dots, N$ und $\mathrm{A} \supsetneqq \bigcup\limits_{j=1}^{N} \mathrm{A}_{n,j}$. Zu jeder Folge $(a_m)_{m \,\in\, \mathbb{N}}$ in A gibt es dann mindestens ein $j_1 \in \{1, 2, \dots, N\}$, sodaß unendlich viele a_j und damit eine komplette Teilfolge $(a_{m_{1,q}})_{q \,\in\, \mathbb{N}}$ von $(a_m)_{m \,\in\, \mathbb{N}}$ in A_{n,j_1} liegen. Auch zu dieser Folge gibt es mindestens ein $j_2 \in \{1, 2, \dots, N\}$, sodaß eine komplette Teilfolge $(a_{m_{2,q}})_{q \,\in\, \mathbb{N}}$ in A_{n,j_2} liegt. Auf diese Weise erhalten wir induktiv eine Kette von Teilfolgen, sodaß es zu jedem $i \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(a_{m_{i,q}})_{q \,\in\, \mathbb{N}}$ der Teilfolge $(a_{m_{i-1,q}})_{q \,\in\, \mathbb{N}}$ gibt und erstere wiederum eine Teilfolge $(a_{m_{i+1,q}})_{q \,\in\, \mathbb{N}}$ besitzt, wobei jede komplett in einem $\mathrm{A}_{n,j}$ liegt. Die Elemente der Diagonalfolge $(a_{m_{q,q}})_{q \,\in\, \mathbb{N}}$ sind für $q > n$ in A_{n,j_n} enthalten, für alle $p, q > n$ gilt folglich $\| a_{m_{p,p}} - a_{m_{q,q}} \| \leqq 1/n$, das heißt, $(a_{m_{q,q}})_{q \,\in\, \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge und damit konvergent. $(a_{m_{q,q}})_{q \,\in\, \mathbb{N}}$ ist außerdem eine Teilfolge der beliebig in A vorgegeben Folge $(a_m)_{m \,\in\, \mathbb{N}}$. Somit ist A relativ kompakt. $\square$

Der zweite Hilfssatz ist das

2.48 Lemma von Mazur: [51] *Die abgeschlossene konvexe Hülle einer relativ kompakten Teilmenge eines Banachraums ist kompakt.*

Beweis: Ist A eine relativ kompakte Teilmenge eines Banachraums $\mathcal{E}$, dann gibt es nach Lemma 2.47 zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Familie $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n)$ von Teilmengen von A mit $\max\limits_{x,\, y \,\in\, \mathrm{A}_j} \| x - y \| < \varepsilon$ für $j = 1, 2, \dots, n$ und $\mathrm{A} \subseteqq \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathrm{A}_j$. Folglich gibt es in A_j Elemente $x_1, x_2, \dots, x_n$, sodaß es zu jedem $x \in \mathrm{A}$ ein $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ gibt mit $\| x - x_i \| < \varepsilon/3$. Nun sei B die konvexe Hülle von A; für diese gilt $\mathrm{B} \subset \operatorname{span} \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, außerdem ist B beschränkt und damit relativ kompakt. Nach Lemma 2.47 gibt es daher eine endliche Familie $(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \dots, \mathrm{B}_n)$ von Teilmengen von B mit $\max\limits_{x,\, y \,\in\, \mathrm{B}_j} \| x - y \| < \varepsilon$ für $j = 1, 2, \dots, n$ und

[51] Schauder erzählt in [328], daß Mazur von ihm dazu angestoßen wurde, diese Aussage zu beweisen; das Resultat war die Arbeit [251].

$\mathrm{B} \subseteqq \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{B}_j$. Folglich existieren auch Elemente $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ von B, sodaß es zu jedem $x \in \mathrm{B}$ ein $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ gibt mit $\| x - \xi_i \| < \varepsilon/3$. Nun sei C die konvexe Hülle von A und $x \in \mathrm{C}$ beliebig, dann gibt es endlich viele $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q \in \mathrm{A}$ und ein Element y der konvexen Hülle von $\{ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q \}$ mit $\| x - y \| < \varepsilon/3$, außerdem gibt es nichtnegative reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ mit $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j = 1$ und

$$y = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \eta_j .$$

Zu jedem η_j, $j = 1, 2, \ldots, q$ gibt es dann ein x_{i_j} mit $\| \eta_j - x_{i_j} \| < \varepsilon/3$, und der Punkt

$$\overline{y} = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j x_{i_j}$$

gehört zu B. Wiederum gibt es ein $k \in \{ 1, 2, \ldots, p \}$, sodaß $\| \overline{y} - \xi_k \| < \varepsilon/3$ gilt. Es folgt zunächst

$$\| y - \overline{y} \| = \left\| \sum_{j=1}^{q} \lambda_j (\eta_j - x_{i_j}) \right\| \leqq \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \| \eta_j - x_{i_j} \| < \sum_{j=1}^{q} \lambda_j = \frac{\varepsilon}{3},$$

und damit weiter

$$\| x - \xi_k \| \leqq \| x - y \| + \| y - \overline{y} \| + \| \overline{y} - \xi_k \| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

für $k = 1, 2, \ldots, p$. Mit $\mathrm{U}_j = \{ a \in \mathrm{B} \mid \| a - \xi_j \| \}$ gilt dann $\mathrm{B} \subseteqq \bigcup_{j=1}^{p} \mathrm{U}_j$, das heißt, nach Lemma 2.47 ist C relativ kompakt. C ist als konvexe Hülle auch abgeschlossen, also ist C kompakt. $\square$

Damit beweisen wir nun den

2.49 Fixpunktsatz von Schauder: *$\mathcal{E}$ sei ein Banachraum und* G *eine nichtleere, abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmenge von $\mathcal{E}$. Dann besitzt jede kompakte stetige Abbildung $\mathcal{A} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$ einen Fixpunkt.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\mathcal{A}\,\mathrm{G}$ relativ kompakt. Ist B die konvexe Hülle von $\mathcal{A}\,\mathrm{G}$, dann gilt ebenfalls nach Voraussetzung $\mathrm{B} \subset \mathrm{G}$ und damit ist $\mathcal{A} \restriction \mathrm{B}$ eine beschränkte Abbildung von B nach B. Da B nach Lemma 2.48 kompakt ist, besitzt $\mathcal{A}$ nach Satz 2.46 in B und damit in G einen Fixpunkt. $\square$

Der Vollständigkeit wegen sei noch eine weitere, unmittelbar folgende Version des Schauderschen Fixpunktsatzes erwähnt, die ebenso häufig wie die gerade bewiesene anzutreffen ist.

2.50 Corollar: *$\mathcal{E}$ sei ein Banachraum und* G *eine nichtleere, abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmenge von $\mathcal{E}$. Dann besitzt jede stetige Abbildung $\mathcal{A} : \mathsf{G} \longrightarrow \mathsf{G}$ mit relativ kompakter Bildmenge $\mathcal{A}\,\mathsf{G}$ einen Fixpunkt.*

2.2.3.6 Unbeschränkte lineare Abbildungen

Die oben beschriebenen Folgerungen aus dem Baireschen Kategoriensatz zeigen, das unbeschränkte lineare Abbildungen, die auf einem ganzen unendlichdimensionalen Banachraum und nicht nur irgendeiner Teilmenge desselben definiert sind, eher unheimliche Gebilde sind. In der Tat ist es nicht möglich, solche Abbildungen explizit und konstruktiv anzugeben; man braucht hierfür stets das Auswahlaxiom oder etwas dazu äquivalentes. Das steht im Gegensatz zur Situation bei unbeschränkten linearen Abbildungen, die nur auf einer dichten echten Teilmenge eines Banachraums definiert sind. Hier findet man leicht entsprechende Exemplare, und sie werden uns im Rest des Buches und insbesondere in Band 2 laufend begegnen. Dennoch gibt es auf jedem Banachraum überall definierte unbeschränkte lineare Abbildungen, wie das nächste Resultat zeigt

2.51 Satz: *$\mathcal{E}$ sei ein unendlichdimensionaler Banachraum und $\mathcal{F}$ ein Vektorraum jeweils über $\mathbb{K}$, außerdem sei $\mathcal{A}$ eine auf einer dichten Teilmenge von $\mathcal{E}$ definierte unbeschränkte lineare Abbildung. Dann gibt es eine auf ganz $\mathcal{E}$ definierte unbeschränkte lineare Abbildung $\mathcal{M} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ mit $\mathcal{M} \supset \mathcal{A}$.*

Beweis: Die Menge $\mathfrak{A}$ aller Fortsetzungen von $\mathcal{A}$ wird durch die Inklusionsrelation auf der Menge der Definitionsmengen ihrer Elemente teilgeordnet, und jede linear geordnete Teilmenge $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{A}$ besitzt in Gestalt von $\mathcal{T} = \bigcup \mathfrak{T}$ eine obere Schranke. Nach dem Zornschen Lemma gibt es dann in $\mathfrak{A}$ ein maximales Element, das heißt eine Fortsetzung $\mathcal{M}$ von $\mathcal{A}$ mit größtmöglicher Definitionsmenge $\operatorname{dom}\mathcal{M}$.
Nun sei $x \in \mathcal{E} \setminus \operatorname{dom}\mathcal{M}$. Dann läßt sich $\mathcal{M}$ auf eine lineare Abbildung $\mathcal{M}'$ auf der Definitionsmenge $\operatorname{dom}\mathcal{M} \cup \{\,\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}\,\} \subset \mathcal{E}$ fortsetzen, etwa indem man $\mathcal{M}'(\lambda x) = 0$ setzt für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ – ein Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{M}$. Daraus folgt $\mathcal{E} \setminus \operatorname{dom}\mathcal{M} = \emptyset$, also $\operatorname{dom}\mathcal{M} = \mathcal{E}$. □

Die weiter oben in diesem Abschnitt diskutierten Hamelschen nirgends stetigen linearen Funktionen auf dem unendlichdimensionalen $\mathbb{Q}$-Banachraum $\mathbb{R}$ sind Beispiele für auf dem ganzen Raum definierte unbeschränkte lineare Abbildungen. Das läßt sich unter Verwendung von Satz 2.26 verallgemeinern. $\mathcal{E}$ sei ein (gerne unendlichdimensionaler, überseparabler, furchtbar mächtiger) Banachraum über $\mathbb{K}$ und B eine Hamel-Basis in $\mathcal{E}$, das heißt, für jedes $x \in \mathcal{E}$ gebe es eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, u_j$ mit $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathsf{B}$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Außerdem sei X eine Teilmenge von $\mathcal{E}$ mit $|\mathsf{B}| = |\mathsf{X}|$ und $f : \mathsf{B} \longrightarrow \mathsf{X}$ eine Bijektion. Dabei gelte $\sup_{u \in \mathsf{B}} \|f(u)\|/\|u\| = \infty$. Dann wird durch $\mathcal{A}u = f(u)$ für alle $u \in \mathsf{B}$ auf ganz $\mathcal{E}$ eine unbeschränkte lineare Abbildung definiert; ihre Wirkung auf beliebige

Elemente von $\mathcal{E}$ ist $\mathcal{A}x = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(u_j)$. Für jede Bijektion zwischen B und X erhält man eine solche Abbildung. Die Definition von $\mathcal{A}$ ist so klar wie deren Linearität, dennoch ist es völlig unklar, wie Abbildungen dieser Bauart im Detail aussehen. Daß es auf jedem Banachraum sehr viele von ihnen gibt, werden wir im übernächsten Abschnitt sehen.

2.2.3.7 Lineare Funktionale

Wir kommen nun zu einem wichtigen Sonderfall linearer Abbildungen, den man erhält, wenn man als Zielraum den Körper wählt, über welchem der Ausgangsraum als Vektorraum definiert ist. Eine Abbildung von einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathcal{V}$ nach $\mathbb{K}$ nennt man ein *Funktional*[52]. Die Menge $\mathcal{V}^*$ aller linearer Funktionale auf $\mathcal{V}$ heißt *algebraischer Dualraum* von $\mathcal{V}$, die Menge $\mathcal{V}'$ aller stetiger linearer Funktionale auf $\mathcal{V}$ heißt *topologischer Dualraum*. Wenn klar ist, von welcher Variante die Rede sein soll, spricht man häufig auch nur von Dualräumen. Mit den Definitionen

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x),$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

für $f, g \in \mathcal{V}^*$ beziehungsweise $f, g \in \mathcal{V}'$ werden $\mathcal{V}^*$ und $\mathcal{V}'$ zu $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Ist $\mathcal{V}$ ein normierter Vektorraum, dann wird dessen topologischer Dualraum $\mathcal{V}'$ vermöge der Norm

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqq 1} |f(x)|$$

selbst zu einem normierten Vektorraum; ist $\mathbb{K}$ ein vollständiger Körper, dann ist mit dieser Norm der topologische Dualraum jedes $\mathbb{K}$-Vektorraums nach Satz 2.30 ein Banachraum.

Da wir uns im vorliegenden Buch ausschließlich mit unendlichdimensionalen Vektorräumen beschäftigen, sind insbesondere solche Sachverhalte von Interesse, die sich von ihren Analogien aus der elementaren linearen Algebra unterscheiden. Ein besonders wichtiges Beispiel hierfür betrifft die wohlbekannte Aussage, daß für jeden endlichdimensionalen Vektorraum $\mathcal{V}$ die Relation $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{V}^*$ gilt. Für unendlichdimensionale Räume ist das nicht der Fall; das zeigt der folgende

2.52 Satz: *Ist $\mathcal{V}$ ein unendlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, dann gilt $|\mathcal{V}^*| = \dim \mathcal{V}^* = |\mathbb{K}|^{\dim \mathcal{V}}$.*

Beweis:[53] Wir zeigen zunächst $|\mathcal{V}^*| = |\mathbb{K}|^{\dim \mathcal{V}}$. Dazu sei $\mathrm{B} = (e_\gamma)_{\gamma < \Gamma}$ eine Hamel-Basis von $\mathcal{V}$. Die Abbildung $F : {}^{\mathrm{B}}\mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{V}^*$ mit $F_f(e_\gamma)(x) = f(e_\gamma)$ für $f \in {}^{\mathrm{B}}\mathbb{K}$ und $x \in \mathcal{V}$ ist nach Satz 2.26 bijektiv, somit gilt $|\mathcal{V}^*| = |\mathbb{K}|^{|\mathrm{B}|}$, und es folgt die Behauptung.

Nun zeigen wir $|\mathcal{V}^*| = \dim \mathcal{V}^*$. Da $\mathcal{V}^*$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist und nach Lemma 2.8 folglich $|\mathcal{V}^*| = \max\{|\mathbb{K}|, \dim \mathcal{V}^*\}$ gilt, genügt es zu zeigen, daß $\dim \mathcal{V}^* \geqq |\mathbb{K}|$.

[52] Diese Bezeichnung wurde von Hadamard eingeführt [129].

[53] Der hier vorgeführte Beweis stammt von Jacobson [167], [168].

1. Fall: $|\mathbb{K}| \leqq \aleph_0$. Wegen $\dim \mathcal{V}^* \geqq \aleph_0$ folgt die Behauptung unmittelbar.

2. Fall: $|\mathbb{K}| > \aleph_0$. Wir betrachten die Menge ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{K}$ aller Folgen aus $\mathbb{K}$ sowie zu jedem Element X von $\mathfrak{P}({}^{\mathbb{N}}\mathbb{K})$ die Menge $Q(\mathrm{X})$ der daraus nach folgendem Verfahren konstruierbaren endlichen quadratischen Matrizen: Wähle aus A ein endliche Familie von Folgen $(\gamma_m^{(j)})_{m\in\mathbb{N}}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, dazu eine Familie $(i_1, i_2, \ldots . i_n)$ von Indices und schreibe dann

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \gamma_{i_1}^{(1)} & \gamma_{i_2}^{(1)} & \ldots & \gamma_{i_n}^{(1)} \\ \gamma_{i_1}^{(2)} & \gamma_{i_2}^{(2)} & \ldots & \gamma_{i_n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{i_1}^{(n)} & \gamma_{i_2}^{(n)} & \ldots & \gamma_{i_n}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Außerdem sei

$$\mathfrak{R} := \{\, \mathrm{Y} \in \mathfrak{P}({}^{\mathbb{N}}\mathbb{K}) \mid Q(\mathrm{Y}) \text{ enthält nur reguläre Matrizen} \,\}.$$

Wir konstruieren nun ein Element M von $\mathfrak{R}$ mit $|\mathrm{M}| \geqq |\mathbb{K}|$. Die Menge $\mathfrak{R}$ läßt sich vermöge der $\subset$-Relation teilordnen, und für jede gemäß dieser Teilordnung linear geordnete Teilmenge $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{R}$ gilt $\bigcup \mathfrak{Q} \in \mathfrak{R}$. Nach dem Zornschen Lemma enthält $\mathfrak{R}$ daher ein $\subset$-maximales Element M. Hierfür sei zunächst $|\mathrm{M}| < |\mathbb{K}|$ angenommen. Wir zeigen durch vollständige Induktion, daß es dann ein $\xi \notin \mathrm{M}$ gibt mit $\mathrm{M} \cup \{\xi\} \in \mathfrak{R}$. Dazu seien mit $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ die ersten p Folgenglieder bereits gefunden, sodaß für $q \leqq p$ jede $q \times q$-Matrix regulär ist, die nach obigem Verfahren aus $\mathrm{M} \cup \{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)\}$ konstruierbar ist. Nun soll $\xi_{p+1} \in \mathbb{K}$ so gewählt werden, daß für $q \leqq p+1$ jede $q \times q$-Matrix regulär ist, die aus $\mathrm{M} \cup \{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+1})\}$ konstruierbar ist. Solche Matrizen sind von der Form

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \gamma_{i_1}^{(1)} & \gamma_{i_2}^{(1)} & \ldots & \gamma_{i_p}^{(1)} & \gamma_{i_{p+1}}^{(1)} \\ \gamma_{i_1}^{(2)} & \gamma_{i_2}^{(2)} & \ldots & \gamma_{i_p}^{(2)} & \gamma_{i_{p+1}}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{i_1}^{(p)} & \gamma_{i_2}^{(p)} & \ldots & \gamma_{i_p}^{(p)} & \gamma_{i_{p+1}}^{(p)} \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_p & \xi_{p+1}; \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & \gamma_{i_{p+1}}^{(1)} \\ & & \mathfrak{C} & & \gamma_{i_{p+1}}^{(2)} \\ & & & & \vdots \\ & & & & \gamma_{i_{p+1}}^{(p)} \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_p & \xi_{p+1}; \end{pmatrix}; \tag{2.21}$$

wählt man für ξ_{p+1} einen Wert η, sodaß die Matrix $\mathfrak{B}$ singulär ist, dann sind deren Spalten linear abhängig, das heißt, es gibt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1} \in \mathbb{C}$, die nicht alle verschwinden, und für die das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1\gamma_{i_1}^{(1)} & + & \lambda_2\gamma_{i_2}^{(1)} & + & \ldots & + & \lambda_{p+1}\gamma_{i_{p+1}}^{(1)} & = & 0 \\ \lambda_1\gamma_{i_1}^{(2)} & + & \lambda_2\gamma_{i_2}^{(2)} & + & \ldots & + & \lambda_{p+1}\gamma_{i_{p+1}}^{(2)} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1\xi_1 & + & \lambda_2\xi_2 & + & \ldots & + & \lambda_{p+1}\eta & = & 0 \end{array}$$

gilt. In diesem Fall ist η eindeutig bestimmt, und da die Matrix $\mathfrak{C}$ nach Voraussetzung regulär ist, erhält man für jedes $\xi_{p+1} \in \mathbb{C}$ mit $\xi_{p+1} \neq \eta$ eine reguläre Matrix $\mathfrak{B}$. Da es $|\mathbb{K}|$ viele solche ξ_{p+1} gibt, nach Voraussetzung aber $|\mathsf{M}| < |\mathbb{K}|$ gilt und die Anzahl der Matrizen der Form (2.21) maximal $|\mathbb{K}|$ ist, findet man für jede solche Matrix ein geeignetes ξ_{p+1}. Dieses Verfahren wiederholen wir immerfort und erhalten auf diese Weise induktiv eine Folge ξ mit den gewünschten Eigenschaften und damit $\mathsf{M} \cup \{\xi\} \in \mathfrak{R}$, obwohl M maximal in $\mathfrak{R}$ ist – ein Widerspruch. Nun sei wieder $\mathsf{B} = (e_\gamma)_{\gamma < \Gamma}$ eine Hamel-Basis von $\mathcal{V}$ und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein abzählbares Teilsystem von B. Außerdem sei zu jeder Folge $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathsf{M}$ ein lineares Funktional f_ξ auf $\mathcal{V}$ definiert durch $f_\xi(e_n) = \xi_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.26 ist diese Definition jeweils eindeutig, und nach Konstruktion ist die Menge $\mathsf{F} = \{ f_\xi \mid \xi \in \mathsf{M} \} \subset \mathcal{V}^*$ linear unabhängig, folglich gilt $|\dim \mathcal{V}^*| \geqq |\mathsf{F}|$. Gleichzeitig ist $|\mathsf{M}| = |\mathsf{F}|$, und da wie oben gezeigt $|\mathsf{M}| \geqq |\mathbb{K}|$ gilt, folgt daraus $|\mathsf{F}| \geqq |\mathbb{K}|$. Zusammen ergibt das $\dim \mathcal{V}^* \geqq |\mathbb{K}|$, und daraus folgt die Behauptung. □

Insbesondere folgt aus Satz 2.52 für jeden unendlichdimensionalen Vektorraum $\mathcal{V}$ und dessen algebraischen Dualraum $\mathcal{V}^*$ die Relation $\dim \mathcal{V}^* > \dim \mathcal{V}$. Entsprechend erhalten wir zu jedem unendlichdimensionalen Vektorraum $\mathcal{V}$ eine streng monoton aufsteigende Folge

$$\dim \mathcal{V} < \dim \mathcal{V}^* < \dim \mathcal{V}^{**} < \ldots < \dim \mathcal{V}^{(n)} < \dim \mathcal{V}^{(n+1)} < \ldots$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für den topologischen Dualraum $\mathcal{V}'$ muß das nicht so sein; hier gilt lediglich $\dim \mathcal{V}' \geqq \dim \mathcal{V}$, wie wir noch sehen werden. Der Beweis von Satz 2.52 verwendet das Zornsche Lemma; das zeigt exemplarisch, daß man generell für *rein algebraische Verallgemeinerungen* von Aussagen der endlichdimensionalen linearen Algebra auf die unendlichdimensionalen Räume der Funktionalanalysis auf das Auswahlaxiom oder ähnliches angewiesen ist, während *konstruktive* Verallgemeinerungen nur unter Einbeziehung topologischer Betrachtungen möglich sind. Auch darauf kommen wir ausführlich zurück.

Eine der Anwendungen, die lineare Funktionale zu besonders nützlichen Objekten macht, ist die Möglichkeit, aus der elementaren Analysis bekannte Eigenschaften wie Beschränktheit, Stetigkeit oder Differenzierbarkeit bei Sachverhalten, wo diese Begriffe womöglich für sich genommen eigentlich gar keinen Sinn haben, in Räume komplizierterer Elemente hinüberzuretten, da man es nach Anwendung von Funktionalen auf Banachraumelemente plötzlich wieder mit reellen oder komplexen Zahlen zu tun hat. Wenn eine solche Eigenschaft nach Anwendung eines jeden Elements des Dualraums jeweils vorliegt, dann spricht man von einer *schwachen Eigenschaft*. Mit diesem Konzept ist es möglich, die Grundideen der Analysis sehr weitgehend zu verallgemeinern, was etwa bei der Beschäftigung mit partiellen Differentialgleichungen und insbesondere auch der Quantenmechanik von fundamentaler Bedeutung ist. Wir werden das später in unterschiedlichen Formen kennenlernen; eine davon sollte sinnvollerweise jedoch gleich hier angesprochen werden. Betrachtet man in einem normierten Raum $\mathcal{E}$ die durch dessen Norm induzierte Metrik und die bezüglich letzterer offenen Teilmengen von $\mathcal{E}$, so nennt man die daraus resultierende Topologie die *starke Topologie* auf $\mathcal{E}$. Entsprechend heißt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}$, die in der Norm gegen ein $x \in \mathcal{E}$ konvergiert und damit der Relation

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x \| = 0$$

genügt, *stark konvergent* gegen x. Betrachtet man stattdessen alle Topologien auf $\mathcal{E}$, bezüglich derer die in der Norm stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{E}$ ebenfalls stetig sind, dann nennt man die gröbste dieser Topologien die *schwache Topologie* auf $\mathcal{E}$. Der Name bringt zum Ausdruck, daß die schwache Topologie stets gröber als die starke Topologie ist. Entsprechend heißt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}$, die in dieser Topologie gegen ein $x \in \mathcal{E}$ konvergiert, *schwach konvergiert* gegen x. Das ist äquivalent dazu, daß für jedes $\varphi \in \mathcal{E}'$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$$

gilt. Konvergieren in einem Raum $\mathcal{E}$ Folgen genau dann schwach gegen $x \in \mathcal{E}$, wenn sie stark gegen x konvergieren, dann sagt man $\mathcal{E}$ besitze die *Schur-Eigenschaft*[54].

Funktionale werden uns sehr viel ausführlicher ab dem nächsten Kapitel im Zusammenhang mit Hilberträumen beschäftigen, wo sie gewissermaßen ein natürliches Biotop vorfinden. An dieser Stelle beschränken wir uns auf zwei Sätze; allerdings sind diese von weitreichender Bedeutung. Der erste der beiden ist der Satz von Hahn-Banach; dieser regelt, wann und wie auf Unterräumen definierte Funktionale eindeutig und normerhaltend auf den ganzen Vektorraum fortgesetzt werden können. Die Aussage ist dabei im wesentlichen, daß ein Vektorraum $\mathcal{V}$ stets in geeigneter Weise in seinen Bidualraum $\mathcal{V}''$ eingebettet werden kann, eine Aussage, die wesentlich, das heißt in diesem Fall strukturell über die oben getroffene Feststellung hinausgeht, daß im unendlichdimensionalen Fall letzterer stets echt mächtiger als ersterer ist. Das ist vor allem für komplizierter aufgebaute Räume interessant, wo hierdurch die Existenz von nichttrivial vielen beschränkten linearen Funktionalen über den elementaren, konstruierbaren Bereich hinaus garantiert wird. Das Resultat besitzt die Gemeinsamkeit mit Satz 2.51, beim Beweis auf etwas vom Schlage des Zornschen Lemmas angewiesen zu sein[55]. Während jener jedoch gleichermaßen für Funktionale wie vektorwertige lineare Abbildungen gilt und *unbeschränkte* Erweiterungen auf den gesamten betrachteten Raum liefert, sorgt der Satz von Hahn-Banach für *beschränkte* globale Erweiterungen; dafür gilt er im Gegensatz zu Satz 2.51 nur für lineare Funktionale und nicht für allgemeine lineare Abbildungen[56]. Wir werden getrennt eine Version für reelle und eine für komplexe Vektorräume betrachten[57]. Zunächst benötigen wir eine weitere

[54]Benannt nach Issai Schur, der als erster bewies, daß der Raum ℓ^1 diese Eigenschaft hat.

[55]Durch die Verwendung des Zornschen Lemmas als Beweismittel wird der Satz von Hahn-Banach zu einer Konsequenz des Auswahlaxioms. Entsprechend folgt er auch aus dem Satz von Tychonoff [234]. Der Satz von Hahn-Banach folgt auch aus dem *Theorem der Boolschen Primideale*, wonach jedes Ideal auf einer Booleschen Algebra zu einem Primdeal erweitert werden kann [237]; das umgekehrte ist jedoch jeweils falsch [137], [288]. Beispielsweise erhält man das Primideal-Theorem als *gemeinsame* Konsequenz der Sätze von Hahn-Banach und Krein-Milman [28]. Der Satz von Hahn-Banach ist insbesondere *nicht äquivalent* zum Auswahlaxiom. Vergleiche auch Anmerkung 9 auf S. 15.

[56]Eine zum Satz von Hahn-Banach analoge Aussage für allgemeinere lineare Abbildungen ist nicht möglich, selbst wenn man zusätzliche Eigenschaften wie diejenige der Normerhaltung fallen läßt und sich mit beschränkten Erweiterungen begnügt. So etwas ist nur für spezielle Klassen von Banach-Räumen möglich; siehe hierzu beispielsweise [65] und [222].

[57]Die reelle Version stammt von Hahn [132] und Banach [19], [20], die sie unabhängig voneinander fanden. Vergleiche hierzu auch [252]. Die komplexe Version wurde ebenfalls unabhängig voneinander von Soukhomlinov [351] sowie von Bohnenblust und Sobczyk [43] entdeckt.

2.53 Definition: Ein Funktional f auf einem Vektorraum $\mathcal{E}$ heißt *sublinear*, wenn

(i) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in \mathcal{E}$ und alle $\lambda \geqq 0$,

(ii) $f(x+y) \leqq f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathcal{E}$.

Gilt für ein Funktional (ii), so heißt es *subadditiv*. Spezielle Beispiele für sublineare Funktionale sind Halbnormen und Normen. – Damit formulieren wir den

2.54 Satz von Hahn-Banach: *(reelle Version) $\mathcal{V}$ sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathcal{U}_0$ ein Unterraum von $\mathcal{V}$, außerdem seien g ein sublineares Funktional auf $\mathcal{V}$ und f_0 ein lineares Funktional auf $\mathcal{U}_0$ mit $f_0(x) \leqq g(x)$ für alle $x \in \mathcal{U}_0$. Dann gibt es ein Funktional f auf ganz $\mathcal{V}$ mit $f \restriction \mathcal{U}_0 = f_0$ und $f(x) \leqq g(x)$ für alle $x \in \mathcal{V}$.*

Beweis: Wieder besteht der Beweis aus zwei Teilen. Zunächst wird f_0 auf einen Raum mit einer Dimension mehr fortgesetzt, um dieses Verfahren dann solange zu wiederholen, bis der ganze Vektorraum herauskommt[58].

Ist $x \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{U}_0$, so erhält man aus $\mathcal{U}_0$ mit $\mathcal{U}_1 := \{ x + t x_1 \mid x \in \mathcal{V}_0,\ t \in \mathbb{R} \}$ einen Unterraum mit einer um 1 höheren Dimension. Nun wählen wir $\alpha \in \mathbb{R}$ so, daß

$$\sup_{x \in \mathcal{U}_0} [\, f_0(x) - g(\, x - x_1\,) \,] \leqq \alpha \leqq \inf_{x \in \mathcal{U}_0} [\, g(\, x + x_1\,) - f_0(x) \,]$$

gilt, und definieren hiermit für alle $x \in \mathcal{U}_0$ und alle $t \in \mathbb{R}$

$$f_1(\, x + t x_1\,) = f_0(x) + t\,\alpha.$$

f_1 ist offensichtlich eine lineare Fortsetzung von f_0 auf $\mathcal{U}_1$. Nun gilt für alle $x, y \in \mathcal{U}_0$

$$f_0(x) + f_0(y) = f_0(\, x + y\,) \leqq g(\, x + y\,) \leqq g(\, x - x_1\,) + g(\, x_1 + y\,);$$

daraus folgt

$$f_0(x) - g(\, x - x_1\,) \leqq g(\, x_1 + y\,) - f_0(y),$$

also

$$f_0(x) - g(\, x - x_1\,) \leqq \alpha \leqq g(\, x_1 + y\,) - f_0(y). \tag{2.22}$$

Zum Nachweis der geforderten Abschätzungseigenschaft der Fortsetzung von f_0 unterscheiden wir drei Fälle.

$t = 0$: Klar.

$t > 0$: Hier gilt aufgrund von (2.22) für alle $x \in \mathcal{U}_0$

$$f_1(\, x + t x_1\,) = f_0(x) + t\,\alpha = t\,[\, f_0(x/t) + \alpha \,] \leqq t\, g(\, x_1 + x/t\,) = g(\, x + t x_1\,)$$

und damit $f_1(x) \leqq g(x)$ für alle $x \in \{\, x + t x_1 \mid x \in \mathcal{V}_0,\ t > 0 \,\}$.

$t < 0$: Analog folgt aus (2.22) für alle $x \in \mathcal{U}_0$

$$f_1(\, x + t x_1\,) = f_0(x) + t\,\alpha = -t\,[\, f_0(-x/t) - \alpha \,] \leqq -t\, g(\, -x_1 - x/t\,) = g(\, x + t x_1\,),$$

[58] Der erste Schritt dieses Beweises ist eine Idee von Helly [145], der zweite Schritt stammt von Hahn und Banach.

also $f_1(x) \leqq g(x)$ für alle $x \in \{\, x + t\, x_1 \mid x \in \mathcal{U}_0,\ t < 0 \,\}$.
Alle drei Fälle zusammen liefern wie gewünscht $f_1(x) \leqq g(x)$ für alle $x \in \mathcal{U}_1$. Dieses Verfahren denken wir uns nun transfinit fortgesetzt und erhalten so für f_0 sukzessive Fortsetzungen $f_1, f_2, f_3, \ldots$ auf Unterräume $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_3 \subset \ldots$, wobei deren Dimension bei jedem Schritt um 1 erhöht wird[59].

Nun sei $\mathfrak{F}$ die Menge aller linearer Fortsetzungen f_κ von f_0 auf Unterräume $\mathcal{U}_\kappa$ von $\mathcal{V}$ mit $\mathcal{U}_0 \subseteqq \mathcal{U}_\kappa \subseteqq \mathcal{V}$, für welche $f_\kappa \restriction \mathcal{U}_0 = f_0$ und $f_\kappa \leqq g$ auf $\mathcal{U}_\kappa$ gilt. Auf $\mathfrak{F}$ wird durch

$$f_\kappa \prec f_\lambda \;:\Longleftrightarrow\; \mathcal{U}_\kappa \subseteqq \mathcal{U}_\lambda \,\wedge\, f_\lambda \restriction \mathcal{U}_\kappa = f_\kappa$$

eine Halbordnung definiert. Ist $\mathfrak{G}$ eine linear geordnete Teilmenge von $\mathfrak{F}$, dann ist $\widetilde{\mathcal{U}} = \bigcup\limits_{f_\kappa \in \mathfrak{G}} \mathcal{U}_\kappa$ ein Unterraum von $\mathcal{V}$, und durch $\tilde{f}(x) = f_\kappa(x)$ für $x \in \mathcal{U}_\kappa$ und alle $f_\kappa \in \mathfrak{G}$ wird eine lineare Fortsetzung von f_0 auf $\widetilde{\mathcal{U}}$ definiert mit $\tilde{f} \restriction \mathcal{U}_0 = f_0$ und $\tilde{f} \leqq g$ auf $\widetilde{U}$. Es gilt $\tilde{f} \succ f_\kappa$ für alle $f_\kappa \in \mathfrak{G}$, das heißt, $\tilde{f}$ ist eine obere Schranke von $\mathfrak{G}$. Nach dem Zornschen Lemma besitzt $\mathfrak{F}$ folglich ein maximales Element, also eine lineare Fortsetzung f von f_0 auf einen maximalen Unterraum $\mathcal{U}$ von $\mathcal{V}$. Wäre $\mathcal{U}$ jedoch ein echter Unterraum von $\mathcal{V}$, dann müßte f gemäß obigem Verfahren weiter linear fortgesetzt werden können – ein Widerspruch zur Maximalität von f. Demnach ist $\mathcal{U} = \mathcal{V}$, und f ist eine lineare Fortsetzung von f_0 auf $\mathcal{V}$ mit $f \restriction \mathcal{U}_0 = f_0$ und $f \leqq g$ auf $\mathcal{V}$. □

Wählt man als sublineare Abbildung g speziell eine Halbnorm, dann läßt sich der Satz von Hahn-Banach auch für komplexe Vektorräume formulieren.

2.55 Satz von Hahn-Banach: *(komplexe Version) $\mathcal{V}$ sei ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\mathcal{U}_0$ ein Unterraum von $\mathcal{V}$, außerdem seien $\|\ \|$ eine Halbnorm auf $\mathcal{V}$ und f_0 ein lineares Funktional auf $\mathcal{U}_0$ mit $|f_0(x)| \leqq \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{U}_0$. Dann gibt es ein Funktional $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f \restriction \mathcal{U}_0 = f_0$ und $|f(x)| \leqq \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{V}$.*

Beweis: Nach Satz 2.54 besitzt das auf $\mathcal{U}_0$ definierte reelle Funktional $h_0 = \mathfrak{Re}\, f_0$ eine $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung h auf ganz $\mathcal{V}$ mit $h \restriction \mathcal{U}_0 = h_0$ und $h(x) \leqq \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{V}$. Nun sei das komplexe Funktional f auf $\mathcal{V}$ definiert durch $f(x) := h(x) - i\, h(ix)$. Dieses ist nach Konstruktion $\mathbb{R}$-linear mit

$$f(ix) = h(ix) - i\, h(-x) = i\, h(x) + h(ix) = i\, [\, h(x) - i\, h(ix)\,] = i\, f(x),$$

also auch $\mathbb{C}$-linear. Außerdem gilt für alle $x \in \mathcal{U}_0$

$$\begin{aligned}\big(f \restriction \mathcal{U}_0\big)(x) &= \big(h \restriction \mathcal{U}_0\big)(x) - i\, \big(h \restriction \mathcal{U}_0\big)(ix) = h_0(x) - i\, h_0(ix)\\ &= \mathfrak{Re}\, f_0(x) - i\, \mathfrak{Re}\, f_0(ix) = \mathfrak{Re}\, f_0(x) - i\, \mathfrak{Re}\,[i\, f_0(x)]\end{aligned}$$

[59] Würde man sich auf separable Vektorräume beschränken, könnte man den Beweis hier auf einfachste Weise durch vollständige Induktion komplettieren. Da der Satz jedoch für allgemeine und damit insbesondere auch nicht separable Vektorräume formuliert ist, gibt es im allgemeinen überabzählbar viele solche Fortsetzungen, sodaß stattdessen die hier beschriebenen transfiniten Hilfsmittel erforderlich sind.

$$= \mathfrak{Re}\, f_0(x) + i\, \mathfrak{Im}\, f_0(x) \;=\; f_0(x)$$

und damit $f \restriction \mathcal{U}_0 = f_0$. Für alle $x \in \mathcal{V}$ gibt es ein $\varphi \in [0, 2\pi]$ sodaß $f(x) = e^{i\varphi}\,|f(x)|$. Damit gilt

$$|f(x)| = e^{-i\varphi} f(x) = f(e^{-i\varphi} x) = \mathfrak{Re}\, f(e^{-i\varphi} x) = h(e^{-i\varphi} x) \leqq \|e^{-i\varphi} x\| = \|x\|$$

für alle $x \in \mathcal{V}$, womit auch die Abschätzung für f durch die Halbnorm $\|\ \|$ gezeigt ist. □

Natürlich gilt Satz 2.55 auch für $\mathbb{R}$-Vektorräume. Außerdem liefert die Anwendung dieses Satzes auf den Spezialfall normierter Räume das folgende wichtige

2.56 Corollar: *$\mathcal{E}$ sei ein normierter Raum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $\mathcal{U}_0$ ein Unterraum von $\mathcal{E}$, außerdem sei f_0 ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{U}_0$. Dann gibt es ein stetiges lineares Funktional f auf $\mathcal{E}$ mit $f \restriction \mathcal{U}_0 = f_0$ und $\|f\| = \|f_0\|$.*

Die Fortsetzung stetiger linearer Funktionale ist hier also insbesondere *normerhaltend* möglich. Zusätzlich erlaubt diese Version des Satzes von Hahn-Banach eine geometrische Deutung. Diese besagt, daß der Dualraum $\mathcal{E}'$ eines normierten Raums $\mathcal{E}$ dessen Punkte *trennt*, das heißt, zu je zwei Elementen $x \neq y$ von $\mathcal{E}$ gibt es ein Funktional f aus $\mathcal{E}'$ mit $f(x) \neq f(y)$. Das sieht man sofort, wenn man eine unmittelbare Folgerung aus Satz 2.54 verwendet.

2.57 Corollar: *$\mathcal{E}$ sei ein normierter Vektorraum und $x \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{E}'$ mit $\|f\| = 1$ und $f(x) = \|x\|_{\mathcal{E}}$.*

Sind nun $x \neq y$ Elemente von $\mathcal{E}$, dann gilt $x - y \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$, und nach Corollar 2.56 gibt es ein $f \in \mathcal{E}'$ mit $f(\,x - y\,) = \|\,x - y\,\|_{\mathcal{E}} > 0$, also $f(x) - f(y) > 0$ und damit $f(x) \neq f(y)$.

Man kann auch sagen, es gebe auf einem normierten Raum $\mathcal{E}$ *genügend viele* stetige lineare Funktionale, um die Punkte zu trennen. Generell bestehen topologische Dualräume erst in Räumen, die mindestens lokalkonvex sind, aus mehr als nur der Nullfunktion[60]. Zum Nachweis dieses Sachverhalts ist der Satz von Hahn-Banach das entscheidende Hilfsmittel; genauergesagt gilt der folgende

2.58 Satz: *Ein topologischer Vektorraum $\mathcal{E}$ besitzt genau dann ein stetiges lineares Funktional f mit $f \neq 0$, wenn es eine konvexe Nullumgebung $\mathrm{U} \neq \mathcal{E}$ gibt.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Es seien $f \in \mathcal{E}'$, $f \neq 0$ und $\mathrm{U} := \{\, x \in \mathcal{E} \mid |f(x)| < 1\,\}$. Zu zeigen ist, daß U eine offene konvexe Nullumgebung und eine echte Teilmenge von $\mathcal{E}$ ist.
1. U ist Urbild der offenen Einheitskreisscheibe unter f, und f ist stetig, also ist U offen.
2. f ist linear, also ist $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, also ist U eine Nullumgebung.
3. Für alle $x, y \in \mathrm{U}$ und alle $\alpha, \beta \in [0, 1]$ mit $\alpha + \beta = 1$ gilt aufgrund der Linearität von f

$$|f(\,\alpha\, x + \beta\, y\,)| = |\,\alpha\, f(x) + \beta\, f(y)\,| \leqq \alpha\, |f(x)| + \beta\, |f(y)| < \alpha + \beta < 1,$$

[60] Die bereits erwähnten $\mathscr{L}^p$-Räume mit $0 < p < 1$ sind Beispiele für vollständige, aber nicht lokalkonvexe Räume, in denen jeweils $f = 0$ das einzige stetige lineare Funktional ist. Genaueres dazu findet man in [254].

also ist U konvex.
4. Wegen $f \neq 0$ gibt es $x \in \mathcal{E}$ mit $f(x) \neq 0$. Nun sei $\lambda > 1/|f(x)|$ und $x' := \lambda x$. Dann gilt

$$|f(x')| = |f(\lambda x)| = \lambda |f(x)| > 1,$$

also ist $x' \in \mathcal{E} \setminus \mathrm{U}$ und folglich $\mathrm{U} \neq \mathcal{E}$.
„$\Longleftarrow$“: Sei $\mathrm{U} \subsetneqq \mathcal{E}$ eine konvexe Nullumgebung und $g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = \inf\{\, t > 0 \mid x \in t\,\mathrm{U}\,\}.$$

Damit gilt

$$\mathrm{U} = \{\, x \in \mathcal{E} \mid g(x) < 1\,\} \tag{2.23}$$

Denn einerseits folgt für $x \in t\,\mathrm{U}$ aus $g(x) < 1$ und $t < 1$

$$x = (\,1 - t\,) \cdot 0 + t \cdot \frac{1}{t}\, x,$$

und da U konvex ist, folgt $x \in \mathrm{U}$. Andererseits ist U offen, also gibt es für alle $x \in \mathrm{U}$ eine offene Umgebung von x in U und damit ein $\varepsilon > 0$, sodaß $(\,1 + \varepsilon\,)\,x \in \mathrm{U}$. Daher gilt

$$g(x) \leqq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1,$$

und aus (2.23) folgt

$$g(x_0) \geqq 1 \quad \text{für } x_0 \notin \mathrm{U}. \tag{2.24}$$

Definiert man nun auf span $\{x_0\}$ ein Funktional f_0 durch $f_0(s\,x_0) = s$, so erhält man für alle $s \in \mathbb{R}$ aufgrund von (2.24)

$$f_0(s\,x_0) = s \leqq g(s\,x_0).$$

g ist eine Halbnorm[61], und damit sublinear, und nach Satz 2.54 oder Satz 2.55 gibt es eine lineare Fortsetzung f von f_0 auf ganz $\mathcal{E}$ mit $f \restriction \operatorname{span}\{x_0\} = f_0$ und $f(x) \leqq g(x)$ für alle $x \in \mathcal{E}$. Offensichtlich ist $f \neq 0$; außerdem gilt

$$|f(x)| \leqq |g(x)| < 1 \quad \text{für } x_0 \in \mathrm{U},$$

folglich ist f beschränkt und damit stetig. □

Die Existenz nichttrivialer stetiger Funktionale auf einem topologischen Vektorraum ist somit unmittelbar mit der Existenz konvexer Nullumgebungen verbunden. Diese wiederum findet man definitionsgemäß gerade bei den lokalkonvexen Räumen. Das belegt den in Abschnitt 2.2.2 erwähnten Sachverhalt, nach dem lokalkonvexe Vektorräume stets über nichttriviale stetige lineare Funktionale und damit ebensolche topologische Dualräume zu verfügen.

Wir kommen nun zum zweiten der beiden angekündigten Sätze; dieser verwendet Funktionale allerdings nur als Hilfsmittel bei der Betrachtung schwach beschränkter Folgen von

[61] siehe Beweis von Satz 2.17

linearen Abbildungen. Das Resultat greift einen Sachverhalt aus Abschnitt 2.2.3.4 wieder auf und heißt

2.59 Satz von Banach-Steinhaus: *$\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ seien Banachräume,* M *eine dichte Teilmenge von $\mathcal{E}$ und $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ mit folgenden Eigenschaften.*

(1) für alle $x\in\mathcal{E}$ und alle $f\in\mathcal{F}'$ ist $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|f(\mathcal{A}_n x)|<\infty$,

(2) für alle $x\in$ M ist $(\mathcal{A}_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{F}$.

Dann ist $(\mathcal{A}_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x\in\mathcal{E}$ eine konvergente Folge in $\mathcal{F}$, und durch $\mathcal{A}\,x:=\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{A}_n x$ wird eine Abbildung $\mathcal{A}\in\mathscr{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ definiert.

Beweis: Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Zunächst geht es um die Beschränktheit der Folge $(\mathcal{A}_n x)_{n\in\mathbb{N}}$, danach um deren Konvergenzverhalten.

Die Abbildung $j:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{F}''$ sei definiert durch $j_x(f)=f(x)$ für $x\in\mathcal{E}$ und $f\in\mathcal{E}'$. Dann gilt für alle $x\in\mathcal{F}$ und alle $f\in\mathcal{F}'$

$$|j_x(f)|=|f(x)|\leqq\|f\|\,\|x\|,$$

also auch

$$\|j_x\|\leqq\|x\|,$$

und daher sind die Funktionale j_x stetig für alle $x\in\mathcal{F}$. Folglich ist j beschränkt. Außerdem gibt es nach Corollar 2.57 zu jedem $x\in\mathcal{E}\setminus\{0\}$ ein $g\in\mathcal{E}'$ mit $\|g\|=1$ und $g(x)=\|x\|$. Das liefert

$$|j_x(g)|=|g(x)|=\|x\|$$

und damit $\|j_x\|=\|x\|$ für alle $x\in\mathcal{E}$, das heißt j ist eine Isometrie. Für jedes $f\in\mathcal{F}'$ gilt dann

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|j_{\mathcal{A}_n x}f|=\sup_{n\in\mathbb{N}}|f(\mathcal{A}_n x)|<\infty.$$

Da j isometrisch ist, gilt auch

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|j_{\mathcal{A}_n x}f|=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\mathcal{A}_n x\|_{\mathcal{F}}<\infty$$

und damit nach Satz 2.35

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\mathcal{A}_n\|<\infty.$$

Aus der schwachen folgt also die gleichmäßige Beschränktheit der Folge $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

M ist nach Voraussetzung dicht in $\mathcal{E}$, also gibt es für alle $x\in\mathcal{E}$ und alle $\varepsilon>0$ ein $x_0\in$ M mit $\|x-x_0\|_{\mathcal{E}}\leqq\varepsilon$. Daraus folgt für alle $n,m\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_n x-\mathcal{A}_m x\|_{\mathcal{F}}&\leqq\|\mathcal{A}_n x-\mathcal{A}_n x_0\|_{\mathcal{F}}+\|\mathcal{A}_m x_0-\mathcal{A}_n x_0\|_{\mathcal{F}}+\|\mathcal{A}_n x_0-\mathcal{A}_n x\|_{\mathcal{F}}\\&\leqq\|\mathcal{A}_n\|\,\|x-x_0\|_{\mathcal{E}}+\|\mathcal{A}_m x_0-\mathcal{A}_n x_0\|_{\mathcal{F}}+\|\mathcal{A}_n\|\,\|x_0-x\|_{\mathcal{E}}\end{aligned}$$

$$\leqq \sup_{n \in \mathbb{N}} \| \mathcal{A}_n \| \, \varepsilon + \| \mathcal{A}_m x_0 - \mathcal{A}_n x_0 \|_{\mathcal{F}}.$$

Nach Voraussetzung (2) ist $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge auf M, daher gilt für alle $\eta > 0$ und genügend große $n, m \in \mathbb{N}$

$$\| \mathcal{A}_m x_0 - \mathcal{A}_n x_0 \|_{\mathcal{F}} < \eta,$$

folglich auch

$$\| \mathcal{A}_n x - \mathcal{A}_m x \|_{\mathcal{F}} \leqq \sup_{n \in \mathbb{N}} \| \mathcal{A}_n \| \, \varepsilon + \eta,$$

und da es für alle $\rho > 0$ wiederum $n, m \in \mathbb{N}$ gibt, sodaß $\sup_{n \in \mathbb{N}} \| \mathcal{A}_n \| \, \varepsilon + \eta < \rho$, ist $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge auf ganz $\mathcal{F}$. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{F}$ vollständig und $(\mathcal{A}_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ folglich für alle $x \in \mathcal{E}$ konvergent. Corollar 2.41 liefert daher $\mathcal{A} := \lim_{n \to \infty} \mathcal{A}_n \in \mathscr{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. □

Der Satz von Banach-Steinhaus verallgemeinert Corollar 2.41 dahingehend, daß für eine Folge beschränkter linearer Abbildungen auf einem Banachraum nicht erst die punktweise Konvergenz, sondern sogar schon die schwache Beschränktheit im Verein mit der Eigenschaft, auf einer dichten Teilmenge des Banachraums eine Cauchy-Folge zu sein, für die Existenz eines stetigen Grenzwerts der Folge ausreicht.

Das folgende Corollar liefert ein nützliches Kriterium, um Unterräume normierter Räume daraufhin zu überprüfen, ob sie dicht im größeren Raum sind.

2.60 Corollar: *Ist $\mathcal{E}$ ein normierter Raum und $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}$ ein Unterraum, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathcal{U}$ ist dicht in $\mathcal{E}$.

(ii) Ist $f \in \mathcal{E}'$ mit $f \restriction \mathcal{U} = 0$, so gilt $f = 0$.

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Folgt sofort aus Satz 2.32.
„$\Longleftarrow$“: Sei $x \in \mathcal{E} \setminus \overline{\mathcal{U}}$. Betrachte den Raum $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ und dazu die kanonische Abbildung $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{U}$, die jedes Element von $\mathcal{E}$ auf die passende Äquivalenzklasse in $\mathcal{E}/\mathcal{U}$ schickt. Dann ist $\pi(u) = 0$ für alle $u \in \mathcal{U}$, aber $\pi(x) \neq 0$. Nach Corollar 2.57 gibt es daher ein $f \in (\mathcal{E}/\mathcal{U})'$ mit $f(\pi(x)) \neq 0$. Nun gilt jedoch $f(\pi(u)) = 0$ für alle $u \in \overline{\mathcal{U}}$ und nach Voraussetzung folglich $f(\pi(x)) = 0$ – ein Widerspruch. Damit ist $\mathcal{E} \setminus \overline{\mathcal{U}} = \emptyset$, also $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{E}$. □

Der topologische Dualraum $\mathcal{E}''$ des topologischen Dualraums eines Vektorraums $\mathcal{E}$ heißt *Bidualraum*. Die Abbildung

$$j : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'' \quad \text{mit} \quad j_x(f) = f(x) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{E}' \tag{2.25}$$

ist wie im Beweis von Satz 2.59 gezeigt linear und isometrisch. Die oben erwähnte Folgerung aus Corollar 2.57 liefert außerdem $j_x \neq j_y$ für alle $x, y \in \mathcal{E}$ mit $x \neq y$, sodaß j auch injektiv ist. Damit ist $\mathcal{E}$ stets isometrisch isomorph zu einem Unterraum von $\mathcal{E}''$, oder etwas umgangssprachlicher ausgedrückt, jeder Banachraum ist in seinem Bidualraum enthalten. Ist j auch surjektiv, also ein isometrischer Isomorphismus, dann heißt $\mathcal{E}$ *reflexiver Raum*. Einen solchen Raum kann man mit seinem Bidualraum identifizieren. Hier kommt es jedoch in besonderem Maße auf die Details an, denn wenn ein Raum reflexiv sein soll, muß es genau die beschriebene Abbildung j sein, die isometrisch isomorph ist; die Existenz irgendeines isometrischen Isomorphismus zwischen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}''$ genügt nicht. Folglich ist jeder reflexive Raum $\mathcal{E}$ isometrisch isomorph zu $\mathcal{E}''$, aber nicht jeder zu $\mathcal{E}''$ isometrisch isomorphe Raum $\mathcal{E}$ automatisch auch reflexiv[62]. Ist $\mathcal{E}$ ein Vektorraum über einem vollständigen Körper, dann ist $\mathcal{E}''$ ein Banachraum. Ein Vektorraum kann somit nur dann reflexiv sein, wenn er ein Banachraum ist.

Die Eigenschaft der Reflexivität eines Banachraums überträgt sich auf dessen topologischen Dualraum und umgekehrt, denn es gilt der folgende

2.61 Satz: *Ein Banachraum $\mathcal{E}$ ist genau dann reflexiv, wenn $\mathcal{E}'$ reflexiv ist.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: $\mathcal{E}$ sei reflexiv, dann ist die durch (2.25) definierte Abbildung $j : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}''$ ein isometrischer Isomorophismus. Es ist $\mathcal{E}' \subseteqq \mathcal{E}'''$ vermöge der isometrischen Einbettung φ mit

$$\varphi_f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}(f) \tag{2.26}$$

für alle $f \in \mathcal{E}'$ und alle $\mathfrak{x} \in \mathcal{E}''$. Definiert man $j : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}''$ gemäß (2.25), dann gibt es für alle $\mathfrak{f} \in \mathcal{E}'''$ und alle $\mathfrak{x} \in \mathcal{E}''$ ein $x \in \mathcal{E}$ mit $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{f}(j_x)$. Für das Funktional g auf $\mathcal{E}$ mit $g(x) = \mathfrak{f}(j_x)$ gilt dann einerseits

$$\mathfrak{f}(j_x) = j_x(g) = \varphi_g(j_x),$$

und damit $\mathfrak{f} = \varphi_g$, und andererseits

$$|g(x)| = |\mathfrak{f}(j_x)| \leqq \|\mathfrak{f}\|\,\|j_x\| = \|\mathfrak{f}\|\,\|x\|,$$

das heißt, g ist stetig. Folglich ist φ ein isometrischer Isomorphismus von $\mathcal{E}'$ nach $\mathcal{E}'''$.

„$\Longleftarrow$“: Angenommen, $\mathcal{E}'$ sei reflexiv, $\mathcal{E}$ aber nicht. Dann ist die durch (2.25) definierte Abbildung j zwar isometrisch und injektiv, aber nicht surjektiv, und $j_{\mathcal{E}}$ ist ein echter Unterraum von $\mathcal{E}''$. Nun wählen wir ein $\mathfrak{x} \in j_{\mathcal{E}} \setminus \mathcal{E}''$ und eine Hamel-Basis B von $j_{\mathcal{E}}$; dann ist $\mathrm{B} \cup \{\mathfrak{x}\}$ linear unabhängig, und folglich gibt es zu jedem $\mathfrak{a} \in \operatorname{span}\left\{ \mathrm{B} \cup \{\mathfrak{x}\} \right\}$ und jedem $\mathfrak{b} \in j_{\mathcal{E}}$ ein

[62] Das erste Beispiel hierzu wurde von James gefunden [171]. Mit der im Raum c_0 der reellen Nullfolgen definierten Norm

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_J = \frac{1}{\sqrt{2}} \sup\left\{ \left[\sum_{n=1}^{m-1} (\,a_{p_n} - a_{p_{n+1}}\,)^2 + (\,a_{p_m} - a_{p_1}\,)^2 \right]^{1/2} \,\middle|\, m \geqq 2,\ p_1 < p_2 < \ldots < p_m \right\}$$

wird der nach seinem Entdecker benannte *James-Raum*

$$\mathcal{J} = \{\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \mid \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_J < \infty \,\}$$

zu einem Banachraum. Bei diesem ist die oben definierte kanonische Einbettung j nicht surjektiv, und dennoch kann man eine isometrische bijektive Abbildung zwischen $\mathcal{J}$ und $\mathcal{J}''$ konstruieren. Der James-Raum ist somit eine Beispiel für einen Banachraum, der nicht reflexiv und trotzdem isometrisch isomorph zu seinem Bidualraum ist.

eindeutig bestimmtes $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $\mathfrak{a} = \alpha\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b}$. Da $\mathcal{E}$ ein Banachraum ist, gilt das auch für $j_{\mathcal{E}}$, dieser Raum ist somit in $\mathcal{E}''$ abgeschlossen und außerdem lokalkonvex. Daher gibt es Halbnormen $\|\ \|_1, \|\ \|_2, \ldots, \|\ \|_n$ auf $\mathcal{E}''$ sowie ein $r > 0$ mit $\bigcap_{i=1}^{n} \{\, \mathfrak{y} \in \mathcal{E}'' \mid \|\,\mathfrak{y} - \mathfrak{x}\,\|_i < r\,\} \cap \mathcal{E} = \emptyset$. Wir definieren ein Funktional $\mathfrak{f}$ auf $\mathcal{E}'''$ durch

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{y}) = \sum_{i=1}^{n} \|\mathfrak{y}\|_i$$

für $\mathfrak{y} \in \mathcal{E}''$. Damit gilt für alle $\mathfrak{b} \in j_{\mathcal{E}}$ und alle $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

$$\mathfrak{f}(\,\alpha\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\,) = |\alpha|\,\mathfrak{f}\left(\,\mathfrak{x} + \frac{\mathfrak{b}}{\alpha}\right) = |\alpha| \sum_{i=0}^{n} \left\|\,\mathfrak{x} + \frac{\mathfrak{b}}{\alpha}\right\| \geqq |\alpha|\, r.$$

Nun definieren wir ein Funktional $\mathfrak{g}$ auf $\operatorname{span}\left\{\, \mathrm{B} \cup \{\,\mathfrak{x}\}\,\right\}$ durch

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}) = \alpha$$

für $\mathfrak{a} = \alpha\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b}$. Für dieses gilt

$$|\mathfrak{g}(\,\alpha\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\,)| \leqq \frac{\mathfrak{f}(\,\alpha\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\,)}{r}$$

und damit

$$|\mathfrak{g}(\mathfrak{a})| \leqq \frac{\mathfrak{f}(\mathfrak{a})}{r}$$

für alle $\mathfrak{a} \in \operatorname{span}\left\{\, \mathrm{B} \cup \{\,\mathfrak{x}\}\,\right\}$, das heißt, es gilt $\mathfrak{g} \in \left(\operatorname{span}\left\{\, \mathrm{B} \cup \{\,\mathfrak{x}\}\,\right\}\right)'$. Nach Satz 2.54 beziehungsweise 2.55 gibt es daher ein Funktional $\mathfrak{G} \in \mathcal{E}'''$ mit $\mathfrak{G} \restriction \operatorname{span}\left\{\, \mathrm{B} \cup \{\,\mathfrak{x}\}\,\right\} = \mathfrak{g}$ und $\|\mathfrak{G}\| = \|\mathfrak{g}\|$. Hierfür gilt $\mathfrak{G}(\mathfrak{x}) = 1$ und $\mathfrak{G}(\mathfrak{b}) = 0$ für alle $\mathfrak{b} \in j_{\mathcal{E}}$, also auch $\mathfrak{G}(\,j_x) = 0$ für alle $x \in \mathcal{E}$. Außerdem gibt es nach Voraussetzung ein $f \in \mathcal{E}'$ mit $\mathfrak{G} = \varphi_f$, wobei f durch (2.26) definiert ist. Daraus folgt

$$f(x) = j_x(f) = \varphi_f(\,j_x) = \mathfrak{G}(\,j_x).$$

Dann wäre jedoch $f = 0$ in $\mathcal{E}'$ und damit $\varphi_f = \mathfrak{G} = 0$ in $\mathcal{E}'''$ – ein Widerspruch. Folglich ist $\mathcal{E}$ reflexiv. $\square$

Nichtreflexive Banachräume können in der oben beschriebenen Weise zwar nicht mit ihren Bidualräumen, wohl aber jeweils mit echten Unterräumen derselben identifiziert werden. Das gilt auf jeder Stufe der Dualraumbildung.

2.62 Satz: *Ist $\mathcal{E}$ ein nichtreflexiver Banachraum, dann liefert die Isometrie (2.25) echte Inklusionsketten $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}'''' \subset \ldots$ und $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}''' \subset \mathcal{E}''''' \subset \ldots$.*

Beweis: Schreiben wir $\mathcal{A} \approxeq \mathcal{B}$ für isometrisch isomorphe Räume $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sowie $\mathcal{E}^{(n)}$ für den n-ten Dualraum von $\mathcal{E}$, dann führt $\mathcal{E}^{(n)} \approxeq \mathcal{E}^{(\,n+2\,)}$ im Sinne der Isometrie (2.25) zunächst auf $\mathcal{E}^{(\,n-1\,)} \approxeq \mathcal{E}^{(\,n+1\,)}$, dann auf $\mathcal{E}^{(\,n-2\,)} \approxeq \mathcal{E}^{(n)}$ und somit iterativ schließlich auf $\mathcal{E}^{(0)} \approxeq \mathcal{E}^{(2)}$, also $\mathcal{E} \approxeq \mathcal{E}''$. $\square$

Wir wenden uns noch kurz den unbeschränkten linearen Funktionalen zu; für diese gelten die weiter oben diskutierten Besonderheiten unbeschränkter linearer Abbildungen auf unendlichdimensionalen Vektorräumen im wesentlichen genauso. Auch sie lassen sich nicht in konstruktiver Weise explizit angeben. Wir haben gesehen, daß auf jedem unendlichdimensionalen Vektorraum unbeschränkte lineare Abbildungen existieren; daraus oder aus Satz 2.51 folgt, daß es dort stets auch unbeschränkte lineare Funktionale gibt. Mit Hilfe von Hamel-Basen lassen sich solche Funktionale konstruieren. Dazu sei $\mathcal{V}$ ein beliebiger unendlichdimensionaler normierter Vektorraum und $\mathsf{B} = \{x_\gamma\}_{\gamma<\Gamma}$ eine Hamel-Basis; hierbei gelte $|\mathcal{V}| = |\Gamma| \geqq \mathfrak{c}$, um die Sache nicht trivial werden zu lassen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man $\|x_\gamma\| = 1$ setzen für alle $\gamma < \Gamma$. Jedes $x \in \mathcal{V}$ ist damit in der Form $x = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \, x_{\gamma_k}$ darstellbar mit eindeutig bestimmten Skalaren α_k und $\gamma_k < \Gamma$. Weiter sei $\mathsf{A} = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Teilmenge von Γ. Nun definieren wir ein lineares Funktional f auf $\mathcal{V}$ durch

$$\begin{aligned} f(x_{\gamma_n}) &= n \quad \text{für} \quad \gamma_n \in \mathsf{A}, \\ f(x_\gamma) &= 0 \quad \text{für} \quad \gamma \in \Gamma \setminus \mathsf{A}. \end{aligned}$$

Nach Satz 2.26 ist f damit auf ganz $\mathcal{V}$ eindeutig definiert; genauergesagt gilt für alle $x \in \mathcal{V}$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \, f(x_{\gamma_k}).$$

f ist offensichtlich linear, und wegen $\sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)| = \aleph_0$ ist f unbeschränkt. Da jeder Vektorraum eine Hamel-Basis besitzt, ist gleichzeitig auch die Existenz von f gesichert. Natürlich existieren in jedem unendlichdimensionalen Banachraum sehr viele Hamel-Basen, folglich gibt es auch sehr viele lineare unbeschränkte Funktionale. Algebraische Dualräume von Banachräumen sind daher im allgemeinen viel größer als die entsprechenden topologischen Dualräume, womit wir eine erste teilweise Bestätigung des im Anschluß des Beweises von Satz 2.52 angedeuteten Sachverhalts haben. Genaueres dazu werden wir ebenfalls im nächsten Abschnitt sehen.

2.2.3.8 Basen in Banachräumen

Wir kommen nun zu einem Thema, daß sich als unerwartet komplex erweisen wird. Da wir uns natürlich auch hier mit unendlichdimensionalen Räumen beschäftigen, werden wir den Begriff der Basis auf zwei ganz unterschiedliche Arten definieren, die beide sehr viel subtiler sind als das, was man aus der elementaren linearen Algebra gewohnt ist. Selbiges erweist sich nur für den endlichdimensionalen Fall als tragfähig und gleichzeitig als Sonderfall beider unendlichdimensionaler Versionen[63].

Vorläufig stehen jedoch nur die oben bereits erwähnten Hamel-Basen im Blickpunkt; aus rein algebraischer Sicht sind das auch die einzigen, die in sinnvoller Weise definiert werden

[63] Einen Überblick über die Thematik findet man in [26].

können, da hier keine Topologie und damit auch keinerlei Konvergenzbegriffe zur Verfügung stehen. Um die Darstellbarkeit aller Elemente eines unendlichdimensionalen Banach-Raumes durch endliche Linearkombinationen zu gewährleisten, müssen diese sehr groß sein, was zunächst durch folgendes Resultat nur angedeutet wird[64].

2.63 Satz: *Unendlichdimensionale Banachräume haben stets überabzählbare Hamel-Basen.*

Beweis: $\mathcal{E}$ sei ein unendlichdimensionaler Banachraum, und es gebe eine abzählbare Basis von $\mathcal{E}$, etwa $\mathrm{B} = \{ b_n \mid n \in \mathbb{N} \}$. Außerdem sei für alle $n \in \mathbb{N}$ jeweils $\mathcal{E}_n := \operatorname{span} \{ b_1, b_2, \ldots, b_n \}$. Die $\mathcal{E}_n$ sind Unterräume endlicher Dimension und damit nirgends dicht in $\mathcal{E}$. Gleichzeitig gilt jedoch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n = \mathcal{E}$, und damit wäre $\mathcal{E}$ als vollständiger metrischer Raum eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen – ein Widerspruch zu Satz 1.11. Folglich ist B überabzählbar. $\square$

Das bedeutet im Umkehrschluß, daß normierte Räume mit abzählbaren Hamel-Basen und damit abzählbar Dimension grundsätzlich nicht vollständig sein können. Tatsächlich kann man noch eine ganze Menge mehr beweisen[65].

2.64 Satz: *(i) Ist $\mathcal{E}$ ein unendlichdimensionaler Banachraum, dann hat jede Hamel-Basis von $\mathcal{E}$ mindestens die Mächtigkeit des Kontinuums.*
(ii) Für jeden unendlichdimensionalen Banachraum $\mathcal{E}$ gilt: Ist B *eine Hamel-Basis von $\mathcal{E}$, dann ist $|\mathcal{E}| = |\mathrm{B}|$, das heißt, die Dimension von $\mathcal{E}$ ist $|\mathcal{E}|$.*

Beweis: (i) Zunächst sei $|\mathbb{K}| < \mathfrak{c}$ vorausgesetzt. $\mathrm{A} = \{ x_\kappa \mid \kappa < \lambda < \mathfrak{c} \} \subseteqq \mathcal{E}$ sei eine Familie aus Elementen von $\mathcal{E}$ mit Kardinalität kleiner als $\mathfrak{c}$. Es werde angenommen, A sei eine Hamel-Basis von $\mathcal{E}$. Mit Lemma 2.8 aus Abschnitt 2.1.2 folgt jedoch

$$\mathfrak{c} \leqq |\mathcal{E}| = |\mathbb{K}|\,|\mathrm{A}| < \mathfrak{c}$$

– ein Widerspruch. Sei nun also $|\mathbb{K}| = \mathfrak{c}$. Es sei zunächst $f_1 \neq 0$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{E}$; dazu wählen wir ein $x_1 \in \mathcal{E} \setminus \ker f_1$ mit $\|x_1\| = 1$. Dann sei f_2 ein stetiges lineares Funktional auf $\ker f_1$, und wir wählen ein $x_2 \in \ker f_1 \setminus \ker f_2$ mit $\|x_2\| = 1/2$. Auf diese Weise erhalten wir iterativ ein Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionalen sowie eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Vektoren in $\mathcal{E}$ mit $\|x_n\| = 1/2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei sind jeweils $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ Elemente eines abgeschlossenen Unterraums $\mathcal{A}$ von $\mathcal{E}$ mit $x_1, x_2, \ldots, x_n \notin \mathcal{A}$. Nun wählen wir eine beschränkte Folge $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ und erhalten damit eine Cauchy-Folge $\left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ in

[64] Der hier gezeigte, altbekannte Beweis ist dank der Verwendung des Baireschen Kategorientheorems sehr kurz. Vergleiche auch [27]. Ein Beweis, der mit elementaren Mitteln und ohne dieses Theorem auskommt, wurde von Tsing angegeben [376]; vergleiche auch [261].

[65] Die nachfolgend beschriebene Verallgemeinerung von Satz 2.63 stammt von MacKey [239]; Halbeisen und Hungerbühler liefern in [134] einen alternativen Beweis hierfür, der ausschließlich mengentheoretische Wege geht.

$\mathcal{E}$, denn es gilt $\lim_{n\to\infty}(1/2^n) = 0$ und nach Voraussetzung $\lim_{n\to\infty}|\lambda_n| < \infty$; da $\mathcal{E}$ vollständig ist, hat diese Folge einen Grenzwert in $\mathcal{E}$. Durch die beschriebene Prozedur wird eine Abbildung F vom Raum $\ell^\infty(\mathbb{K})$ der beschränkten Folgen in $\mathbb{K}$ nach $\mathcal{E}$ definiert. Wir zeigen nun, daß F injektiv ist. Da Linearkombinationen unter F offensichtlich erhalten bleiben, genügt es zu zeigen, daß $F(\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0$ genau dann gilt, wenn $\lambda_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist für eine absolut beschränkte Folge $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n = 0,$$

dann gilt auch

$$\lambda_1 x_1 = -\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n x_n.$$

Da jedoch $x_2, x_3, \ldots$ Element von $\mathcal{E} \setminus \mathcal{K}(f_1)$ und damit von einem abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{E}$ ist, der x_2 nicht enthält, folgt daraus $\lambda_1 = 0$ und somit

$$\lambda_2 x_2 = -\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n x_n.$$

Mit analogen Argumenten folgt nun $\lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$ und damit

$$\lambda_{n+1} x_{n+1} = -\sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j x_j,$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$, also per vollständiger Induktion $\lambda_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da nun also $\ell^\infty(\mathbb{K})$ durch F injektiv auf $\mathcal{E}$ abgebildet wird, ist die Dimension von $\mathcal{E}$ mindestens so groß wie diejenige von $\ell^\infty(\mathbb{K})$. Anderseits bilden die Folgen $\{t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $0 < t < 1$, eine linear unabhängige Familie der Kardinalität $\mathfrak{c}$ in $\ell^\infty(\mathbb{K})$. Folglich ist die Dimension von $\mathcal{E}$ mindestens $\mathfrak{c}$, und für jede Hamelbasis B von $\mathcal{E}$ gilt $|\mathfrak{B}| \geqq \mathfrak{c}$.

(ii) Ist $\mathcal{E}$ ein unendlichdimensionaler Banachraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und B eine Hamelbasis von $\mathcal{E}$, dann gilt nach Lemma 2.8 $|\mathcal{E}| = \max\{|\mathbb{K}|, |\mathrm{B}|\}$ und nach (i) $|\mathrm{B}| \geqq \mathfrak{c}$. Gleichzeitig ist $|\mathbb{K}| \leqq \mathfrak{c}$, und daraus folgt sofort $|\mathcal{E}| = |\mathrm{B}|$. □

Die Aussage von Satz 2.64 läßt sich verallgemeinern. Ist $\mathcal{E}$ ein unendlichdimensionaler vollständiger metrischer Vektorraum, dann ist dessen Dimension $|\mathcal{E}|$. Noch etwas allgemeiner gilt: Jeder metrische Vektorraum $\mathcal{E}$, für den der Raum seiner kompakten Teilmengen ein Baire-Raum ist[66], hat die Dimension $|\mathcal{E}|$. Beweise für beide Resultate findet man bei [25].

Als Nebenprodukte ergeben sich einige zusätzliche Aussagen, beispielsweise $[\mathbb{R}\colon\mathbb{Q}] = \mathfrak{c}$, was die Vorstellung von $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum noch etwas beeindruckender macht[67], außerdem etwas allgemeiner das folgende

[66] Das ist natürlich insbesondere für jeden Banachraum der Fall.

[67] Hier lassen sich mit einigen algebraischen Hilfsmitteln ebenfalls weitergehende Aussagen machen. Zum einen gilt für jeden Teilkörper $\mathbb{K}$, zu dem $\mathbb{R}$ eine transzendente Erweiterung ist, $[\mathbb{R}\colon\mathbb{K}] = \mathfrak{c}$, und wenn $\mathrm{S} \subset \mathbb{R}$

2.65 Corollar: *Jeder unendlichdimensionale separable Banachraum hat die Dimension $\mathfrak{c}$.*

Das ist eine direkte Konsequenz aus Satz 2.64 (i)[68]. Ob dasselbe auch allgemeiner für unendlichdimensionale vollständige separable metrische Vektorräume gilt, ist noch nicht bekannt. Ein weiteres wichtiges Folgeresultat betrifft die Anzahl der Hamel-Basen von Banach-Räumen.

2.66 Corollar: *Jeder Banachraum $\mathcal{E}$ über einem vollständigen Körper besitzt $2^{|\mathcal{E}|}$ unterschiedliche Hamel-Basen.*

Beweis: $\mathsf{B} \subsetneqq \mathcal{E}$ sei eine Hamel-Basis von $\mathcal{E}$ und $b_0 \in \mathsf{B}$ eines ihrer Basiselemente. Für jede Menge $\mathsf{A} \subsetneqq \mathsf{B} \setminus \{b_0\}$ läßt sich daraus eine neue Hamel-Basis konstruieren; dazu sei $\mathsf{X_A} := \{\, b_0 + b \mid b \in \mathsf{A} \,\}$, dann ist $\mathsf{B_A} := \mathsf{X_A} \cup (\mathsf{B} \setminus \mathsf{A})$ eine Hamel-Basis von $\mathcal{E}$. Für je zwei Teilmengen A und A' von $\mathsf{B} \setminus \{b_0\}$ gilt $\mathsf{B_A} \neq \mathsf{B_{A'}}$. Außerdem gibt es wegen $|\mathcal{E}| = |\mathsf{B}| = |\mathsf{B} \setminus \{b_0\}|$ genausoviele Teilmengen von $\mathsf{B} \setminus \{b_0\}$ wie von $\mathcal{E}$, und folglich besitzt $\mathcal{E}$ mindestens $2^{|\mathcal{E}|}$ unterschiedliche Hamel-Basen. Da es natürlich auch nicht mehr sein können, ist ihre Anzahl genau $2^{|\mathcal{E}|}$. □

Damit gilt $|\{\, \mathsf{B} \in \mathfrak{P}(\mathcal{E}) \mid \mathsf{B} \text{ ist Hamel-Basis von } \mathcal{E} \,\}| = |\mathfrak{P}(\mathcal{E})|$. Die Menge der Hamel-Basen eines unendlichdimensionalen Banachraums ist eine echte Teilmenge der Potenzmenge des Banachraums, aber dennoch genauso mächtig wie diese. – Außerdem läßt sich ein Resultat über die Größe der Räume der linearen Abbildungen auf Banachräumen beweisen.

2.67 Satz: *(i) Für den Raum $\mathscr{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ der linearen Abbildungen von einem Banachraum $\mathcal{E}$ auf einen Banachraum $\mathcal{F}$ gilt $|\mathscr{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})| = |\mathcal{F}|^{|\mathcal{E}|}$.*
(ii) Für den algebraischen Dualraum $\mathcal{E}^*$ eines Banachraums $\mathcal{E}$ gilt $|\mathcal{E}^*| = 2^{|\mathcal{E}|}$.

Beweis: (i) Da nach Satz 2.26 lineare Abbildungen auf $\mathcal{E}$ durch die Bilder der Elemente einer Hamel-Basis B bereits eindeutig definiert sind, gilt für die Menge $\mathscr{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ der linearen Abbildungen auf $\mathcal{E}$, deren Bilder in $\mathcal{F}$ liegen, $|\mathscr{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})| = |\mathcal{F}|^{|\mathsf{B}|}$, und mit $|\mathcal{E}| = |\mathsf{B}|$ folgt $|\mathscr{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})| = |\mathcal{F}|^{|\mathcal{E}|}$.
(ii) Analog gilt für die Menge $\mathcal{E}^*$ der linearen Funktionale auf $\mathcal{E}$, deren Bilder in $\mathbb{K}$ liegen, $|\mathcal{E}^*| = \mathfrak{c}^{|\mathsf{B}|} = 2^{|\mathsf{B}|} = 2^{|\mathcal{E}|}$. □

Stetige lineare Abbildungen auf einem Raum $\mathcal{E}$ sind stets schon durch Angabe ihrer Bilder auf einer dichten Teilmenge von $\mathcal{E}$ eindeutig festgelegt. Für den Raum $\mathscr{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ der stetigen linearen Abbildungen gilt daher $|\mathscr{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})| = |\mathcal{F}|^{\mathfrak{d}(\mathcal{E})}$, und für den topologischen Dualraum $\mathcal{E}'$ gilt $|\mathcal{E}'| = 2^{\mathfrak{d}(\mathcal{E})}$. Das ist eine Verallgemeinerung des wohlbekannten Sachverhalts, daß es

---

algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist, ergibt sich gleichfalls $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}(\mathsf{S})] = \mathfrak{c}$. Ist anderseits $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $\mathbb{K}$ ein maximaler Teilkörper von $\mathbb{R}$ mit $\alpha \notin \mathbb{K}$, dann gilt lediglich $[\mathbb{R} : \mathbb{K}] = \aleph_0$. Details hierzu findet man in [205]. Die Frage, ob es weitere Klassen von Teilkörpern von $\mathbb{R}$ mit anderem transfinitem Körpergrad, also derart, daß $\mathbb{R}$ eine unendliche Körperweiterung ist, überhaupt geben kann, erweist sich somit als äquivalent zur Frage nach der Unrichtigkeit der Kontinuumshypothese.

[68] Vergleiche auch [88].

auf $\mathbb{R}$ zwar $2^{\mathfrak{c}}$ reelle Funktionen gibt, aber nur $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ stetige Funktionen[69].

Wenn man auch die topologische Struktur der Banachräume betrachtet, sind weitere Aussagen über deren Mächtigkeit möglich; insbesondere läßt sich letztere mit der Dichte der Räume, also der Mächtigkeit der kleinsten dichten Teilmenge eines topologischen Raums in Verbindung bringen. Beispielsweise gilt für eine linear unabhängige Familie A von Vektoren eines reellen oder komplexen Banachraums $\mathcal{E}$ mit $\overline{\operatorname{span} \mathsf{A}} = \mathcal{E}$ stets $|\mathsf{A}| = \mathfrak{d}(\mathcal{E})$. Denn für die Menge B aller endlicher rationaler Linearkombinationen aus A gilt einerseits

$$|\mathsf{B}| = |\mathbb{Q}|\,|\mathsf{A}| = \max\{\,\aleph_0, |\mathsf{A}|\,\} \leqq |\mathsf{A}|$$

und andererseits

$$|\mathsf{B}| \geqq \mathfrak{d}(\mathcal{E}),$$

weil B dicht in $\mathcal{E}$ ist. Noch weitaus gewichtiger ist das nächste, folgenreiche Resultat.

2.68 Satz:[70] *Für jeden Banachraum $\mathcal{E}$ gilt* $\mathfrak{d}(\mathcal{E})^{\omega} = |\mathcal{E}|$.

Beweis: Ist $\mathcal{E}$ endlichdimensional, so ist der Satz trivial. Sei also $\mathcal{E}$ unendlichdimensional. $\mathcal{E}$ ist ein metrischer Raum, für dessen Dichte $\mathfrak{d}(\mathcal{E})$ und Gewicht $\mathfrak{w}(\mathcal{E})$ gilt somit $\mathfrak{d}(\mathcal{E}) = \mathfrak{w}(\mathcal{E})$. Der Raum $\mathcal{E}$ enthält außerdem $\mathfrak{d}(\mathcal{E})$ paarweise disjunkte offene Mengen[71]. Für beliebige offene Teilmengen A von $\mathcal{E}$ gilt stets $\mathfrak{w}(\mathsf{A}) = \mathfrak{w}(\mathcal{E})$, sodaß solche Mengen gleichfalls jeweils $\mathfrak{d}(\mathcal{E})$ paarweise disjunkte offene Mengen enthalten. Nun betrachten wir in $\mathcal{E}$ abzählbar viele disjunkte offene Kugeln, dann in jeder dieser Kugeln wieder abzählbar viele offene Kugeln, und wenn wir das unendlich oft iterieren, erhalten wir einen Baum der Höhe ω mit $\mathfrak{d}(\mathcal{E})^{\omega}$ unterschiedlichen Zweigen. Der Durchmesser der offenen Kugeln geht in jedem Zweig gegen Null, folglich auch der Abstand zwischen beliebigen Punkten in den Kugeln, und damit liefert jeder Zweig eine Cauchy-Folge in $\mathcal{E}$. Weil $\mathcal{E}$ vollständig ist, hat jede Cauchy-Folge in $\mathcal{E}$

[69]Maßtheoretisch formuliert sind somit fast alle linearen Abbildungen, fast alle linearen Funktionale und fast alle reellen Funktionen nirgends stetig. Nirgends stetige Funktionen stellen somit stets den absoluten Normalfall dar. Im Rahmen der stochastischen Analysis kann man übrigens zeigen, daß von den stetigen Funktionen wiederum fast alle nirgends differenzierbar sind. Auch diese sind folglich trotz der Mühe, die es macht, Beispiele dafür anzugeben, unter den stetigen Funktionen der Standard. Das was man sich typischerweise unter einer Funktion einschließlich ihres Schaubilds vorstellt, bildet nur einen extremen Ausnahmefall eines extremen Ausnahmefalls unter der Gesamtheit aller Funktionen.

[70]Dieses Resultat stammt von Juhász und Szentmiklóssy.

[71]Das folgt aus dem *Metrisationstheorem von Bing* [33], wonach ein topologischer Raum X genau dann metrisierbar ist, wenn

(i) jede abgeschlossene Teilmenge A von X und jeder Punkt $x \notin \mathsf{A}$ durch offene Umgebungen getrennt sind (man sagt dann, X sei *regulär*),

(ii) von je zwei Punkten $x_1, x_2\aleph \in \mathsf{X}$ mindestens einer eine offene Umgebung besitzt, welche den anderen nicht enthält und

(iii) X eine σ-diskrete Basis $\mathfrak{B}$ besitzt, das heißt, es gibt eine Folge $\{\mathfrak{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus Familien von Teilmengen von X, sodaß für alle $n \in \mathbb{N}$ jedes $x \in \mathsf{X}$ eine Umgebung besitzt, die mit mindestens einem Element von $\mathfrak{F}_n$ nichtleeren Durchschnitt hat, und für die $\mathfrak{B} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_n$ gilt.

.

einen Grenzwert in $\mathcal{E}$, sodaß es höchstens soviele Zweige wie Elemente von $\mathcal{E}$ gibt. Es gilt also $\mathfrak{d}(\mathcal{E})^\omega \leqq |\mathcal{E}|$. Nun sei D die kleinste dichte Teilmenge von $\mathcal{E}$. Jedes Element von $\mathcal{E}$ ist Grenzwert einer abzählbaren Folge aus D, folglich gilt $|\mathcal{E}| \leqq \mathfrak{d}(\mathcal{E})^\omega$. Beide Ungleichungen zusammen liefern $\mathfrak{d}(\mathcal{E})^\omega = |\mathcal{E}|$. □

Liest man Satz 2.68 rückwärts, so landet man bei dem bemerkeswerten Sachverhalt, daß die Mächtigkeit eines jeden unendlichdimensionalen Banachraums von der Form $\kappa^{\aleph_0}$ ist mit irgendeiner Kardinalzahl $\kappa \geqq \aleph_0$ [72] – bemerkenswert deswegen, weil natürlich keineswegs jede transfinite Kardinalzahl von dieser Gestalt ist[73]. Andererseits gibt es zu jeder Kardinalzahl κ einen Vektorraum $\mathcal{V}$ mit $|\mathcal{V}| = \kappa$, woran man sieht, daß nicht jeder Vektorraum mit Hilfe einer Norm zu einem Banachraum gemacht werden kann oder, etwas anders formuliert, isomorph zu einem Banachraum ist; das ist genau bei jenen unendlichdimensionalen Vektorräumen nicht der Fall, deren Dimension nicht gleich der $\aleph_0$-ten Potenz einer Kardinalzahl ist. Kardinalzahl-Arithmetik ist eine tiefschürfende Teildisziplin der Mengenlehre mit vielen offenen Fragen, und insbesondere über Kardinalzahlexponentiation weiß man noch nicht wirklich viel[74]. $\aleph_1$ beispielsweise ist nur genau dann von der Gestalt $\kappa^{\aleph_0}$, wenn die Kontiunuumshypothese zutrifft. Unabhängig davon gilt $\left(\kappa^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = \kappa^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = \kappa^{\aleph_0}$, folglich ist eine transfinite Kardinalzahl λ genau dann von der Form $\kappa^{\aleph_0}$, wenn $\lambda = \lambda^{\aleph_0}$ gilt. Das hilft allerdings auch nicht sehr viel weiter. Garantiert nicht von der Form $\kappa^{\aleph_0}$ sind Kardinalzahlen der Konfinalität ω. Wir erinnern daran, daß die Konfinalität einer Kardinalzahl κ beschreibt, wieviele Schritte von kleinerer Kardinalität als κ man mindestens braucht, um κ zu erreichen oder anders formuliert, wieviele kleinere Mengen man mindestens vereinigen muß, um eine Menge der Mächtigkeit κ zu erhalten:

$$\begin{aligned} \mathrm{cf}\,(\kappa) = {} & \text{die kleinste Limesordinalzahl } \alpha \text{, so daß es eine} \\ & \text{aufsteigende Folge } (\kappa_\xi)_{\xi<\alpha} \text{ gibt mit } \lim_{\xi\to\alpha} \kappa_\xi = \kappa. \end{aligned}$$

Entsprechend läßt sich eine Minimalforderung für mögliche Mächtigkeiten von Banachräumen aufstellen in Gestalt von folgendem

2.69 Satz: *Für jeden Banachraum $\mathcal{E}$ gilt* $\mathrm{cf}\,(|\mathcal{E}|) > \omega$.

Beweis: Für zwei unendliche Kardinalzahlen κ und λ gilt stets $\mathrm{cf}\,(\kappa^\lambda) > \lambda$. Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 2.64. □

Zusammengenommen bedeutet das, daß ein unendlichdimensionaler Vektorraum $\mathcal{V}$ genau dann isomorph zu einem Banachraum ist, wenn $|\mathcal{E}|$ eine Kardinalzahl der Form $\kappa^{\aleph_0}$ mit

[72] Einen direkten Beweis dieser Aussage findet man bei [204].

[73] Da insbesondere $\aleph_0 \neq \kappa^{\aleph_0}$ gilt, folgt daraus mit Satz 2.64 (ii) wieder Satz 2.63.

[74] Immerhin sind beispielsweise solch erstaunliche Resultate bekannt wie Saharon Shelahs spektakuläre Relation

$$\aleph_\omega^{\aleph_0} \leqq 2^{\aleph_0} + \aleph_{\omega_4}.$$

(Die Zahl 4 ist kein Druckfehler!) Einen Überblick über derlei Ergebnisse und das Rechnen mit transfiniten Kardinalzahlen allgemein findet man in [164] und [342].

überabzählbarer Konfinalität ist. Damit sind natürlich der Größe keine Grenzen gesetzt; zu jeder, auch jeder großen Kardinalzahl κ gibt es Banachräume mit Mächtigkeit echt größer als κ.

Satz 2.64 liefert in etwas anderer Formulierung die Aussage, daß jede Hamel-Basis eines unendlichdimensionalen Banachraums stets schon genausoviele Elemente hat wie der ganze Raum. Entsprechend unhandlich sind solche Objekte, ganz abgesehen davon, daß es im allgemeinen keinerlei konstruktive Verfahren gibt, zu einem Banachraum überhaupt eine Hamel-Basis zu finden. Nach Satz 2.9 weiß man lediglich stets, daß eine Hamel-Basen existiert, und damit gibt es auch immer überabzählbar unendlich viele Hamel-Basen. Auf der anderen Seite erlaubt die topologische Struktur von Banachräumen wie gesehen die Betrachtung konvergenter Reihen, womit sich ein alternativer Basisbegriff etablieren läßt: Man kann nun nämlich die Beschränkung auf endliche Linearkombinationen fallenlassen und auch unendliche Linearkombinationen betrachten [326].

2.70 Definition: (i) Eine Folge $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ von Elementen eines lokalkonvexen Raums $\mathcal{E}$ heißt *Schauder-Basis* von $\mathcal{E}$, wenn es zu jedem $x \in \mathcal{E}$ eine eindeutig bestimmte Folge $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ gibt, sodaß $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j\, e_j$ gilt[75].

(ii) Eine Schauder-Basis $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{E}$ heißt *unbedingte Basis* von $\mathcal{E}$, wenn $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j\, e_j$ unbedingt konvergiert[76].

(iii) Eine Folge $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ heißt *Basisfolge*, wenn sie eine Schauder-Basis des Abschlusses ihrer linearen Hülle ist.

(iv) Eine Folge $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ heißt *unbedingte Basisfolge*, wenn sie eine unbedingte Basis ihrer linearen Hülle ist.

Für endlichdimensionale Vektorräume sind Schauder- und Hamel-Basen natürlich dasselbe. Bei unendlichdimensionalen Vektorräumen ist das nicht mehr der Fall. Insbesondere kann eine Schauder-Basis eines unendlichdimensionalen vollständigen metrischen Raums niemals eine Hamel-Basis sein, da letztere stets viel größer als erstere ist; genauergesagt sind Schauder-Basen abzählbar, Hamel-Basen bei unendlichdimensionalen Banachräumen jedoch wie gesehen immer überabzählbar.

Aus der Definition sind einige Eigenschaften von Schauder-Basen unmittelbar ersichtlich:

- Jede Schauder-Basis $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ist linear unabhängig,
- für eine beliebige Schauder-Basis $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eines Raums $\mathcal{E}$ gilt stets $\overline{\operatorname{span}\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}} = \mathcal{E}$,
- daraus folgt $|\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}| = \mathfrak{d}(\mathcal{E})$,
- die bei Entwicklungen von Vektoren nach Schauder-Basen auftretenden Koeffizientenfunktionale $\varphi_j : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$, $\varphi_j(x) = \alpha_j$, sind für alle $j \in \mathbb{N}$ stets linear,

[75] Vorsicht: Die Verwendung dieses Begriffs erfolgt in der Literatur nicht ganz einheitlich; Beispiele für Abweichungen von der hier verwendeten weit verbreiteten Variante findet man in [4] und [261].

[76] Siehe Abschnitt 2.2.3.3.

- damit ist $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis von $\mathcal{E}'$, die *duale Basis* zu $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, und
- jeder Raum, der eine Schauder-Basis besitzt, ist separabel.

Umgekehrt gibt es jedoch nicht zu jedem separablen Banachraum eine Schauder-Basis; ein erstes, allerdings exotisches Gegenbeispiel wurde von Enflo angegeben [90][77]. Der Raum $\mathscr{L}(\ell^2)$ ist ein weiteres, etwas alltäglicheres Beispiel für einen Banachraum ohne Schauder-Basis[78]. Immerhin besitzt jeder unendlichdimensionale Banach-Raum einen separablen Unterraum mit einer Schauder-Basis [226][79], und zu jedem unendlichdimensionalen separablen Banach-Raum gibt es einen unendlichdimensionalen Quotientenraum mit einer Schauder-Basis [182][80]. Jeder unendlichdimensionale Banachraum besitzt eine Basisfolge[81]; es gibt jedoch unendlichdimensionale Banachräume, zu welchen keine unbedingten Basisfolgen existieren[82]. Garantiert gibt es diese erst bei Banachräumen ab einer bestimmten Größe; das wurde erstmals von Ketonen gezeigt [199], der bewies, daß jeder Banachraum $\mathcal{E}$, dessen Dimension ρ eine Ramsey-Kardinalzahl[83] ist, einen Unterraum enthält, zu dem eine unbedingte Basis der Mächtigkeit ρ existiert. Tokarev konnte dieses Ergebnis weiter verbessern [372], [373] und zeigen, daß bereits jeder Banachraum der Dimension $\beth_{\omega_1}$ einen unendlichdimensionalen Unterraum enthält, zu dem eine unbedingte Basis existiert.

Wir betrachten einige Beispiele für Schauder-Basen.

a) $\ell^p = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}\; x_n \in \mathbb{R} \wedge \sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ mit der $\|\ \|_p$-Norm; $1 \leqq p < \infty$. Hier bilden die Folgen $\{\, (x_{n,j})_{n\in\mathbb{N}} \mid x_{n,j} = \delta_{nj},\ j \in \mathbb{N} \,\}$ mit jeweils einer 1 an der n-ten Stelle eine Schauder-Basis und sogar eine unbedingte Basis.

b) $C[0,1] = \{\, f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \,\}$ mit der Supremumsnorm $\|\ \|_\infty$. Es seien

$$f_0(x) \equiv 1, \quad f_1(x) = x,$$

[77] Enflo betrachtet die Gruppe $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ sowie die disjunkte Vereinigung $\mathrm{K}_m = \bigcup\limits_{j=1}^{k_m} \mathbb{Z}_2^{\,n_m}$ mit geeigneten monoton steigenden Folgen $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$, außerdem den Raum $\ell^2[C(\mathrm{K}_m)]$ der Funktionenfolgen $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ aus $C(\mathrm{K}_m)$ mit $\|(f_m)_{m\in\mathbb{N}}\| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|f_m\|_\infty^2 < \infty$. Nun wählt er spezielle Unterräume $\mathrm{M} \subset \mathrm{C}(\mathrm{K}_m) \oplus \mathrm{C}(\mathrm{K}_{m+1})$ und erhält mit $\mathcal{B} = \operatorname{span} \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{M}_m$ einen separablen, reflexiven Banachraum, der keine Schauder-Basis besitzt; der Nachweis dieser Eigenschaft ist allerdings nicht ganz trivial. Siehe hierzu auch [61] und [176].

[78] Das wurde von Szankowski entdeckt [363].

[79] Dieses Resultat war bereits Banach bekannt.

[80] Vergleiche [226].

[81] Einen Beweis findet man bei Lindenstrauss und Tzafriri [226], die ihrerseits hierfür auf Mazur verweisen, allerdings ohne genaueres Zitat.

[82] Ein erstes Beispiel wurde von Maurey und Rosenthal gefunden [250]. Vergleiche auch [114], wo die Autoren sogar ein reflexives Gegenbeispioel konstruieren.

[83] Ramsey-Kardinalzahlen sind spezielle große Kardinalzahlen. Eine überabzählbare Kardinalzahl κ heißt Ramsey-Kardinalzahl, wenn es für jede Funktion $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0,1\}$ eine Menge A mit $|\mathrm{A}| = \kappa$ gibt, sodaß f für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf allen n-elementigen Teilmengen von A konstant ist. Jede Ramsey-Kardinalzahl ist unerreichbar und schwach kompakt; umgekehrt ist jede meßbare Kardinalzahl eine Ramsey-Kardinalzahl.

$$f_{nj}(x) = \begin{cases} 2^n x - 2(j-1) & \text{für} \quad (j-1)/2^n \leqq x < j/2^{n+1} \\ 2(j+1) - 2^n x & \text{für} \quad j/2^{n+1} \leqq x < j/2^n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $x \in [0,1]$ sowie $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leqq j \leqq 2^{n-1}$. Ordnet man diese sogenannten *Hütchenfunktionen*[84] in der Reihenfolge

$$f_0, f_1, f_{11} \equiv f_3, f_{21} \equiv f_4, f_{22} \equiv f_5, f_{31} \equiv f_6, f_{32} \equiv f_7, f_{33} \equiv f_8, \ldots,$$

so erhält man mit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis für $C[0,1]$. Auf $C(\Omega)$-Räumen gibt es jedoch keine unbedingte Basen[85].

c) $\mathscr{L}^p([0,1]) = \left\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \;\middle|\; \int\limits_0^1 |f(x)|^p \, dx < \infty \text{ fast überall} \right\}$ mit der üblichen Identifizierung von Funktionen, die sich nur auf Nullmengen unterscheiden[86] und der Norm $\|f\|_p = \left(\int\limits_0^1 |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$ für $1 \leqq p < \infty$. Für $k \in \mathbb{N}$ und $l = 1, 2, \ldots, 2^k$ seien

$$f_1(x) \equiv 1,$$

$$f_{2^k+l}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \dfrac{2l-2}{2^{k+1}} \leqq x \leqq \dfrac{2l-1}{2^{k+1}}, \\ -1 & \text{für} \quad \dfrac{2l-1}{2^{k+1}} < x \leqq \dfrac{2l}{2^{k+1}}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ erhält man eine Schauderbasis für $\mathscr{L}^p([0,1])$. Für $1 < p < \infty$ ist das sogar eine unbedingte Basis für $\mathscr{L}^p([0,1])$[87].

d) Das trigononetrische System $\{e^{2\pi i qx}\}_{q\in\mathbb{Z}}$ ist in $\mathscr{L}^p([0,2\pi])$ mit der $\| \ \|_p$-Norm für $p = 2$ eine unbedingte Schauder-Basis und für $1 < p < \infty$ eine Schauder-Basis; in $\mathscr{L}^1([0,2\pi])$ und $C[0,2\pi]$ ist das jedoch nicht der Fall, da es dort jeweils Fourier-Reihen gibt, die in der $\| \ \|_1$-Norm nicht konvergieren[88].

[84] Der Name ist angesichts der Schaubilder dieser Funktionen sehr passend.

[85] Das wurde erstmals von Karlin nachgewiesen [192]. Bessaga und Pelczynski verallgemeinerten diese Aussage, indem sie zeigten, daß kein separabler Banachraum, für den der James-Raum $\mathcal{J}$ (siehe Anmerkung 62 auf S. 97) ein Unterraum ist, eine unbedingte Basis besitzt [32]. Ausführliche Informationen über Schauder-Basen in $C(\Omega)$-Räumen findet man in [341].

[86] Siehe Abschnitt 2.2.3.2.

[87] Die Funktionenfamilie $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nennt man auch *Haar-System*, nach Alfred Haar, der solche Systeme als erster beschrieb [126], [127].

[88] Der Spezialfall $\mathscr{L}^2$ mit dieser Basis wird in Band 2 von Bedeutung sein.

Allgemein gilt für $1 < p < \infty$: Ist der Raum $\mathscr{L}^p$ separabel, dann besitzt er eine Schauder-Basis[89]. Die Räume ℓ^∞ und $\mathscr{L}^\infty$ sind wie bereits erwähnt Beispiele für nichtseparable Räume und damit auch für Räume, die keine Schauder-Basen besitzen.

Das Konzept der Schauder-Basen läßt sich unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel aus der Mengenlehre auf nichtseparable Banach-Räume verallgemeinern; man muß dann natürlich die abzählbaren Basen aufgeben [133][90]. Dazu müssen wir zunächst festlegen, wie man über Mengen von überabzählbarer Kardinalität summieren kann. Da es bei unendlichen Reihen gegebenenfalls auf die Reihenfolge der Summanden ankommt, liegt es nahe, als Indexmenge transfiniter Reihen transfinite Ordinalzahlen zu verwenden. Entsprechend benötigt man zur Einführung eines Konvergenzbegriffs eine geeignete Topologie auf Teilmengen der Klasse der Ordinalzahlen. Das leistet die folgende

2.71 Definition: X sei eine durch die Relation $<$ linear geordnete Menge und $\mathfrak{B}$ die Menge aller Teilmengen von X, welche entweder von der Form $\{\, x \in \mathrm{X} \mid a < x \,\}$ oder $\{\, x \in \mathrm{X} \mid x < b \,\}$ oder $\{\, x \in \mathrm{X} \mid a < x < b \,\}$ sind. Dann heißt die durch die Basis $\mathfrak{B}$ auf X erzeugte Topologie $\mathfrak{T}$ *Ordnungstopologie* auf X.

Die offenen Teilmengen von X in dieser Topologie sind die endlichen oder unendlichen Vereinigungen von Mengen aus $\mathfrak{B}$. Ist nun Γ eine beliebige transfinite Ordinalzahl, dann läßt sich das Intervall $[1, \Gamma\,]$ mit der Ordnungstopologie topologisieren. Nun sei $\mathcal{E}$ ein Banachraum und $\{x_\gamma\}_{\gamma < \Gamma}$ eine transfinite Folge in $\mathcal{E}$. Die transfinite Reihe $\sum\limits_{\gamma < \Gamma} x_\gamma$ heißt konvergent, wenn es eine stetige Funktion $f : [1, \Gamma\,] \longrightarrow \mathcal{E}$ und ein $x \in \mathcal{E}$ gibt mit

$$\begin{aligned} f(1) &= x_0, \\ f(\gamma + 1) &= f(\gamma) + x_\gamma \quad \text{für } \gamma < \Gamma, \\ f(\Gamma) &= x. \end{aligned}$$

Wir schreiben hierfür $\sum\limits_{\gamma < \Gamma} x_\gamma = x$. Eine transfinite Reihe $\sum\limits_{\gamma < \Gamma} x_\gamma$ ist insbesondere dann konvergent, wenn $\{x_\gamma\}_{\gamma < \Gamma}$ *summierbar* ist. Dabei heißt eine Familie $\{x_\gamma\}_{\gamma < \Gamma}$ summierbar zur Summe x, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Indexmenge $\mathrm{J}_\varepsilon \subset \Gamma$ gibt, sodaß $\Big\| x - \sum\limits_{j \in \mathrm{J}} x_j \Big\| < \varepsilon$ gilt für alle endlichen Indexmengen $\mathrm{J} \subset \Gamma$ mit $\mathrm{J}_\varepsilon \subset \mathrm{J}$. Eine äquivalente Definition, die ohne Kenntnis des Werts der Summe auskommt, ist die folgende: $\{x_\gamma\}_{\gamma < \Gamma}$ heißt summierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Indexmenge J_ε gibt, sodaß $\Big\| \sum\limits_{j \in \mathrm{J}} x_j \Big\| < \varepsilon$ gilt für alle endlichen Indexmengen $\mathrm{J} \subset \Gamma$, die zu J_ε disjunkt sind[91]. Für abzählbares Γ ist Summierbarkeit identisch mit unbedingter Konvergenz; ist Γ überabzählbar, liefert die Eigenschaft der

[89] Das wurde von Johnson, Rosenthal und Zippin bewiesen [177]. Die Aussage läßt sich allerdings nicht auf unbedingte Schauder-Basen ausdehnen.

[90] Das hat nichts mit *kontinuierlichen* Basen zu tun, von denen in Quantenmechanik-Büchern häufig – und fast genauso häufig unpräzise – die Rede ist. Wir kommen in Band 2 ausführlich darauf zurück.

[91] Dieses Kriterium wird aus naheliegenden Gründen *Cauchy-Kriterium* für Summierbarkeit genannt.

Summierbarkeit genau die gewünschte Verallgemeinerung des Begriffs der unendlichen Reihe. Die diskrete Darstellbarkeit als Summe bleibt dabei gewährleistet, denn es gilt

2.72 Lemma: *Ist $\{x_\gamma\}_{\gamma<\Gamma}$ summierbar zur Summe x, dann gibt es höchstens abzählbar viele $x_j \in \{x_\gamma\}_{\gamma<\Gamma}$ mit $x_j \neq 0$.*

Beweis: Aufgrund der Summierbarkeit gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Indexmenge J_n, sodaß $\left\| x - \sum_{j\in J} x_j \right\| < 1/2n$ gilt für alle endlichen Indexmengen J mit $J_n \subset J$. Dann ist $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar. Ist nun $\lambda < \Gamma$ mit $\lambda \notin A$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|x_\lambda\| = \left\| \sum_{j\in J_n\cup\{\lambda\}} x_j - \sum_{j\in J_n} x_j \right\| \leqq \left\| \sum_{j\in J_n\cup\{\lambda\}} x_j - x \right\| + \left\| x - \sum_{j\in J_n} x_j \right\|.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $J_n \cup \{\lambda\}$ eine endliche Indexmenge und umfaßt J_n, es folgt daher nach Voraussetzung

$$\|x_\lambda\| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $\|x_\lambda\| = 0$. Somit gilt $x_j \neq 0$ höchstens für die abzählbar vielen Elemente von A. □

Damit können wir nun die gewünschte transfinite Verallgemeinerung des Basis-Begriffs formulieren.

2.73 Definition: Eine transfinite Folge $\{e_\gamma\}_{\gamma<\Gamma}$ in einem normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathcal{E}$ heißt *lange Schauder-Basis* oder *transfinite Schauder-Basis* von $\mathcal{E}$, wenn es zu jedem $x \in \mathcal{E}$ eine eindeutig bestimmte transfinite Folge $\{\alpha_\gamma\}_{\gamma<\Gamma}$ in $\mathbb{K}$ gibt, sodaß $x = \sum_{\gamma<\Gamma} \alpha_\gamma\, e_\gamma$ gilt.

Natürlich ist jede lange Schauder-Basis linear unabhängig.

Als Beispiel betrachten wir den Raum $C[0,\Gamma]$ der stetigen Funktionen auf einer transfiniten Ordinalzahl Γ. Wählt man $e_\gamma = \chi_{[0,\gamma]}$ mit

$$\chi_{[0,\gamma]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,\gamma] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $\gamma < \Gamma$, dann ist $\{e_\gamma\}_{\gamma<\Gamma}$ eine lange Schauder-Basis in $C[0,\Gamma]$.

Mit Hilfe des Begriffs der langen Schauder-Basen lassen sich in natürlicher Weise Projektionen auf Unterräume von $\mathcal{E}$ konstruieren. Dazu sei $\{e_\gamma\}_{\gamma<\Gamma}$ eine lange Schauder-Basis des normierten Vektorraums $\mathcal{E}$. Die *kanonischen Projektionsoperatoren* $\mathcal{P}_\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ sind für $1 \leqq \lambda \leqq \Gamma$ definiert durch

$$\mathcal{P}_\lambda \sum_{\gamma<\Gamma} \alpha_\gamma\, e_\gamma := \sum_{\gamma<\lambda} \alpha_\gamma\, e_\gamma.$$

Die $\mathcal{P}_\lambda$ projizieren jeden Vektor in $\mathcal{E}$ jeweils auf den von den ersten λ Elementen der Basis $\{e_\gamma\}_{\gamma<\Gamma}$ aufgespannten Unterraum von $\mathcal{E}$. Wie für alle Projektoren gilt auch hier $\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathbf{1}$ für alle $\lambda \in \Gamma$. Außerdem sind die folgenden Eigenschaften offensichtlich:

(i) Für alle $\lambda < \Gamma$ ist $(\mathcal{P}_{\lambda+1} - \mathcal{P}_\lambda)\,\mathcal{E}$ ein eindimensionaler Unterraum von $\mathcal{E}$,

(ii) Für alle $\kappa, \lambda < \Gamma$ gilt $\mathcal{P}_\kappa\,\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{P}_\lambda\,\mathcal{P}_\kappa = \mathcal{P}_{\min\{\kappa,\lambda\}}$,

(iii) Ist $\lambda < \Gamma$ eine Limesordinalzahl, dann gilt $\lim\limits_{\kappa\to\lambda} \mathcal{P}_\kappa = \mathcal{P}_\lambda$,

(iv) $\lim\limits_{\lambda\to\Gamma} \mathcal{P}_\lambda\,\mathcal{E} = \mathcal{E}$.

Umgekehrt kann man in einem normierten Vektorraum $\mathcal{E}$, zu dem eine Familie $\{\mathcal{P}_\lambda\}_{\lambda<\Gamma}$ beschränkter linearer Projektionsoperatoren mit den Eigenschaften (i) - (iv) existiert, stets eine lange Schauder-Basis konstruieren. Dazu sei $\mathcal{P}_0 = 0$; nun wählen wir für alle $\gamma < \Gamma$ ein $e_\gamma \in \mathcal{P}_{\gamma+1}\,\mathcal{E} \cap \operatorname{ran}(\mathcal{P}_\gamma)$ und erhalten mit $\{e_\gamma\}_{\gamma<\Gamma}$ eine lange Schauder-Basis für $\mathcal{E}$. Denn für jedes $x \in \mathcal{E}$ gilt

$$x = \lim_{\gamma\to\Gamma} \mathcal{P}_\gamma\,x = \lim_{\gamma\to\Gamma} (\,\mathcal{P}_\gamma\,x - \mathcal{P}_0\,x\,) = \lim_{\gamma\to\Gamma} \sum_{\kappa<\gamma} (\,\mathcal{P}_{\kappa+1}\,x - \mathcal{P}_\kappa\,x\,) = \sum_{\kappa<\Gamma} (\,\mathcal{P}_{\kappa+1} - \mathcal{P}_\kappa\,)\,x,$$

damit und aufgrund von (i) gibt es Skalare α_γ, $\gamma < \Gamma$, sodaß $(\,\mathcal{P}_{\kappa+1} - \mathcal{P}_\kappa\,)\,x = \alpha_\gamma\,e_\gamma$ und damit $x = \sum\limits_{\gamma<\Gamma} \alpha_\gamma\,e_\gamma$. Die α_γ sind außerdem für jedes x eindeutig bestimmt, denn aus $x = \sum\limits_{\gamma<\Gamma} \beta_\gamma\,e_\gamma$ folgt aufgrund der Stetigkeit der $\mathcal{P}_\lambda$

$$\mathcal{P}_\gamma\,x = \sum_{\kappa<\gamma} \beta_\kappa\,e_\kappa,$$

also

$$\beta_\gamma\,e_\gamma = (\,\mathcal{P}_{\gamma+1} - \mathcal{P}_\gamma\,)\,x = \alpha_\gamma\,e_\gamma.$$

Ist $\{e_\gamma\}_{\gamma<\Gamma}$ eine lange Schauder-Basis des Banachraums $\mathcal{E}$ und $x = \sum\limits_{\gamma<\Gamma} \alpha_\gamma\,e_\gamma$ für $x \in \mathcal{E}$, dann heißen die Funktionale $\{f_\gamma\}_{\gamma<\Gamma}$ mit $f_\gamma(x) = \alpha_\gamma$ für $1 \leqq \gamma < \Gamma$ *Koordinatenfunktionale* von $\{e_\gamma\}_{\gamma<\Gamma}$; mit ihnen gilt $x = \sum\limits_{\gamma<\Gamma} f_\gamma(x)\,e_\gamma$ für alle $x \in \mathcal{E}$. Es ist $\{f_\gamma\}_{\gamma<\Gamma} \subset \mathcal{E}'$, denn aus

$$\|\,\mathcal{P}_{\lambda+1}\,x - \mathcal{P}_\lambda\,x\,\| = \|\,f_\lambda(x)\,e_\lambda\,\| = |f_\lambda(x)|\,\|e_\lambda\|$$

folgt

$$\|f_\lambda\| = \sup_{\|x\|\leqq 1} |f_\lambda(x)| = \frac{\sup\limits_{\|x\|\leqq 1} \|\,f_\lambda(x)\,e_\lambda\,\|}{\|e_\lambda\|} = \frac{\sup\limits_{\|x\|\leqq 1} \|\,\mathcal{P}_{\lambda+1}\,x - \mathcal{P}_\lambda\,x\,\|}{\|e_\lambda\|}$$
$$\leqq \frac{\sup\limits_{\|x\|\leqq 1} \|\mathcal{P}_{\lambda+1}\,x\| + \sup\limits_{\|x\|\leqq 1} \|\mathcal{P}_\lambda\,x\|}{\|e_\lambda\|} \leqq \frac{2\,\sup\limits_{\gamma<\Gamma} \|\mathcal{P}_\gamma\|}{\|e_\lambda\|}$$

für alle $\lambda < \Gamma$.

Wir kommen nun zu den für die Quantenmechanik bei weitem wichtigsten Begriffen dieses Abschnitts. Dazu betrachten wir zu beliebigen Banachräumen deren topologische Dualräume und topologisieren letztere mit der Topologie der punktweisen Konvergenz von Funktionalfolgen aus dem Dualraum auf den Elementen des zugehörigen Banachraums. Man nennt diese Topologie *w^*-Topologie* oder auch *schwach*-Topolgie*. In dieser Topologie erhält man für jedes $f \in \mathcal{E}'$ mit den Mengen

$$\mathrm{U}_{f,\varepsilon}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \{\, g \in \mathcal{E}' \mid |\, f(x_j) - g(x_j)\,| < \varepsilon \,\}$$

für $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ eine Umgebungsbasis von f; sie ist gleichzeitig die schwache Topologie[92] auf $\mathcal{E}'$, also die schwächste Topologie, in der für jedes $x \in \mathcal{E}$ das durch $\varphi_x(f) = f(x)$ für alle $f \in \mathcal{E}'$ definierte Funktional[93] zum Bidualraum $\mathcal{E}''$ gehört, und sie macht Dualräume zu lokalkonvexen Räumen. Außerdem liegt die kanonische Einbettung eines Banachraums $\mathcal{E}$ in $\mathcal{E}''$ in der schwach*-Topologie stets dicht in $\mathcal{E}$. Grenzwerte in Dualräumen sind im folgenden generell jeweils als Grenzwerte in dieser Topologie zu verstehen[94].

2.74 Definition: Es seien $\mathcal{E}$ ein Banachraum und J eine nichtleere Menge.

(i) Eine Familie $\{(x_j, x_j^*)\}_{j \in \mathrm{J}}$ von Tupeln aus $\mathcal{E} \times \mathcal{E}'$ heißt *biorthogonales System* in $\mathcal{E} \times \mathcal{E}'$, wenn $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$ gilt für alle $i, j, \in \mathrm{J}$.

(ii) Ein biorthogonales System $\{(x_j, x_j^*)\}_{j \in \mathrm{J}}$ in $\mathcal{E} \times \mathcal{E}'$ heißt *Markushevich-Basis* von $\mathcal{E}$, wenn $\overline{\mathrm{span}\,\{x_j\}_{j \in \mathrm{J}}} = \mathcal{E}$ und $\overline{\mathrm{span}\,\{x_j^*\}_{j \in \mathrm{J}}} = \mathcal{E}'$ gilt[95].

(iii) Ein biorthogonales System $\{x_j, x_j^*\}_{j \in \mathrm{J}}$ in $\mathcal{E} \times \mathcal{E}'$ heißt *starke Markushevich-Basis* von $\mathcal{E}$, wenn $x \in \overline{\mathrm{span}\,\{x_j^*(x)\, x_j\}_{j \in \mathrm{J}}}$ gilt für alle $x \in \mathcal{E}$.

Die Rechtfertigung der Bezeichung „bi*orthogonal*“ für solche Systeme muß auf den nächsten Abschnitt verschoben werden; auch wenn wir gleich einen Orthogonalitätsbegriff für normierte Räume einführen werden, ist ein Zusammenhang in diesem Kontext noch nicht erkennbar.

Die zentrale Frage, die sich hier sofort stellt, ist diejenige nach der allgemeinen Existenz solcher Systeme in (möglichst) beliebigen Banachräumen. Wie üblich ist die Separibilität hier eine Eigenschaft, die alles sehr vereinfacht. Bereits bei der Einführung des Begriffs bewies ihr Entdecker, daß jeder separable Banachraum eine Markushevich-Basis besitzt [243]. Aus der Definition folgt außerdem unmittelbar, daß jede Schauder-Basis zusammen mit ihrer dualen Basis eine starke Markushevich-Basis bildet. Darüberhinaus läßt sich einerseits zeigen, daß zu

[92] Siehe Abschnitt 2.2.3.7

[93] Solche Funktionale werden von Abschnitt 2.3 an von zentraler Bedeutung sein.

[94] Die schwach*-Topologie erlangt zusätzlich besondere Bedeutung durch den *Satz von Banach-Alaoglu* [3]: Ist $\mathcal{E}$ ein normierter Raum, dann ist die Einheitskugel im Dualraum $\mathcal{E}'$ kompakt bezüglich der schwach*-Topologie. Das gilt auch für nichtseparable normierte Räume. Der Satz von Banach-Alaoglu ist äquivalent zum *Ultrafilter-Theorem*, wonach jeder Filter auf einer beliebigen Menge in einem Ultrafilter auf dieser Menge enthalten ist, und zum Theorem der Boolschen Primideale. Er folgt aus dem Satz von Tychonoff und ist damit ein weiteres Beispiel für ein bedeutendes Resultat, das vom Auswahlaxiom abhängig ist. Die Umkehrung gilt nicht; der Satz von Banach-Alaoglu, das Ultrafilter-Theorem und das Theorem der Boolschen Primideale sind *nicht äquivalent* zum Auswahlaxiom [137]. Vergleiche auch Anmerkung 55 auf S. 90.

[95] Der Begriff wurde eingeführt von und benannt nach Aleksei Ivanovich Markushevich [243], [244].

jedem separablen Banachraum eine Markushevich-Basis angegeben werden kann, die nicht stark ist [133][96]. Andererseits gibt es in jedem separablen Banachraum auch stets eine starke Markushevich-Basis [367]. Natürlich gibt es nicht für jeden nichtseparablen Banachraum eine starke Markushevich-Basis, man kann jedoch ein eindeutiges Kriterium angeben, wann genau das der Fall ist [355].

2.75 Satz: *Ein Banachraum $\mathcal{E}$ enthält genau dann eine starke Markushevich-Basis, wenn es eine Menge $\mathfrak{J}$ von Ordinalzahlen und eine Familie $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathfrak{J}}$ stetiger Projektoren von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:*

(i) $\mathcal{P}_i\,\mathcal{P}_j \equiv 0$ *für alle* $i, j \in \mathfrak{J}$ *mit* $i \neq j$,

(ii) für alle $x \in \mathcal{E}$ *gilt* $x \in \overline{\operatorname{span}\{\mathcal{P}_i\,x\}_{i\in\mathfrak{J}}}$,

(iii) für jedes $i \in \mathfrak{J}$ *gibt es eine starke Markushevich-Basis in* $\mathcal{P}_i\,\mathcal{E}$.

Beweis: „$\Longrightarrow$“: $\{x_j, x_j^*\}_{j\in\mathrm{J}}$ sei eine starke Markushevich-Basis in $\mathcal{E}$. Nach dem Wohlordnungssatz läßt sich J wie jede Menge wohlordnen; die zugehörige Ordinalzahl sei Γ. Nun sei für jedes $\gamma < \Gamma$ eine lineare Abbildung $\mathcal{P}_\gamma : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ definiert durch $\mathcal{P}_\gamma\,x = x_\gamma^*(x)\,x_\gamma$ für alle $x \in \mathcal{E}$. Damit gilt für alle $x \in \operatorname{span}\{\mathcal{P}_\gamma\,x\}_{\gamma<\Gamma}$ mit $x = \sum_{\gamma<\Gamma} \alpha_\gamma\,x_\gamma$

$$\mathcal{P}_\rho\,\mathcal{P}_\sigma\,x = \mathcal{P}_\rho\,x_\sigma^*(x)\,x_\sigma = \mathcal{P}_\rho\,x_\sigma^*\left(\sum_{\gamma<\Gamma}\alpha_\gamma\,x_\gamma\right)x_\sigma = \mathcal{P}_\rho\,\alpha_\sigma\,x_\sigma = \alpha_\sigma\,x_\rho^*(x_\sigma) = \alpha_\sigma\,\delta_{\rho\sigma},$$

also $\mathcal{P}_\rho\,\mathcal{P}_\sigma\,x = 0$ für $\rho \neq \sigma$. Aufgrund der Stetigkeit der $\mathcal{P}_\gamma$ gilt das dann auch für alle $x \in \overline{\operatorname{span}\{\mathcal{P}_\gamma\,x\}_{\gamma<\Gamma}} = \overline{\operatorname{span}\{x_\gamma^*(x)\,x_\gamma\}_{\gamma<\Gamma}} = \mathcal{E}$, womit (i) nachgewiesen ist. (ii) und (iii) gelten trivialerweise.
„$\Longleftarrow$“: Für jedes $i \in \mathfrak{J}$ sei $\{x_{ij}, x_{ij}^*\}_{j\in\mathrm{J}_i}$ eine starke Markushevich-Basis von $\mathcal{P}_i\,\mathcal{E}$, außerdem seien für alle $\gamma \in \mathfrak{J}$ und alle $j \in \mathrm{J}_i$ die Funktionale $\varphi_{ij} \in \mathcal{E}'$ definiert durch $\varphi_{ij}(x) = x_{ij}^*(\mathcal{P}_i\,x)$. Wir betrachten die Familie $\{x_{ij}, \varphi_{ij}\}_{i\in\mathfrak{J}, j\in\mathrm{J}_i}$. Eigenschaft (i) liefert

$$\varphi_{ij}(x_{kl}) = x_{ij}^*(\mathcal{P}_i\,x_{kl}) = \delta_{ik}\,\delta_{jl},$$

folglich ist $\{x_{ij}, \varphi_{ij}\}_{i\in\mathfrak{J}, j\in\mathrm{J}_i}$ ein biorthogonales System. Außerdem ist für jedes $x \in \mathcal{E}$ und alle $i \in \mathfrak{J}$ einerseits $\mathcal{P}_i\,x \in \overline{\operatorname{span}\{x_{ij}^*(\mathcal{P}_i\,x_{ij}\}_{j\in\mathfrak{J}_i}}$ und andererseits aufgrund von Eigenschaft (ii) $x \in \overline{\operatorname{span}\{\mathcal{P}_i\,x\}_{i\in\mathfrak{J}}}$, zusammengenommen also $x \in \overline{\operatorname{span}\{\varphi_{ij}(x)\,x_{ij}\}_{i\in\mathfrak{J}, j\in\mathrm{J}_i}}$. Damit ist $\{x_{ij}, \varphi_{ij}\}_{i\in\mathfrak{J}, j\in\mathrm{J}_i}$ eine starke Markushevich-Basis. □

Es existiert noch ein weiterer Basis-Begriff, der angesichts des in diesem Buch hauptsächlich betrachteten Gegenstands kurz Erwähnung finden sollte. Mathematisch gesehen ist die Norm der Elemente einer Basis, abgesehen von Fragen der Bequemlichkeit, eigentlich irrelevant. Aus der Perspektive der Quantenmechanik erweist sich jedoch der Versuch als sinnvoll,

[96] Dieses Resultat stammt von Johnson.

für diese stets den Wert 1 zu wählen, das heißt, sie zu *normieren*. Dem trägt der nächste Begriff Rechnung.

2.76 Definition: $\mathcal{E}$ sei ein Banachraum, $\mathcal{E}'$ dessen topologischer Dualraum.

(i) Ein biorthogonales System $\{b_\gamma; b_\gamma^*\}_{\gamma<\Gamma}$ in $\mathcal{E}\times\mathcal{E}'$ heißt *Auerbach-System*[97] in $\mathcal{E}$, wenn $\|b_\gamma\| = \|b_\gamma^*\| = 1$ gilt für alle $\gamma < \Gamma$.

(ii) Eine Markushevich-Basis $\{e_\gamma; e_\gamma^*\}_{\gamma<\Gamma}$ in $\mathcal{E}\times\mathcal{E}'$ mit $\|e_\gamma\| = \|e_\gamma^*\| = 1$ für alle $\gamma < \Gamma$ heißt *Auerbach-Basis* von $\mathcal{E}$.

Bereits die Tatsache, daß jeder endlichdimensionale Banachraum eine Auerbach-Basis besitzt, ist ein nichttriviales Resultat der linearen Algebra[98]. Bei unendlichdimensionalen Banachräumen kann man erst einmal nur noch die folgende, sehr viel schwächere Aussage zeigen[99].

2.77 Satz: *Ist $\mathcal{E}$ ein unendlichdimensionaler Banachraum, dann gibt es ein abzählbares Auerbach-System $\{b_\gamma; b_\gamma^*\}_{\gamma<\Gamma}$ in $\mathcal{E}\times\mathcal{E}'$, sodaß $\{b_\gamma\}_{\gamma<\Gamma}$ eine Basisfolge in $\mathcal{E}$ ist.*

Beweis: Wir konstruieren die gewünschte Auerbach-Basis induktiv. Dazu sei $b_1 \in \mathcal{E}$ mit $\|b_1\| = 1$ fest gewählt; nach Satz 2.54 beziehungsweise Satz 2.55 gibt es dann ein $b_1^* \in \mathcal{E}'$ mit $\|b_1^*\| = 1$ und $b_1^*(b_1) = 1$. Mit $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathcal{E}$ und $b_1^*, b_2^*, \ldots, b_n^* \in \mathcal{E}'$ seien nun bereits jeweils n Vektoren und Funktionale gefunden, sodaß $\|b_j\| = \|b_j^*\| = 1$ und $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ gilt für $i, j = 1, 2, \ldots, n$ und $\{b_j\}_{1\leqq j\leqq n}$ eine Basisfolge in $\mathcal{E}$ ist. Weiter sei $\mathcal{F}_n = \operatorname{span}\{b_j\}_{1\leqq j\leqq m}$, außerdem $\mathrm{S}_{\mathcal{E}}$ die Einheitssphäre in $\mathcal{E}$ und $\mathrm{S}_n := \mathrm{S}_{\mathcal{E}} \cap \mathcal{F}_n$; dann gilt $\mathrm{S}_n \subset (b_i^*)^{-1}([-1,1]) \cap \mathcal{F}_n$ für $1 \leqq i \leqq n$. Wir wählen jetzt Funktionale $a_1^*, a_2^*, \ldots, a_m^* \in \mathcal{F}_n'$ mit $\|a_j^*\| = 1$ für $j = 1, 2, \ldots, m$, sodaß das Polytop

$$\mathrm{P}_n := \bigcap_{i=1}^{n} (b_i^*)^{-1}([-1,1]) \cap \bigcap_{j=1}^{m} (a_j^*)^{-1}([-1,1]) \cap \mathcal{F}_n$$

ganz in der Kugel $\mathrm{K}_{1+1/n}(0) \subset \mathcal{E}$ enthalten ist. Zusätzlich wählen wir Erweiterungen $c_1^*, c_2^*, \ldots, c_m^*$ dieser Funktionale auf ganz $\mathcal{E}'$, ebenfalls mit $\|c_j^*\| = 1$ für $1 \leqq j \leqq m$, und definieren den Durchschnitt

$$\Lambda_n := \bigcap_{i=1}^{n} a_i^*(0) \cap \bigcap_{j=1}^{m} c_j^*(0).$$

Dort sei A_n ein beliebiger $(n+1)$-dimensionaler Unterraum und $\mathrm{Q}_n := \mathrm{S}_{\mathcal{E}} \cap \mathrm{A}_n$. Wir definieren eine Abbildung $\varphi : \mathrm{Q}_n \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathcal{F}')$ durch

$$\varphi(x) := \big\{\, y \in \mathcal{F}_n \;\big|\; \|\, x + y \,\| = \inf\{\, \|\, x + z \,\| \mid z \in \mathcal{F}_n \,\}\big\}.$$

[97] Benannt nach Herman Auerbach, der diese Begriffe in seiner leider verlorengegangenen, in Banachs Buch [21] erwähnten Dissertation von 1929 als erster beschrieb und bei dieser Gelegenheit bewies, daß jeder endlichdimensionale Vektorraum eine solche Basis besitzt.

[98] Das wird gelegentlich als *Auerbachs Lemma* bezeichnet. Ein Beweis hierfür steht in [133]. Falls die Norm des Banachraums von einem Skalarprodukt kommt, wird die Aussage von Auerbachs Lemma nicht nur nahezu trivial, sondern sie gilt dann auch für unendlichdimensionale Räume. Darauf kommen wir sehr ausführlich zurück.

[99] Dieses Resultat wurde von Day gefunden [64]. Vergleiche auch [65] und [97].

Hierfür gilt:

1. Die Bilder von φ sind konvexe kompakte Teilmengen von $\mathcal{F}_n$,
2. $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ für alle $x \in \mathrm{Q}_n$,
3. $\Gamma(\varphi)$ ist abgeschlossen,
4. $\|y\| \leqq 1 + 1/n$ für $y \in \varphi(x)$ und $x \in \mathrm{Q}_n$.

Nun sei $(\Sigma_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von Q_n in sphärische Dreiecke, sodaß die Kantenlängen dieser Dreiecke $\longrightarrow 0$ gehen für $m \longrightarrow \infty$. Sind $x_{m,1}, x_{m,2}, \ldots, x_{m,k}$ die Ecken der Dreiecke von Σ_m, dann sei die Abbildung $f_m : \mathrm{Q}_m \longrightarrow \bigcup_{x \in \mathscr{K}_m} \varphi(x)$ folgendermaßen definiert: Wähle $f_m(x_{m,j}) \in \varphi(x_{m,j})$ und $f_m(-x_{n,j}) = -f(x_{m,j})$, und setze f_m anschließend stetig auf den Kanten der Σ_m fort. f_m ist stetig, und es gilt

$$f_m(-x) = -f_m(x)$$

für alle $x \in \mathrm{Q}_m$. Nach dem Satz von Borsuk-Ulam[100] gibt es dann ein $p_m \in \mathrm{Q}_m$ mit

$$f_m(-p_m) = f_m(p_m),$$

und es folgt unmittelbar $f_m(p_m) = 0$. Ist Σ_j ein Simplex, das p_m enthält, mit Ecken $y_{j,1}, y_{j,2}, \ldots, y_{j,n}$, dann gibt es $\lambda_{j,1}, \lambda_{j,2}, \ldots, \lambda_{j,n}$ mit $\lambda_{j,i} \geqq 0$ sowie $\sum_{i=1}^{n} \lambda_{j,i} \geqq 1$ und $\lim_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{j,i} = 1$, sodaß $p_m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{j,i}\, y_{j,i}$. Wir wählen eine unbeschränkte Folge $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, sodaß für $i = 1, 2, \ldots, n$ die drei Grenzwerte

$$y_i = \lim_{j \to \infty} y_{n_j,i}, \quad z_i = \lim_{j \to \infty} f_{n_j}(y_{n_j,i}), \quad \lambda_i = \lim_{j \to \infty} \lambda_{n_j,i}$$

existieren. Dann ist $p = \lim_{j \to \infty} p_{n_j} = y_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, und es folgt $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Daher gilt

$$f_{n_j}(p_{n_j}) = f_{n_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{n_j,i}\, y_{n_j,i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{n_j,i}\, f_{n_j}(y_{n_j,i}) = 0$$

und folglich auch

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{n_j,i}\, z_i = \lim_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{n_j,i}\, f_{n_j}(y_{n_j,i}) = 0.$$

Weil $\Gamma(\varphi)$ abgeschlossen ist, gilt $z_i \in \varphi(p)$, und weil $\varphi(p)$ konvex ist, folgt daraus $0 \in \varphi(p)$. Wir setzen nun $b_{n+1} = p$ und wählen dazu $b^*_{n+1} \in \mathcal{E}'$, sodaß $\|b^*_{n+1}\| = 1$ sowie $b^*_{n+1}(b_j) = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, n$ und $b^*_{n+1}(b_n + 1) = 1$ gilt. Das beschriebene Verfahren wiederholen wir

[100] Der *Satz von Boruk-Ulam* besagt folgendes: *Für jede stetige Abbildung f von der n-dimensionalen Einheitssphäre auf den n-dimensionalen euklidischen Raum gibt es einen Punkt e mit $f(-e) = f(e)$.* Der Satz wurde von Ulam vermutet und von Borsuk bewiesen [44].

immer wieder und erhalten so induktiv Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|b_n\| = \|b_n^*\| = 1$ und $b_m^*(b_n) = \delta_{mn}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Die Menge $\mathcal{G} = \left\{ x \in \mathcal{E} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} b_j^*(x)\, b_j = x \right\}$ ist dicht in der Menge $\mathcal{F} = \operatorname{span}\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, folglich gilt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Schauder-Basis in $\mathcal{F}$. □

Scheinbar naheliegende stärkere Varianten von Satz 2.77 sind nicht zu bekommen. Beispielsweise haben Banachräume ohne Markushevich-Basen natürlich auch keine Auerbach-Basen, und selbst ob es überhaupt wenigstens zu jedem separablen Banachraum eine Auerbach-Basis gibt, ist bis jetzt eine offene Frage. Erst wenn man sich der im übernächsten Abschnitt betrachteten speziellen Klasse von Banach-Räumen zuwendet, löst sich dieses Problem geradezu von selbst.

Zuvor kommen wir erneut auf den Begriff der Dimension zurück. Da es für unendlichdimensionale Vektorräume zwei sich grundsätzlich unterscheidende Basisbegriffe gibt, folgen daraus auch zwei sich grundsätzlich unterscheidende Dimensionsbegriffe, einerseits die Mächtigkeit der Hamel-Basen, anderseits diejenige der Schauder-Basen des betrachteten Vektorraums (sofern solche existieren). Es sind mehrere Bezeichnungen hierfür im Umlauf; algebraische Dimension und topologische Dimension sind wohl die verbreitetsten, daneben ist auch von affiner Dimension und metrischer Dimension[101] oder direkt von Hamel-Dimension und Schauder-Dimension[102] die Rede. Erinnern wir uns daran, daß für eine Hamel-Basis B und eine Schauder-Basis S eines unendlichdimensionalen Banachraums einerseits

$$\operatorname{span} \mathrm{S} \subsetneq \mathcal{E}$$

und andererseits

$$\operatorname{span} \mathrm{B} = \overline{\operatorname{span} \mathrm{S}} = \mathcal{E}$$

gilt, dann sehen wir sofort, daß die algebraische Dimension größer als die topologische sein muß. In der Tat wird das durch Satz 2.68 nicht nur bestätigt, sondern sogar präzisiert; aus ihm folgt nämlich unmittelbar

Satz 2.78: *Ist $\mathcal{E}$ ein unendlichdimensionaler Banachraum mit algebraischer Dimension λ und topologischer Dimension σ, so gilt $\sigma^{\aleph_0} = \lambda = |\mathcal{E}|$.*

Zusätzlich folgt daraus, daß für unendlichdimensionale Banachräume eine Hamel-Basis niemals gleichzeitig auch eine Schauder-Basis sein kann[103].

---

[101] Diese Bezeichnungen stammen von Löwig [229].

[102] Zu finden beispielsweise bei Evans und Tapia [96].

[103] Evans und Tapia kommen in [96] zum Resultat, daß es Räume mit gleicher Hamel-Dimension, aber unterschiedlicher Schauder-Dimension gibt. Zum Beweis ist allerdings die verallgemeinerte Kontinuumshypothese erforderlich. Diese ist bekanntlich im Rahmen der üblichen Mengenlehre (Zermelo-Fraenkel oder Gödel-Bernays oder Morse-Kelly plus Auswahlaxiom) weder beweisbar noch widerlegbar; konsequenterweise erlaubt letztere die Koexistenz unterschiedlicher Varianten ihrer selbst, und bei Beweisen muß dann jeweils dazugesagt werden, was dabei axiomatisch vorausgesetzt wird. Es gibt jedoch inzwischen gute Gründe, im Rahmen von durch Axiome über große Kardinalzahlen erweiterten Axiomensystemen der Mengenlehre

2.2.3.9 $\mathscr{L}^p$-Räume

Angesichts der Bedeutung, welche den oben beschriebenen $\mathscr{L}^p$-Räumen für den weiteren Verlauf unseres Buchs zukommt, lohnt sich eine etwas ausführlichere Beschäftigung mit ihnen. Gleichzeitig liefert das eine Gelegenheit, exemplarisch normierte Vektorräume auf Vollständigkeit zu überprüfen und deren Dualräume zu konstruieren. Wir erinnern an die Definition der $\mathscr{L}^p$-Räume: $(\mathsf{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ sei ein Maßraum mit Maß $\mu : \mathfrak{S} \longrightarrow [0, \infty]$ und $\mathcal{E}$ ein beliebiger Banachraum[104], dann ist für $1 \leqq p \leqq \infty$

$$\mathcal{L}^p(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E}) = \{ f : \mathsf{M} \longrightarrow \mathcal{E} \mid \|f\|_p < \infty \}$$

und

$$\mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E}) = \mathcal{L}^p(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E}) \,/\, \{ f \in \mathcal{L}^p(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E}) \mid f = 0 \text{ fast überall} \}.$$

Die zugehörigen Normen, durch welche die $\mathscr{L}^p$-Räume zu Banachräumen werden, sind definiert durch

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathsf{M}} \|f\|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

für $1 \leqq p < \infty$ beziehungsweise durch

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} \{ \|f(x)\| \mid x \in \mathsf{M} \}.$$

Wie allgemein üblich verwenden wir in etwas schlampiger Weise jeweils dieselben Symbole für Elemente von $\mathcal{L}^p$ und Elemente von $\mathscr{L}^p$, also Repräsentantensysteme in $\mathcal{L}^p$ bezüglich der in Abschnitt 2.2.3.2 definierten Äquivalenzrelation $\sim$, da hierbei normalerweise keine Verwechslungsgefahr besteht. Das ist gleichbedeutend damit, Funktionen, die sich nur auf Nullmengen unterscheiden, miteinander zu identifizieren.

Bevor wir uns nun mit den $\mathscr{L}^p$-Räumen selbst beschäftigen, benötigen wir ein paar Hilfssätze in Gestalt dreier fundamentaler Ungleichungen, denen man auch andernorts in der Analysis begegnet. Die erste ist die

2.79 Youngsche Ungleichung:[105] *Sind $p, q \geqq 1$ mit $1/p + 1/q = 1$, dann gilt für alle $x, y > 0$*

$$x\,y \leqq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

die Ungültigkeit der verallgemeinerten Kontinuumshypothese zu vermuten. Dahinter steht die platonistische Auffassung, daß uns die Entdeckung weiterer Exemplare der richtigen Axiome über große Kardinalzahlen der wahren Mengenlehre näher bringt, in welcher natürlich auch Aussagen wie die verallgemeinerte Kontinuumshypothese notwendigerweise entweder wahr oder falsch sind. Die parallele Existenz unterschiedlicher „Mengenlehren", etwa mit und ohne Auswahlaxiom oder ähnliches, ist im Rahmen dieser Sichtweise lediglich eine Folge der Unvollständigkeit der derzeit bekannten Axiome. Das steht nicht im Widerspruch zu den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen, denn diese belegen lediglich die Unbeweisbarkeit der Widerspruchsfreiheit der Mathematik, ohne dieselbe selbst in irgendeiner Weise in Frage zu stellen.

[104] Später werden die Spezialfälle $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ und insbesondere $\mathcal{E} = \mathbb{C}$ im Mittelpunkt unseres Interesses stehen.

[105] Benannt nach und 1912 veröffentlicht von W. H. Young [396]. In der Literatur wird eine weitere Relation als Youngsche Ungleichung bezeichnet; sie ist Inhalt folgender Aussage: *Ist $f : [0, c] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine streng*

Beweis: Es gilt

$$x\,y = e^{\ln x}\,e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y} = e^{\frac{1}{p}\,\ln(x^p) + \frac{1}{q}\,\ln(y^q)}.$$

Da die e-Funktion streng monoton steigend und konvex ist, gilt außerdem aufgrund der Voraussetzung

$$e^{\frac{1}{p}\,\ln(x^p) + \frac{1}{q}\,\ln(y^q)} \leqq \frac{1}{p}\,e^{\ln(x^p)} + \frac{1}{q}\,e^{\ln(y^q)} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. □

Obige Ungleichung kommt nun zum Beweis der nächsten sogleich zum Einsatz.

2.80 Höldersche Ungleichung:[106] *Es seien* $1 \leqq p, q \leqq \infty$ *mit* $1/p + 1/q = 1$*, außerdem sei* $(\mathsf{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ *ein Maßraum und* $f \in \mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ *und* $g \in \mathscr{L}^q(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$*. Dann ist* $f\,g \in \mathscr{L}^1(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$*, und es gilt*

$$\|f\,g\|_1 \leqq \|f\|_p\,\|g\|_q.$$

Beweis: 1. Fall: $1 < p, q < \infty$. Es gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\|f\|_p \neq 0$ und $\|g\|_q \neq 0$. Mit Ungleichung 2.79 erhalten wir zunächst für fast alle $x \in \mathsf{M}$

$$\frac{\|f(x)\|}{\|f\|_p}\,\frac{\|g(x)\|}{\|g\|_q} \leqq \frac{1}{p}\left[\frac{\|f(x)\|}{\|f\|_p}\right]^p + \frac{1}{q}\left[\frac{\|g(x)\|}{\|g\|_q}\right]^q$$

und durch beidseitiges Integrieren weiter

$$\int\limits_{\mathsf{M}} \frac{\|f\|}{\|f\|_p}\,\frac{\|g\|}{\|g\|_q}\,d\mu \leqq \frac{1}{p}\int\limits_{\mathsf{M}}\left[\frac{\|f\|}{\|f\|_p}\right]^p d\mu + \frac{1}{q}\int\limits_{\mathsf{M}}\left[\frac{\|g\|}{\|g\|_q}\right]^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Multiplikation mit $\|f\|_p\,\|g\|_q$ auf beiden Seiten liefert

$$\int\limits_{\mathsf{M}} \|f\,g\|\,d\mu \leqq \|f\|_p\,\|g\|_q,$$

monoton steigende Funktion mit $f(0) = 0$*, dann gilt für alle* $0 < a \leqq c$ *und* $0 < b \leqq f(c)$

$$a\,b \leqq \int\limits_0^a f(x)\,dx + \int\limits_0^b f^{-1}(x)\,dx,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $f(a) = b$*.* Young stellte dieses Resultat in derselben Ausgabe der Comptes Rendus vor [397]. Die zweite Ungleichung ist unmittelbar anschaulich klar, wenn man ihre linke und rechte Seite jeweils als Flächeninhalt interpretiert und das Ganze zusammen mit dem Graphen von f in einem Koordinatensystem betrachtet. Die erste Ungleichung folgt unmittelbar aus der zweiten, wenn man letztere auf die Funktion $f(x) = x^{p-1}$ anwendet.

[106] Sie erhielt ihren Namen zu Ehren von Otto Hölder, der sie 1884 entdeckte. Eine erste Veröffentlichung mit Beweis findet man bei Rogers [317], bei Hölder selbst taucht sie, allerdings nur in asymmetrischer Form, erstmals in [162] auf, wo er auch auf Rogers verweist. Vergleiche hierzu [241]. Im Kontext der hier betrachteten $\mathscr{L}^p$-Räume kommen diese und die gleich anschließend diskutierte Minkowski-Ungleichung erstmals bei Friedrich Riesz zur Sprache [308]. Veralgemeinerungen der Hölderschen Ungleichung, sowohl im Hinblick auf die Abschätzung als auch in Gestalt einer Ausdehnung auf $p, q < 1$ einschließlich negativer Werte findet man in [5], [6] und [55].

also die behauptete Ungleichung.

2.Fall: $p = 1, q = \infty$ (analog: $p = \infty, q = 1$). Da f und g meßbar sind, ist auch fg meßbar. Damit gilt für alle Nullmengen $\mathrm{N} \subset \mathrm{M}$

$$\int_{\mathrm{M}} \|fg\|\, d\mu = \int_{\mathrm{M}} \|f\|\,\|g\|\, d\mu = \int_{\mathrm{M}\setminus\mathrm{N}} \|f\|\,\|g\|\, d\mu$$
$$\leqq \int_{\mathrm{M}\setminus\mathrm{N}} \|f\|\, d\mu \sup_{x\in\mathrm{M}\setminus\mathrm{N}} \|g\| = \int_{\mathrm{M}} \|f\|\, d\mu\, \|g\|_\infty,$$

also die behauptete Ungleichung

In beiden Fällen folgt daraus $\|fg\|_1 < \infty$ und damit $fg \in \mathscr{L}^1(\mathrm{M}, \mu)$. □

Die dritte der erwähnten Ungleichungen ist die Dreiecksungleichung für die $\|\ \|_p$- Normen in $\mathscr{L}^p$-Räumen, bekannt unter dem Namen

2.81 Minkowski-Ungleichung:[107] *Es seien* $1 \leqq p \leqq \infty$, *außerdem sei* $(\mathrm{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ *ein Maßraum und* $f, g \in \mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu, \mathcal{E})$. *Dann gilt*

$$\|\, f + g \,\|_p \leqq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Beweis: 1. Fall: $p = 1$. Für alle $x \in \mathrm{M}$ folgt aus der gewöhnlichen Dreiecksungleichung

$$\|\, f(x) + g(x) \,\| \leqq \|f(x)\| + \|g(x)\|$$

durch beidseitige Integration

$$\int_{\mathrm{M}} \|\, f(x) + g(x) \,\|\, d\mu \leqq \int_{\mathrm{M}} \|f(x)\|\, d\mu + \int_{\mathrm{M}} \|g(x)\|\, d\mu,$$

also die behauptete Ungleichung.

2. Fall: $1 < p < \infty$: Wieder seien o.B.d.A. $\|f\|_p \neq 0$ und $\|g\|_q \neq 0$. Aufgrund der gewöhnlichen Dreiecksungleichung gilt zunächst für alle $x \in \mathrm{M}$

$$\|\, f(x) + g(x) \,\|^p = \|\, f(x) + g(x) \,\|\, \|\, f(x) + g(x) \,\|^{p-1}$$

[107] Ihr Entdecker und Namensgeber ist der Universalmathematiker Hermann Minkowski [256]. Auch hier ist unter demselben Namen eine zweite Ungleichung zu finden [139]: (M_1, μ_1) *und* (M_2, μ_2) *seien zwei Maßräume,* $f : \mathrm{M}_1 \times \mathrm{M}_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ *eine meßbare Funktion und* $0 \leqq p < \infty$. *Dann gilt*

$$\left\{ \int_{\mathrm{M}_2} \left[\int_{\mathrm{M}_1} |f(x_1, x_2)|\, d\mu_1 \right]^p d\mu_2 \right\}^{1/p} \leqq \int_{\mathrm{M}_1} \left[\int_{\mathrm{M}_2} |f(x_1, x_2)|^p\, d\mu_2 \right]^{1/p} d\mu_1.$$

Mit $\mathrm{M}_1 = \{0, 1\}$, μ_1 als Zählmaß sowie $f_1(x) = F(1, x)$ und $f_2(x) = F(2, x)$ für $x \in \mathrm{M}_2$ geht diese Ungleichung in die gewöhnliche Minkowski-Ungleichung über. Der Name „Dreiecksungleichung“ kommt natürlich von der unmittelbar anbschaulichen geometrischen Interpretation, wonach in jedem ebenen Dreieck die Summe zweier Seitenlängen stets größer als die dritte ist.

$$\begin{aligned}&\leqq (\|f(x)\| + \|g(x)\|)\,\|\,f(x)+g(x)\,\|^{p-1}\\&\quad = \|f(x)\|\,\|\,f(x)+g(x)\,\|^{p-1} + \|g(x)\|\,\|\,f(x)+g(x)\,\|^{p-1}.\end{aligned}$$

Nun sei $q = p/(p-1)$, dann gilt $1/p + 1/q = 1$. Damit ist

$$\|\,\|\,f+g\,\|^{p-1}\|_q^q = \int_{\mathrm{M}} \|\,f+g\,\|^p\,d\mu < \infty,$$

also $\|\,f+g\,\|^{p-1} \in \mathscr{L}^q(\mathrm{M},\mu,\mathcal{E})$. Nach Ungleichung 2.80 folgt

$$\begin{aligned}\|\,f+g\,\|_p^p &= \int_{\mathrm{M}} \|\,f+g\,\|^p\,d\mu \leqq \int_{\mathrm{M}} \|f\|\,\|\,f+g\,\|^{p-1}\,d\mu + \int_{\mathrm{M}} \|g\|\,\|\,f+g\,\|^{p-1}\,d\mu\\&\leqq \|f\|_p\,\|\,\|\,f+g\,\|^{p-1}\|_q + \|g\|_p\,\|\,\|\,f+g\,\|^{p-1}\|_q\\&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\,\|\,\|\,f+g\,\|^{p-1}\|_q\\&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\left[\int_{\mathrm{M}} \|\,f+g\,\|^{q(p-1)}\,d\mu\right]^{1/q}\\&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\left[\int_{\mathrm{M}} \|\,f+g\,\|^{p}\,d\mu\right]^{(p-1)/p} = (\|f\|_p + \|g\|_p)\,\|\,f+g\,\|_p^{p-1},\end{aligned}$$

und beidseitiges Dividieren durch $\|\,f+g\,\|_p^{p-1}$ liefert die behauptete Ungleichung[108].

3. Fall: $p = \infty$: Hier gilt wieder mit der gewöhnlichen Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}\|\,f+g\,\|_\infty &= \operatorname{ess\,sup}\{\,\|\,f(x)+g(x)\,\| \mid x \in \mathrm{M}\,\}\\&\leqq \operatorname{ess\,sup}\{\,\|f(x)\| + \|g(x)\| \mid x \in \mathrm{M}\,\}\\&= \operatorname{ess\,sup}\{\,\|f(x)\| \mid x \in \mathrm{M}\,\} + \operatorname{ess\,sup}\{\,\|g(x)\| \mid x \in \mathrm{M}\,\}\\&= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,\end{aligned}$$

also die behauptete Ungleichung. □

Für $0 < p < 1$ sind die Höldersche Ungleichung und die Minkowski-Ungleichung falsch. Hier gilt einerseits für $1 < r, s < \infty$ mit $1/r + 1/s = 1$ für $f \geqq 0$ und $g \geqq 0$ nach Ungleichung 2.80

$$\begin{aligned}\left\|\|f\|^{1/r}\right\|_1 = \left\|\|fg\|^{1/r}\,\|g\|^{-1/r}\right\|_1 &\leqq \left\|\|fg\|^{1/r}\right\|_r \left\|\|g\|^{-1/r}\right\|_s\\&= \|fg\|_1^{1/r}\left\|\|g\|^{-1/(r-1)}\right\|_1^{(r-1)/r},\end{aligned}$$

[108] Im soeben beschriebenen Beweis wird die Minkowski-Ungleichung aus der Hölderschen Ungleichung abgeleitet; die umgekehrte Richtung ist jedoch ebenfalls gangbar, siehe zum Beispiel [242]. Für $1 \leqq p < \infty$ sind die beiden Ungleichungen daher äquivalent.

also

$$\left\| \|f\|^{1/r} \right\|_1^r \leqq \|fg\|_1 \left\| \|g\|^{-1/(r-1)} \right\|_1^{r-1}$$

oder

$$\|fg\|_1 \geqq \|f\|_{1/r} \|g\|_{-1/(r-1)},$$

das heißt, für $f \in \mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ und $g \in \mathscr{L}^q(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ mit $g(x) \neq 0$ fast überall sowie $0 < p < 1$ und $-1 < q < 0$ mit $1/p + 1/q = 1$ gilt

$$\|fg\|_1 \geqq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Andererseits gilt für $f, g \in \mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ und $0 < p < 1$

$$\int_{\mathsf{M}} \| f + g \|^p \, d\mu \leqq \int_{\mathsf{M}} (\|f\|^p + \|g\|^p) \, d\mu = \|f\|_p^p + \|g\|_p^p,$$

also

$$\| f + g \|_p \geqq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{2.27}$$

Die Ungleichungen drehen sich somit gerade um[109].

In dieser Weise mit technischen Hilfsmitteln ausgestattet, können wir uns nun an die zentrale Aussage des vorliegenden Abschnitts machen.

2.82 Satz von Riesz-Fischer:[110] *Für $1 \leqq p \leqq \infty$ ist der Raum $\mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ mit der $\| \ \|_p$-Norm ein Banachraum.*

Beweis: 1. Fall: $1 \leqq p < \infty$. Wir zeigen zunächst, daß $\| \ \|_p$ eine Norm auf $\mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ ist.
Normaxiom (i): Direktes Nachrechnen liefert für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $f \in \mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$

$$\|\lambda f\|_p = \left(\int_{\mathsf{M}} \| \lambda f \|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \left(|\lambda|^p \int_{\mathsf{M}} \|f\|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

$$= |\lambda| \left(\int_{\mathsf{M}} \|f\|^p \, d\mu \right)^{1/p} = |\lambda| \, \|f\|_p.$$

Normaxiom (ii): Das ist genau die Minkowski-Ungleichung.
Normaxiom (iii): Aus $\|f(x)\| \geqq 0$ für alle $x \in \mathsf{M}$ folgt $\int_{\mathsf{M}} \|f\|^p \, d\mu \geqq 0$. Außerdem gilt $\int_{\mathsf{M}} \|f\|^p \, d\mu = 0$ genau dann, wenn f fast überall verschwindet, in $\mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ ist daher $\|f\|_p = 0$ äquivalent zu $f = 0$.

---

[109] Siehe hierzu [142] und [254].

[110] Genaugenommen handelt es sich hier um eine Verallgemeinerung des ursprünglich von Riesz und Fischer unabhängig voneinander gewonnenen Resultats, welches den Spezialfall $p = 2$ zum Inhalt hat. Riesz zeigte, daß jedes Element von ℓ^2 genau aus den Fourierkoeffizienten einer $\mathscr{L}^2$-Funktion besteht [304], während Fischer die dazu äquivalente Aussage der Vollständigkeit von $\mathscr{L}^2([0, 1].\lambda)$ bewies [101]. Diesem für die Quantenmechanik besonders wichtigen Spezielfall gehört weiter unten ein ganzer Abschnitt für sich allein.

Nun zeigen wir die Vollständigkeit von $\mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu, \mathcal{E})$. Dazu sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Cauchy-Folge in $\mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu, \mathcal{E})$ und $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit $f_{n_0} \equiv 0$ und $\| f_{n_{j+1}} - f_{n_j} \|_p \leqq 2^{-j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{j=0}^{m} \| f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \| \right\|_p \leqq \sum_{j=0}^{m} \| f_{n_{j+1}} - f_{n_j} \|_p \leqq \sum_{j=0}^{m} 2^{-j} < 2.$$

Nach Satz 1.21 gilt daher

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} \| f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \| \right\|_p \leqq 2,$$

folglich ist $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \| f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \|$ fast überall beschränkt, und somit konvergiert die Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x))$ fast überall auf M absolut. Nach Satz 1.21 ist daher die Funktion f mit $f(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty}(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x))$ in $\mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu, \mathcal{E})$. Nun gilt für alle $j \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{j-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f_{n_1} - f_{n_0} + f_{n_2} - f_{n_1} + \ldots + f_{n_{j-1}} - f_{n_{j-2}} + f_{n_j} - f_{n_{j-1}} = f_{n_j};$$

daraus folgt für alle $j \in \mathbb{N}$

$$\| f - f_{n_j} \|_p = \left\| \sum_{k=0}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) - \sum_{k=0}^{j-1}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \right\|_p = \left\| \sum_{k=j}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \right\|_p$$

und mit Ungleichung 2.81 weiter

$$\| f - f_{n_j} \|_p \leqq \sum_{k=j}^{\infty} \| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \|_p \leqq \sum_{k=j}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-j+1}.$$

Wegen $\lim\limits_{j \to \infty} 2^{-j+1} = 0$ gilt somit auch $\lim\limits_{j \to \infty} \| f - f_{n_j} \|_p = 0$, das heißt, die Folge $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu, \mathcal{E})$ gegen f. Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Foilge ist, konvergiert auch sie gegen f.

2. Fall: $p = \infty$. Wir zeigen wieder zunächst, daß $\| \; \|_\infty$ eine Norm auf $\mathscr{L}^\infty(\mathrm{M}, \mu, \mathcal{E})$ ist.

Normaxiom (i): Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathrm{M}, \mu, \mathcal{E})$ gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_\infty &= \text{ess sup}\, \{ \, \|\lambda f(x)\| \mid x \in \mathrm{M} \, \} = \inf \{ \, C \geqq 0 \mid \|\lambda f(x)\| \leqq C \text{ fast überall} \, \} \\ &= \inf \{ \, C \geqq 0 \mid |\lambda| \, \|f(x)\| \leqq C \text{ fast überall} \, \} \\ &= |\lambda| \inf \{ \, C \geqq 0 \mid \|f(x)\| \leqq C \text{ fast überall} \, \} = |\lambda| \, \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Normaxiom (ii): Das ist wieder die Minkowski-Ungleichung.

Normaxiom (iii): Klar aufgrund der Definition von $\| \ \|_\infty$.

Abschließend zeigen wir die Vollständigkeit von $\mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$. Dazu sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Cauchy-Folge in $\mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$; dann gilt fast überall auf M für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n(x)\| \leqq \|f_n\|_\infty$$

und damit für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\| f_m(x) - f_n(x) \| \leqq \| f_m - f_n \|_\infty. \tag{2.28}$$

Da die Folge $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es eine Nullmenge $\mathsf{N} \subset \mathsf{M}$, sodaß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathsf{M} \setminus \mathsf{N}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $\hat{f} \in \mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ konvergiert. Nun sei

$$f(x) = \begin{cases} \hat{f}(x) & \text{für} \quad x \in \mathsf{M} \setminus \mathsf{N}, \\ 0 & \text{für} \quad x \in \mathsf{N}, \end{cases}$$

dann ist $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$, das heißt, $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ gegen f. $\square$

Zwei Beispiele für $\mathscr{L}^p$-Funktionen, jeweils zum Lebesgue-Maß λ, sollen die Sache ein wenig illustrieren und gleichzeitig zum nächsten Satz überleiten, der unter speziellen Voraussetzungen eine Hierarchie der $\mathscr{L}^p$-Räume liefert. Im folgenden sei $\mathcal{E} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und λ das Lebesgue-Maß auf einer Menge Ω.

a) Es sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $f(x) = e^{-x^a}$ mit $a > 0$. Für alle $p \in [1, \infty)$ liefert die Substitution $x = (t/p)^{1/a}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-p\,x^a} \, dx = \frac{1}{a\,p^{1/a}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\, t^{1/a-1} \, dt = \frac{\Gamma(1/a)}{a\,p^{1/a}},$$

und daraus folgt $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}, \lambda)$ für $1 \leqq p < \infty$. Aufgrund von $e^{-p\,x^a} < 1$ gilt zusätzlich auch $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}, \lambda)$.

b) Nun sei $\Omega = [0, 1]$ und $f(x) = x^a$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, dann gilt für $p \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{[0,1]} |f|^p \, d\lambda = \int\limits_0^1 x^{p\,a} \, dx = \left[\frac{x^{p\,a+1}}{p\,a+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p\,a+1},$$

ein Ausdruck, der für $p\,a < -1$ negativ und für $p\,a = -1$ unendlich wird. Folglich gilt $f \in \mathscr{L}^p([0, 1], \lambda)$ für $p\,a > -1$. Da außerdem f für $a < 0$ auf jedem abgeschlossenen Intervall $[0, b]$ mit $0 < b < 1$ unbeschränkt ist, gilt $f \in \mathscr{L}^\infty([0, 1], \lambda)$ nur für $a > 0$.

Für $a < 0$ bleibt im zweiten Beispiel die Aussage $f \in \mathscr{L}^p([0,1],\lambda)$ offenbar gültig, wenn man p vergrößert, während sie für kleineres p womöglich falsch wird. In der Tat gilt allgemeiner folgendes.

2.83 Satz: *Ist* $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ *ein Maßraum mit* $\mu(\Omega) < \infty$ *und* $0 < p < q \leqq \infty$, *dann gilt* $\mathscr{L}^q(\Omega, \mu, \mathcal{E}) \subset \mathscr{L}^p(\Omega, \mu, \mathcal{E})$.

Beweis: 1. Fall: $q < \infty$. Es sei $f \in \mathscr{L}^q(\Omega, \mu, \mathcal{E})$ und $r = q/(q-p)$, also $p/q + 1/r = 1$. Mit Ungleichung 2.80 folgt

$$\int\limits_\Omega \|f\|^p \, d\mu = \int\limits_\Omega \|f\|^p \cdot 1 \, d\mu \leqq \left(\int\limits_\Omega (\|f\|^p)^{q/p} \, d\mu \right)^{p/q} \left(\int\limits_\Omega 1^r \, d\mu \right)^{1/r}$$

oder

$$\|f\|_p^p \leqq \|f\|_q^p \, \mu(\Omega) < \infty,$$

und damit ist $f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mu, \mathcal{E})$.
2. Fall: $q = \infty$. Sei $f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mu, \mathcal{E})$ und $0 < p < \infty$. Dann gilt

$$\int\limits_\Omega \|f\|^p \, d\mu \leqq \int\limits_\Omega \|f\|_\infty^p \, d\mu = \|f\|_\infty^p \int\limits_\Omega d\mu = \|f\|_\infty^p \, \mu(\Omega) < \infty,$$

also ist $f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mu)$. $\square$

Als unmittelbare Folgerung aus dem soeben bewiesenen Satz ergibt sich ein wesentliches Resultat über Konvergenz in $\mathscr{L}^p$-Räumen.

2.84 Corollar: *Ist* $0 < p < q \leqq \infty$, *dann folgt aus der Konvergenz in* $\mathscr{L}^q$ *die Konvergenz in* $\mathscr{L}^p$ *gegen denselben Grenzwert.*

Beweis: Konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^q$ gemäß der $\| \; \|_q$-Norm gegen ein $f \in \mathscr{L}^q$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \|_q = 0$. Gleichzeitig gilt $\| f_n - f \|_p \leqq \| f_n - f \|_p \, \mu(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit auch $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \|_p = 0$, das heißt, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathscr{L}^p$ gemäß der $\| \; \|_p$ ebenfalls gegen f. $\square$

Aus Satz 2.83 folgt, daß man für eine Menge Ω mit $\mu(\Omega) < \infty$ Banachraum-Inklusionsketten der Form $\mathscr{L}^\infty(\Omega) \subset \ldots \subset \mathscr{L}^q(\Omega) \subset \mathscr{L}^p(\Omega) \subset \ldots \subset \mathscr{L}^1(\Omega)$ mit aufsteigenden Indices $p < q$ bilden kann. Damit liegt die Vermutung nahe, daß der Durchschnitt über solche Ketten schließlich auf $\mathscr{L}^\infty(\Omega)$ führt, was sich für den betrachteten Fall maßbeschränkter topologischer Räume allgemein bestätigen läßt.

2.85 Corollar: *Es sei* Ω *eine Menge mit* $\mu(\Omega) < \infty$. *Dann gilt*

$$\bigcap_{p \geqq 1} \mathscr{L}^p(\Omega, \mu, \mathcal{E}) = \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mu, \mathcal{E}).$$

Beweis: Nach Satz 2.83 gilt $\mathscr{L}^\infty(\Omega,\mu,\mathcal{E}) \subset \mathscr{L}^p(\Omega,\mu,\mathcal{E})$ für alle $p \geqq 1$, daraus folgt unmittelbar

$$\mathscr{L}^\infty(\Omega,\mu,\mathcal{E}) \subset \bigcap_{p\geqq 1} \mathscr{L}^p(\Omega,\mu,\mathcal{E}) \tag{2.29}$$

Ist andererseits $f \in \bigcap\limits_{p\geqq 1} \mathscr{L}^p(\Omega,\mu,\mathcal{E})$, dann gilt $\int\limits_\Omega \|f(x)\|^p\, dx < \infty$ für alle $p \geqq 1$. Es folgt

$$\int\limits_\Omega \|f(x)\|^p\, dx \leqq \int\limits_\Omega \|f\|_\infty^p\, d\mu = \|f\|_\infty^p \int\limits_\Omega d\mu = \|f\|_\infty^p\, \mu(\Omega) < \infty$$

für alle $p \geqq 1$ und wegen $\mu(\Omega) < \infty$ dann auch $\|f\|_\infty < \infty$. Folglich ist $f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega,\mu,\mathcal{E})$ und damit

$$\mathscr{L}^\infty(\Omega,\mu,\mathcal{E}) \supset \bigcap_{p\geqq 1} \mathscr{L}^p(\Omega,\mu,\mathcal{E}). \tag{2.30}$$

(2.29) und (2.30) liefern gemeinsam die Behauptung. □

Gibt man die zusätzliche Forderung $\mu(\Omega) < \infty$ auf, verliert Satz 2.83 seine Gültigkeit; stattdessen erhält man nur mehr das folgende, schwächere Resultat.

2.86 Satz: *Ist* $(\mathrm{M},\mathfrak{S},\mu)$ *ein beliebiger Maßraum und* $1 \leqq p \leqq r \leqq q \leqq \infty$, *dann gilt* $\mathscr{L}^p(\mathrm{M},\mu,\mathcal{E}) \cap \mathscr{L}^q(\mathrm{M},\mu,\mathcal{E}) \subset \mathscr{L}^r(\mathrm{M},\mu,\mathcal{E})$.

Beweis: 1. Fall: $q < \infty$. Es sei $f \in \mathscr{L}^p \cap \mathscr{L}^q$ und $0 \leqq \alpha \leqq 1$ so daß $\alpha/p + (1-\alpha)/q = 1/r$, dann gilt nach Ungleichung 2.80

$$\int\limits_\mathrm{M} \|f\|^r\, d\mu = \int\limits_\mathrm{M} \left[\|f\|^p\right]^{\alpha r/p} \left[\|f\|^q\right]^{(\alpha-1)r/q} d\mu$$

$$\leqq \Bigg(\int\limits_\mathrm{M} \|f\|^p\, d\mu\Bigg)^{\alpha r/p} \Bigg(\int\limits_\mathrm{M} \|f\|^q\, d\mu\Bigg)^{(1-\alpha)\, r/q}$$

und damit

$$\|f\|_r^r \leqq \|f\|_p^{\alpha r}\, \|f\|_q^{(1-\alpha)\, r} < \infty,$$

also $f \in \mathscr{L}^r(\mathrm{M},\mu,\mathcal{E})$.

2. Fall: $q = \infty$. Für $p = r = \infty$ ist die Aussage des Satzes trivial, daher sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $1 \leqq p \leqq r < \infty$, außerdem sei $f \in \mathscr{L}^p \cap \mathscr{L}^\infty$. Dann ist wegen $\|f(x)\|^r = \|f(x)\|^p\, \|f(x)\|^{r-p}$ und Ungleichung 2.80

$$\int\limits_\mathrm{M} \|f\|^r\, d\mu = \|\, \|f\|^r\, \|_1 = \|\, \|f\|^p\, \|f\|^{r-p}\, \|_1 \leqq \|\, \|f\|^p\|_1\, \|\, \|f\|^{r-p}\, \|_\infty.$$

Nun ist nach Voraussetzung sowohl $\|f\|_p < \infty$ als auch $\|f\|_\infty < \infty$, woraus $\|\, \|f\|^p\|_1 = \|f\|_p^p < \infty$ und $\|\, \|f\|^{r-p}\, \|_\infty < \infty$ und damit auch

$$\int\limits_\mathrm{M} \|f\|^r\, d\mu = \|f\|_r^r < \infty$$

folgt. Also ist $f \in \mathscr{L}^r(\mathrm{M},\mu,\mathcal{E})$. □

Das bedeutet, daß für $\mu(\mathrm{M}) = \infty$ im allgemeinen aus $0 < p \leqq q \leqq \infty$ weder $\mathscr{L}^q(\Omega, \mu, \mathcal{E}) \subset \mathscr{L}^p(\Omega, \mu, \mathcal{E})$ noch $\mathscr{L}^q(\Omega, \mu, \mathcal{E}) \supset \mathscr{L}^p(\Omega, \mu, \mathcal{E})$ folgt. Beispiele hierfür sind die Funktionen $f(x) = 1/x$ und $g(x) = 1/(x\sqrt{x-1})$. Beide sind auf $[1, \infty]$ beschränkt; außerdem gilt einerseits

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \left[\ln x\right]_1^\infty = \infty$$

und

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{1}{(1-p)\,x^{p-1}}\right]_1^\infty = \frac{1}{1-p}$$

für $p \neq 1$, und andererseits

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \left[2 \arctan \sqrt{x-1}\,\right]_1^\infty = \pi$$

und

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x-1)} = \left[\frac{1}{x} - \ln \frac{x}{x-1}\right]_1^\infty = \infty.$$

Damit ist $f \notin \mathscr{L}^1([1, \infty])$, aber $f \in \mathscr{L}^p([1, \infty])$ für $1 < p \leqq \infty$, und $g \in \mathscr{L}^1([1, \infty])$, aber $g \notin \mathscr{L}^2([1, \infty])$. Entsprechend ist weder $\mathscr{L}^1([1, \infty])$ eine Teilmenge von $\mathscr{L}^p([1, \infty])$ für $1 < p \leqq \infty$, noch ist $\mathscr{L}^2([1, \infty])$ eine solche von $\mathscr{L}^1([1, \infty])$.

Ist ν ein bezüglich μ absolut stetiges Maß, dann übertragen sich die integrationstheoretischen Eigenschaften μ-integrierbarer Funktionen auf ν-Integrierbarkeit. Dasselbe gilt für die totale Variation $v(\mu)$. Folglich sind $\mathscr{L}^p$-Räume bezüglich μ auch solche bezüglich ν und bezüglich $v(\mu)$; die Aussagen der Sätze 2.83 - 2.86 bleiben dabei jeweils erhalten.

Im folgenden betrachten wir, sofern nicht ausdrücklich anderes gesagt wird, $\mathscr{L}^p$-Räume von Funktionen mit Wertemenge $\mathbb{C} \cup \{-\infty, \infty\}$. Wir schreiben dafür der Einfacheit halber $\mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$ beziehungsweise $\mathscr{L}^\infty(\mathrm{M}, \mu)$.

$\mathscr{L}^p$-Räume enthalten natürlich nicht nur stetige und stetig differenzierbare Funktionen, sondern insbesondere auch solche mit wesentlich sperrigeren Eigenschaften, und so stellt sich die Frage, ob es in solchen Funktionenräumen dichte Unterräume zahmerer Funktionen gibt, denn das würde bedeuten, daß man die widerborstigen Elemente der $\mathscr{L}^p$-Räume durch handlichere Exemplare beliebig genau approximieren kann. Hier hat man insbesondere die Räume $C_c(\mathrm{M})$ und $C_c^\infty(\mathrm{M})$ der stetigen beziehungsweise unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger auf M im Blick[111]; natürlich gilt für diese $C_c(\mathrm{M}) \subset \mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$ und $C_c^\infty(\mathrm{M}) \subset \mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$ für alle $1 \leqq p \leqq \infty$. – Der folgende Satz leistet nun genau das gewünschte.

2.87 Satz: *Es sei* M *ein metrischer Raum,* μ *ein Radon-Maß auf* M *und* $1 \leqq p < \infty$. *Dann sind* $C_c(\mathrm{M})$ *und* $C_c^\infty(\mathrm{M})$ *dicht in* $\mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$.

[111] Der Raum $C_c^\infty(\mathrm{M})$ wird auch mit $\mathscr{D}(\mathrm{M})$ bezeichnet. Seine Elemente heißen *Testfunktionen*; wir kommen in Band 2 darauf zurück.

Beweis: Betrachte die Menge $\mathscr{C} := \{ \chi_X \mid X \in \mathfrak{S} \wedge \mu(X) < \infty \}$; ihre lineare Hülle ist die Menge $\mathscr{E}(M)$ der einfachen Funktionen[112] auf M. Diese sind dicht in der Menge der meßbaren Funktionen auf M, daher gilt $\overline{\mathscr{E}(M)} \supset \mathscr{L}^p(M, \mu)$ für alle $1 \leqq p < \infty$. Nun sei $X \in \mathfrak{S}$, $\mu(X) < \infty$, dann ist X kompakt, und außerdem gibt es nach Satz 1.18 für alle $\varepsilon > 0$ kompakte Mengen $A \subset X$ mit $\mu(X \setminus A) < \varepsilon/2$ und $B \subset M \setminus X$ mit $\mu((M \setminus X) \setminus B) < \varepsilon/2$. Dabei sind A und B außerdem nichtleer und disjunkt. M ist als metrischer Raum insbesondere auch normal, nach Satz 1.4 gibt es somit eine stetige Funktion $f : M \longrightarrow [0, 1]$ mit $f(x) = 1$ für $x \in A$ und $f(x) = 0$ für $x \in B$. Mit dieser gilt

$$\| \chi_X(x) - f(x) \| = 0 \quad \text{für } x \in A \vee x \in B$$

und

$$0 \leqq \| \chi_X(x) - f(x) \| \leqq 1 \quad \text{für } x \in X \setminus A \vee x \in (M \setminus X) \setminus B$$

sowie $M = A \cup B \cup X \setminus A \cup (M \setminus X) \setminus B$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \| \chi_X - f \|_p^p &= \int_M \| \chi_X - f \|^p \, d\mu \\ &\leqq \int_{X \setminus A} d\mu + \int_{(M \setminus X) \setminus B} d\mu = \mu(X \setminus A) + \mu((M \setminus X) \setminus B) = \varepsilon, \end{aligned}$$

das heißt, jedes χ_X ist in der $\| \ \|_p$-Norm beliebig genau durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger approximierbar. Damit gilt $\overline{\mathscr{E}(M)} \subset \overline{C_c(M)}$, also $\overline{C_c(M)} = \mathscr{L}^p(M, \mu)$.
Jetzt sei für $e \in \mathcal{E}$ mit $\|e\| = 1$ und für alle $\varepsilon > 0$

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \left[\exp\left(\dfrac{1}{\|x\|^2 - \varepsilon^2} \right) \right] \cdot e & \text{für } \|x\| < \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$f_\varepsilon(x) = \frac{\delta_\varepsilon(x)}{\int_M \delta_\varepsilon \, d\mu};$$

dann ist $f \in C_c^\infty(M)$ und $\int_M f(x) \, d\mu = 1$. Weiter sei für $X \in \mathfrak{S}$, $\mu(X) < \infty$

$$g_\varepsilon(x) = \int_X f_\varepsilon(\, x - y \,) \, d\mu(y);$$

hierfür gilt

$$\|g_\varepsilon(x)\| = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in X \wedge d(x, \partial X) \geqq \varepsilon, \\ 0 & \text{falls } x \notin X \wedge d(x, \partial X) \leqq \varepsilon \end{cases}$$

[112] Siehe Abschnitt 1.2.2.

und

$$0 \leqq \|g_\varepsilon(x)\| \leqq 1 \quad \text{für alle } x \in \mathrm{X}.$$

Für $\varepsilon \longrightarrow 0$ konvergiert g_ε somit punktweise gegen χ_X. Zusätzlich gilt $\|g_\varepsilon(x)\| \leqq \chi_\mathrm{X}(x)$, nach Satz 1.21 konvergiert daher g_ε für $\varepsilon \longrightarrow 0$ auch in der $\| \ \|_p$-Norm gegen χ_X. Außerdem ist $g_\varepsilon \in \mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$, das heißt, jedes χ_X ist in der $\| \ \|_p$-Norm beliebig genau durch unendlich oft differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger approximierbar. Damit gilt
$\overline{\mathscr{E}(\mathrm{M})} \subset \overline{C_c^\infty(\mathrm{M})}$, also $\overline{C_c^\infty(\mathrm{M})} = \mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$. □

Daß der Fall $p = \infty$ in Satz 2.87 nicht enthalten ist, läßt sich anhand eines einfachen Gegenbeispiels begründen. Sei $f \equiv 1$, dann gilt $\|f\|_\infty = 1$, also ist $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathrm{M}, \mu)$. Ist $g \in C_c(\mathrm{M})$ beliebig, dann gibt es eine kompakte Menge $\mathrm{A} \subset \mathrm{M}$, sodaß $g(x) = 0$ für alle $x \in \mathrm{M}\setminus\mathrm{A}$. Damit gilt auch $(f - g)(x) = 1$ für alle $x \in \mathrm{M}\setminus\mathrm{A}$, das heißt, es ist $\|f - g\|_\infty = 1$ für alle $g \in C_c(\mathrm{M})$, und $C_c(\mathrm{M})$ und damit auch $C_c^\infty(\mathrm{M})$ *sind nicht dicht in* $\mathscr{L}^\infty(\mathrm{M}, \mu)$.

Analoges gilt nun auch für naheliegende Verallgemeinerungen der soeben betrachteten Funktionenräume, genauergesagt für die Räume $C_0(\mathrm{M})$ der stetigen und $C_0^\infty(\mathrm{M})$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen, die für $\|x\| \longrightarrow \infty$ verschwinden, und generell für die Räume $C(\mathrm{M})$ aller stetigen und $C^\infty(\mathrm{M})$ aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf einer vorgegebenen Menge M. Ersichtlicherweise gilt einerseits

$$C_c(\mathrm{M}) \subset C_0(\mathrm{M}) \subset C(\mathrm{M})$$

und

$$C_c^\infty(\mathrm{M}) \subset C_0^\infty(\mathrm{M}) \subset C^\infty(\mathrm{M}),$$

andererseits sind jedoch C_0, C, C^∞ und C_0^∞ keine Teilmengen der $\mathscr{L}^p$-Räume. Das führt zusammen mit Satz 2.87 auf das folgende

2.88 Corollar: *Ist* M *ein metrischer Raum,* μ *ein Radon-Maß auf* M *und* $1 \leqq p < \infty$*, dann sind* $C_0(\mathrm{M}) \cap \mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$ *und* $C_0^\infty(\mathrm{M}) \cap \mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$ *sowie* $C(\mathrm{M}) \cap \mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$ *und* $C^\infty(\mathrm{M}) \cap \mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$ *dicht in* $\mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$.

Ein spezielles und gleichzeitig das wichtigste Beispiel für obige Sachverhalte ist das Lebesgue-Maß λ auf dem $\mathbb{R}^n$. Es ist ein Radon-Maß, gleichzeitig weist der $\mathbb{R}^n$ sämtliche gewünschten Eigenschaften auf (normal, lokalkompakt, metrisch), sodaß für $1 \leqq p < \infty$ und alle offenen Mengen $\Omega \subseteqq \mathbb{R}^n$ die Räume $C_c(\Omega), C_0(\Omega)$ und $C(\Omega)$ sowie $C_c^\infty(\Omega), C_0^\infty(\Omega)$ und $C^\infty(\Omega)$ dicht in $\mathscr{L}^p(\Omega, \lambda)$ sind.

Nachdem nun Aussagen über dichte Teilmengen der $\mathscr{L}^p$-Räume zur Verfügung stehen, stellt sich automatisch die Frage nach deren Separabilität. Wir einnern daran, daß ein metrischer Raum separabel heißt, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Auch hier findet man wieder unterschiedliches Verhalten für $p < \infty$ und $p = \infty$.

2.89 Satz: *Es seien* $(\mathrm{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ *ein Maßraum,* μ *ein* σ*-finites Maß und* $\mathfrak{S}$ *abzählbar erzeugt. Dann sind für* $1 \leqq p < \infty$ *die Räume* $\mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$ *separabel.*

Beweis: Wir konstruieren zunächst eine geeignete abzählbare Teilmenge $\mathscr{R}(\mathsf{M},\mu)$ von $\mathscr{L}^p(\mathsf{M},\mu)$. Dazu sei $\mathfrak{A}$ eine abzählbare Familie von Mengen mit $\mathfrak{S} = \sigma(\mathfrak{A})$, sodaß es eine Folge $(\mathsf{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{A}$ gibt mit $\mu(\mathsf{A}_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathsf{A}_n = \mathsf{M}$. Außerdem sei

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \{\, \mathsf{X} \in \mathfrak{P}(\mathsf{M}) \mid \mathsf{X} \in \mathfrak{A} \vee \mathsf{M}\setminus \mathsf{X} \in \mathfrak{A}\,\}$$

und

$$\mathfrak{A}_0 = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{n} \mathsf{B}_{i,j}, \quad \mathsf{B}_{i,j} \in \widetilde{\mathfrak{A}}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

$\mathfrak{A}_0$ ist abzählbar, und es gilt $\sigma(\mathfrak{A}_0) = \mathfrak{S}$. Nun sei

$$\mathscr{R}(\mathsf{M},\mu) = \left\{ \varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{\mathsf{B}_j} \;\middle|\; \alpha_j \in \mathbb{Q}[\,i\,],\ \mathsf{B}_j \in \mathfrak{A}_0,\ \mu(\mathsf{B}_j) < \infty,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$\mathscr{R}(\mathsf{M},\mu)$ ist abzählbar, und es gilt $\mathscr{R}(\mathsf{M},\mu) \subset \mathscr{L}^p(\mathsf{M},\mu)$.
Wir zeigen jetzt, daß $\mathscr{R}(\mathsf{M},\mu)$ dicht ist in $\mathscr{L}^p(\mathsf{M},\mu)$. Ist $f \in \mathscr{R}(\mathsf{M},\mu)$, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine einfache Funktion $g \in \mathscr{L}^p(\mathsf{M},\mu)$ mit $\|\, f - g\,\|_p < \varepsilon/3$. Wir wählen $g := \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{\mathsf{C}_j}$ mit $\mathsf{C}_j \in \mathfrak{S}$ und $\mu(\mathsf{C}_j) > \infty$ für $j = 1, 2, \ldots, n$ und dazu $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{Q}[\,i\,]$, sodaß

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \chi_{\mathsf{C}_j} - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{\mathsf{C}_j} \right\| \leqq \sum_{j=1}^{n} |\,\gamma_j - \beta_j\,|\, \|\chi_{\mathsf{C}_j}\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Als nächstes wählen wir eine Folge $(\mathsf{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{A}_0$ mit $\mu(\mathsf{D}_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathsf{D}_n = \mathsf{M}$. Daraus konstruieren wir eine weitere Folge $(\mathsf{E}_n)_{n\in\mathbb{N}} := \bigcup_{j=0}^{n} \mathsf{D}_j$ in $\mathfrak{A}_0$; für diese gilt $\mathsf{E}_m \supset \mathsf{F}_n$, sofern $m > n$. Für jedes $\mathsf{A} \in \mathfrak{S}$ mit $\mu(\mathsf{A}) < \infty$ betrachten wir außerdem die Folge $(\mathsf{F}_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\,\mathsf{A} \cap \mathsf{E}_n\,)_{n\in\mathbb{N}}$; auch für diese gilt $\mathsf{F}_m \supset \mathsf{F}_n$, sofern $m > n$. Die Mengen $\mathsf{F}_{n+1} \setminus \mathsf{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$, sind paarweise disjunkt, für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathsf{F}_n = \bigcup_{j=0}^{n} (\,\mathsf{F}_{j+1} \setminus \mathsf{F}_j\,)$, damit auch $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathsf{F}_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\,\mathsf{F}_{n+1} \setminus \mathsf{F}_n\,)$ und folglich, weil μ ein σ-finites Maß ist,

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathsf{F}_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (\,\mathsf{F}_{n+1} \setminus \mathsf{F}_n\,)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\,\mathsf{F}_{n+1} \setminus \mathsf{F}_n\,)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \mu(\,\mathsf{F}_{j+1} \setminus \mathsf{F}_j\,) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=0}^{n} (\,\mathsf{F}_{j+1} \setminus \mathsf{F}_j\,)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(\mathsf{F}_n).\end{aligned}$$

Also gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodaß

$$\mu(\mathsf{F}_N) > \mu(\mathsf{A}) - \varepsilon/6. \tag{2.31}$$

Nun wählen wir eine Folge $(\mathsf{G}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $\mathsf{F}_N = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathsf{G}_m$, sodaß

$$\mu\left(\mathsf{F}_N \setminus \bigcup_{m=0}^{N} \mathsf{G}_m\right) = \mu\left(\left(\mathsf{A} \setminus \bigcup_{m=0}^{N} \mathsf{G}_m\right) \cap \mathsf{E}_N\right) < \varepsilon/6$$

ist, und zu jedem $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ein $\mathsf{H}_n \in \mathfrak{A}_0$ mit $\mu(\,(\mathsf{G}_n \triangle \mathsf{H}_n) \cap \mathsf{E}_N\,) < \varepsilon/6N$. Dann gilt $\mathsf{H} := \bigcup_{n=0}^{N} \mathsf{H}_n$ sowie

$$\begin{aligned}
\mu(\,(\mathsf{A} \triangle \mathsf{H}\,) \cap \mathsf{E}_N\,) &\leqq \mu\left(\left(\mathsf{A} \triangle \bigcup_{n=0}^{N} \mathsf{G}_n\right) \cap \mathsf{E}_N\right) + \mu\left(\left(\left(\bigcup_{n=0}^{N} \mathsf{G}_n\right) \triangle \mathsf{H}\right) \cap \mathsf{E}_N\right) \\
&\leqq \mu\left(\left(\mathsf{A} \triangle \bigcup_{n=0}^{N} \mathsf{G}_n\right) \cap \mathsf{E}_N\right) + \sum_{n=0}^{N} \mu(\,(\mathsf{G}_n \triangle \mathsf{H}_n) \cap \mathsf{E}_N\,) \\
&< \frac{\varepsilon}{6} + \sum_{n=0}^{N} \frac{\varepsilon}{6N} = \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Es folgt $\mathsf{H} \cap \mathsf{E}_N \in \mathfrak{A}_0$ und weiter

$$\begin{aligned}
\mu(\,\mathsf{A} \triangle (\,\mathsf{H} \cap \mathsf{E}_N\,)\,) &\leqq \mu(\,\mathsf{A} \triangle (\,\mathsf{A} \cap \mathsf{E}_N\,)\,) + \mu(\,(\,\mathsf{A} \cap \mathsf{E}_N\,) \triangle (\,\mathsf{H} \cap \mathsf{E}_N\,)\,) \\
&= \mu(\,\mathsf{A} \setminus (\,\mathsf{A} \cap \mathsf{E}_N\,)\,) + \mu(\,(\,\mathsf{A} \triangle \mathsf{H}\,) \cap \mathsf{E}_N\,) < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3},
\end{aligned}$$

mit (2.31) also $\mu(\,\mathsf{A} \triangle \mathsf{H}\,) < \varepsilon/3$. Damit finden wir zu jedem C_j aus der Darstellung von g oben ein $\widetilde{\mathsf{C}}_j \in \mathfrak{S}$, sodaß

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \chi_{\mathsf{C}_j} - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \chi_{\widetilde{\mathsf{C}}_j} \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es gilt $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \chi_{\widetilde{\mathsf{C}}_j} \in \mathfrak{S}$ und aufgrund von Ungleichung 2.81 außerdem

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \chi_{\widetilde{\mathsf{C}}_j} \right\|_p &\leqq \|\, f - g\,\|_p + \left\| g - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \chi_{\mathsf{C}_j} \right\|_p + \left\| \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \chi_{\mathsf{C}_j} - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \chi_{\widetilde{\mathsf{C}}_j} \right\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Das ist für beliebige $f \in \mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)$ und $\varepsilon > 0$ der Fall, folgich ist $\mathscr{R}(\mathsf{M}, \mu)$ dicht in $\mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)$. □

Damit folgt für $1 \leqq p < \infty$ nach Satz 2.64 für die Mächtigkeit und die algebraische Dimension derjenigen Räume $\mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \lambda)$, welche die Voraussetzungen von Satz 2.87 erfüllen, der Wert $\mathfrak{c}$ und nach Satz 2.78 für deren topologische Dimension der Wert $\aleph_0$.

Auf die Forderung an das verwendete Maß, σ-finit zu sein, kann bei Satz 2.87 nicht verzichtet werden[113]. Es gilt nämlich der folgende

2.90 Satz: *Ist* $(\mathsf{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ *ein Maßraum mit nicht* σ*-finitem Maß* μ *und* $1 \leqq p < \infty$*, dann sind die Räume* $\mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)$ *nicht separabel.*

Beweis: Γ sei eine Ordinalzahl, sodaß es eine Familie $(\mathsf{A}_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ von Teilmengen von M gibt mit $\mathsf{M} = \bigcup\limits_{\gamma<\Gamma}$ und $\mu(\mathsf{A}_\gamma) < \infty$ für alle $\gamma < \Gamma$. Damit gilt auch $\|\chi_{\mathsf{A}_\gamma}\|_p < \infty$ für alle $\gamma < \Gamma$. Nach Voraussetzung ist $|\Gamma| > \aleph_0$, das heißt, $(\mathsf{A}_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ ist überabzählbar. Nun sei $j : \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma$ eine injektive Abbildung und $f_t := \chi_{\mathsf{A}_{j(t)}}$. Es gilt $\|f_t\| < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$, daher ist $\{\, f_t \mid t \in \mathbb{R}_0^* \,\}$ eine überabzählbare Teilmenge von $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n, \mu)$, und es gilt $\|\, f_t - f_{t'} \,\|_p = 1$ für $t \neq t'$. Satz 2.19 liefert damit die Behauptung. □

Zwei Beispiele zur Illustration: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, $\mathfrak{B}(\Omega)$ die zugehörige Borel-Algebra und λ das Lebesgue-Maß; dieses ist σ-finit auf Ω. Außerdem umfaßt $\mathfrak{B}(\Omega)$ die Menge der n-dimensionalen Quader mit rationalen Eckpunkten und ist damit abzählbar erzeugt. Nach Satz 2.89 sind die Räume $\mathscr{L}^p(\Omega, \lambda)$ für $1 \leqq p < \infty$ folglich separabel. Betrachten wir andererseits den gesamten $\mathbb{R}^n$, dessen Borel-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ und wählen als Maß μ das Zählmaß, dann ist letzteres hier natürlich nicht σ-finit, denn überabzählbare Mengen sind nur als abzählbare Vereinigungen überabzählbarer Mengen darstellbar. Nach Satz 2.90 sind somit für $1 \leqq p < \infty$ die Räume $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n, \mu)$ nicht separabel.

Der Fall $p = \infty$ ist übersichtlicher; für ihn gilt generell[114]

2.91 Satz: $\mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu)$ *ist nicht separabel.*

Beweis: Sei $a \in \mathsf{M}$ fest gewählt. Betrachte für $t \in \mathbb{R}_0^*$ und $x \in \mathsf{M}$ die Funktionen f_t mit

$$f_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad 0 \leqq \|\, x - a \,\| \leqq t \\ 0 & \text{falls} \quad t > \|\, x - a \,\|. \end{cases}$$

Dann ist $f_t \in \mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \lambda)$ für $t \in \mathbb{R}_0^*$, und die Menge $\{\, f_t \mid t \in \mathbb{R}_0^* \,\} \subset \mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \lambda)$ ist überabzählbar. Außerdem gilt $\|\, f_t - f_{t'} \,\|_\infty = 1$ für $t \neq t'$. Mit Satz 2.19 folgt daraus die Behauptung. □

Entsprechend ist die algebraische Dimension der $\mathscr{L}^p$-Räume mit nicht σ-finitem Maß sowie der $\mathscr{L}^\infty$-Räume größer als $\mathfrak{c}$ und deren topologische Dimension größer als $\aleph_0$.

Für die Belange der Quantenmechanik von besonderer Bedeutung sind die Dualräume der $\mathscr{L}^p$-Räume. Wichtige Informationen hierüber erteilt der

---

[113] Für den Spezialfall eines Maßraums $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ mit $\mu(\Omega) < \infty$ läßt sich die Aussage von Satz 2.87 folgendermaßen umformulieren: *Für* $1 \leqq p < \infty$ *ist* $\mathscr{L}^p(\Omega, \mu)$ *genau dann separabel, wenn* $\mathfrak{S}$ *als metrischer Raum mit der Metrik* $d(\mathsf{A}, \mathsf{B}) = \mu(\mathsf{A} \triangle \mathsf{B})$ *separabel ist.* Einen Beweis hierfür findet man in [46].

[114] und natürlich unter der Voraussetzung, daß M eine unendliche Menge ist.

2.92 Rieszscher Darstellungssatz:[115] $(\mathsf{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ *sei ein Maßraum, und für* $1 < p, q < \infty$ *gelte* $1/p + 1/q = 1$. *Dann ist die Abbildung* $\mathcal{T} : \mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu) \longrightarrow \mathscr{L}^q(\mathsf{M}, \mu)'$ *mit*

$$\mathcal{T}(f)g = \int\limits_{\mathsf{M}} fg\, d\mu$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis: Gemäß der Integraldefinition aus Abschnitt 1.2.2 ist $\mathcal{T}$ eine lineare Abbildung. Der Nachweis von $\mathcal{T}$ als isometrischen Isomorphismus erfolgt in drei Schritten.
1. Zunächst liefert Satz 2.80 für alle $g \in \mathscr{L}^q(\mathsf{M}, \mu)$

$$|\mathcal{T}(f)g| = \left| \int\limits_{\mathsf{M}} fg\, d\mu \right| \leqq \int\limits_{\mathsf{M}} |fg|\, d\mu = \|fg\|_1 \leqq \|f\|_p\, \|g\|_q,$$

also ist $\mathcal{T}$ stetig und $\mathcal{T}(f) \in \mathscr{L}^q(\mathsf{M}, \mu)'$ mit $\|\mathcal{T}(f)\| \leqq \|f\|_p$.
Umgekehrt sei

$$h(x) = \begin{cases} |f(x)|^{p-2}\,\overline{f(x)} & \text{falls} \quad f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad f(x) = 0, \end{cases}$$

dann ist

$$\mathcal{T}(f)h = \int\limits_{\mathsf{M}} fh\, d\mu = \int\limits_{\mathsf{M}} |f|^{p-2}\, f\,\overline{f}\, d\mu = \int\limits_{\mathsf{M}} |f|^p\, d\mu = \|f\|_p^p$$

und damit aufgrund von der Linearität der Abbildung $\mathcal{T}$ sowie der Definition 2.28 der Operatornorm und $\|h/\|h\|_q\|_q = 1$

$$\|\mathcal{T}(f)\| \geqq \mathcal{T}(f)\, \frac{h}{\|h\|_q} = \frac{1}{\|h\|_q}\, \mathcal{T}(f)h = \frac{\|f\|_p^p}{\|h\|_q}.$$

Nun ist

$$\|h\|_q = \left(\int\limits_{\mathsf{M}} [\,|f|^{p-1}\,]^q\, d\mu \right)^{1/q} = \left(\int\limits_{\mathsf{M}} [\,|f|^{p/q}\,]^q\, d\mu \right)^{1/q}$$
$$= \left(\int\limits_{\mathsf{M}} |f|^p\, d\mu \right)^{1/q} = \|f\|_p^{p/q},$$

[115] Der Satz wurde zunächst und unabhängig voneinander 1907 von Riesz [305] und Fréchet [106] für das Lebesgue-Maß λ und $\mathscr{L}^2([a, b], \lambda)$ bewiesen. Auf diesen Spezialfall wird weiter unten ausführlich zurückzukommen sein. Riesz verallgemeinerte die Aussage 1910 auf $\mathscr{L}^p([a, b], \lambda)$ für $1 < p < \infty$ [308], Nikodým 1931 auf $\mathscr{L}^p(\Omega, \mu)$ mit endlichem Maßraum Ω [275], und McShane konnte 1950 das Resultat auf die Räume $\mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)$ mit allgemeinen Maßräumen M ausdehnen [253]. Ein verwandtes Resultat geht ursprünglich ebenfalls auf Riesz zurück [306], [307]; dieses wurde von Kakutani verallgemeinert [187] und wird häufig ebenfalls als Darstellungssatz von Riesz bezeichnet. Es besagt folgendes: *Ist* X *ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, dann gibt es zu jedem stetigen linearen Funktional* $\varphi : \mathsf{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ *ein eindeutig bestimmtes Radon-Maß* μ, *sodaß* $\varphi(f) = \int\limits_{\mathsf{X}} f(x)\, d\mu$ *gilt für alle* $f \in \mathsf{X}'$. *Umgekehrt ist für jedes Radon-Maß* μ *auf* X *durch* $\varphi(f) = \int\limits_{\mathsf{X}} f(x)\, d\mu$ *ein Funktional* $\varphi \in \mathsf{X}'$ *gegeben.* Details hierzu findet man beispielsweise bei [56].

also

$$\frac{\|f\|_p^p}{\|h\|_q} = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^{p/q}} = \|f\|_p^{p-p/q} = \|f\|_p^{p(1-1/q)} = \|f\|_p,$$

und daraus folgt $\|\mathcal{T}(f)\| \geqq \|f\|_p$. Insgesamt ergibt sich so $\|\mathcal{T}(f)\| = \|f\|_p$, das heißt, $\mathcal{T}$ ist eine Isometrie.

2. Sei $\tilde{f} \in \mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)$ eine weitere Funktion mit

$$\mathcal{T}(\tilde{f})g = \int\limits_{\mathsf{M}} f g \, d\mu,$$

dann ist für alle $g \in \mathscr{L}^q(\mathsf{M}, \mu)$

$$\int\limits_{\mathsf{M}} \tilde{f} g \, d\mu = \int\limits_{\mathsf{M}} f g \, d\mu$$

oder

$$\int\limits_{\mathsf{M}} [\, \tilde{f} - f \,] \, g \, d\mu = 0,$$

das heißt $\tilde{f} = f$. Damit ist $\mathcal{T}$ injektiv.

3. Nun sei $\mathcal{T}$ ein beliebiges lineares stetiges Funktional auf $\mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)$.
Zunächst sei $\mu(\mathsf{M}) < \infty$. Für jede meßbare Menge $\mathsf{A} \subset \mathsf{M}$ definieren wir $\nu(\mathsf{A}) := \mathcal{T}\chi_{\mathsf{A}}$. Die Linearität von $\mathcal{T}$ und die Additivität charakteristischer Funktionen für disjunkte Mengen garantiert die Additivität von ν. Ist außerdem $\mathsf{A} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathsf{A}_n$ mit paarweise disjunkten meßbaren Mengen A_n und $\mathsf{B}_j = \bigcup\limits_{n=0}^{j} \mathsf{A}_n$, dann gilt

$$\lim_{j\to\infty} \| \chi_{\mathsf{A}} - \chi_{\mathsf{B}_j} \|_q = \lim_{j\to\infty} \left(\int\limits_{\mathsf{M}} | \chi_{\mathsf{A}} - \chi_{\mathsf{B}_j} |^p \, d\mu \right)^{1/p} = \lim_{j\to\infty} [\, \mu(\mathsf{A} - \mathsf{B}_j\,)]^{1/p} = 0,$$

und die Stetigkeit von $\mathcal{T}$ liefert $\lim\limits_{j\to\infty} \| \mathcal{T}\chi_{\mathsf{A}} - \mathcal{T}\chi_{\mathsf{B}_j} \|_q = 0$ und damit $\lim\limits_{j\to\infty} \nu(\mathsf{B}_j) = \nu(\mathsf{A})$. Damit ist ν auch σ-additiv und folglich ein komplexes Maß auf M. Aus $\mu(\mathsf{A}) = 0$ folgt $\chi_{\mathsf{A}}(x) = 0$ fast überall und damit $\nu(\mathsf{A}) = 0$, das heißt, ν ist absolut stetig bezüglich μ, und nach Satz 1.24[116] gibt es somit eine Funktion $f \in \mathscr{L}^1(\mathsf{M}, \mu)$ mit

$$\mathcal{T}\chi_{\mathsf{A}} = \int\limits_{\mathsf{A}} f \, d\mu = \int\limits_{\mathsf{M}} f \chi_{\mathsf{A}} \, d\mu$$

für alle meßbaren Mengen $\mathsf{A} \subset \mathsf{M}$. Daraus folgt

$$\left| \int\limits_{\mathsf{A}} f \, d\mu \right| = | \mathcal{T}\chi_{\mathsf{A}} | \leqq \|\mathcal{T}\| \, \|\chi_{\mathsf{A}}\|_p,$$

[116] Der Satz von Radon-Nikodym wird häufig unter Verwendung des Rieszschen Darstellungssatzes für den Spezialfall $p = q = 2$ bewiesen, siehe etwa [321], und dann wäre dessen gerade geführter Beweis zirkulär. Der Beweis des Satzes von Radon-Nykodym läßt sich jedoch auch auf anderem Wege führen, siehe beispielsweise [254], sodaß dieses Problem tatsächlich nicht auftritt.

und weil $\mathcal{T}$ linear und stetig ist, gilt auch

$$\mathcal{T}\,\varphi = \int\limits_{\mathsf{M}} f\,\varphi\,d\mu$$

sowie

$$\left|\int\limits_{\mathsf{A}} f\,\varphi\,d\mu\right| \leqq \|\mathcal{T}\|\,\|\varphi\|_p \tag{2.32}$$

für alle einfachen Funktionen φ auf M.
Da die einfachen Funktionen dicht in der Menge der meßbaren Funktionen liegen, gibt es zu jeder Funktion $g \in \mathscr{L}^q(\mathsf{M},\mu)$ eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen mit $|\varphi_n| \leqq |g|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = g$; aufgrund der Stetigkeit von $\mathcal{T}$ folgt daraus

$$\mathcal{T}\,g = \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}\,\varphi_n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathsf{M}} f\,\varphi_n\,d\mu.$$

Zusätzlich gilt $|\,f\,\varphi_n\,| \leqq |f|\,|g| \leqq |f|\,\|g\|_p$, und mit Satz 1.21 führt das auf

$$\mathcal{T}\,g = \int\limits_{\mathsf{M}} f g\,d\mu$$

für alle $g \in \mathscr{L}^q(\mathsf{M},\mu)$, sowie mit (2.32) auf

$$\left|\int\limits_{\mathsf{M}} f g\,d\mu\right| \leqq \|\mathcal{T}\|\,\|g\|_p \tag{2.33}$$

$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei nun wieder eine Folge einfacher Funktionen, die diesesmal für $n \longrightarrow \infty$ punktweise gegen f konvergiert und für die $|\varphi_n| \leqq |f|$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Auch die Existenz einer solchen Folge ist garantiert, weil die einfachen Funktionen dicht in den meßbaren liegen, denn die einfachen Funktionen sind dicht in $\mathscr{L}^\infty(\mathsf{M},\mu)$, und gleichmäßige Konvergenz zieht punktweise Konvergenz nach sich. Damit gilt

$$\|f\|_p \leqq \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_p. \tag{2.34}$$

Außerdem sei

$$g_n = \frac{\overline{f}}{|f|}\left(\frac{|\varphi_n|}{\|\varphi_n\|_q}\right)^{q/p}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist erstens

$$\|g_n\|_p^p = \int\limits_{\mathsf{M}} |g_n|^p\,d\mu = \int\limits_{\mathsf{M}} \left(\frac{|\varphi_n|}{\|\varphi_n\|_q}\right)^q d\mu = 1,$$

also $g_n \in \mathscr{L}^p(\mathsf{M},\mu)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, zweitens wegen $1 + q/p = q$

$$\int\limits_{\mathsf{M}} |\,\varphi_n\,g_n\,|\,d\mu = \int\limits_{\mathsf{M}} \left|\,\varphi_n\left(\frac{|\varphi_n|}{\|\varphi_n\|_q}\right)^{q/p}\right| d\mu$$

$$= \frac{1}{\|\varphi_n\|_q^{q/p}} \int\limits_M |\varphi_n|^{1+q/p}\, d\mu = \frac{\|\varphi_n\|_q^{1+q/p}}{\|\varphi_n\|_q^{q/p}} = \|\varphi_n\|_q, \tag{2.35}$$

und drittens

$$f\, g_n = \frac{f\bar{f}}{|f|} \left(\frac{|\varphi_n|}{\|\varphi_n\|_q} \right)^{q/p} = |f| \left(\frac{|\varphi_n|}{\|\varphi_n\|_q} \right)^{q/p} = |f\, g_n|. \tag{2.36}$$

(2.34), (2.35) und (2.36) liefern gemeinsam

$$\|f\|_p \leqq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_M |\,\varphi_n\, g_n\,|\, d\mu$$

$$\leqq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_M |f g_n|\, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int\limits_M f g_n\, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \mathcal{T} g_n \leqq \|\mathcal{T}\|,$$

das heißt $f \in \mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$.
Als nächstes gelte $\mu(\mathrm{M}) = \infty$, und μ sei σ-finit. Die A_n lassen sich dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit so wählen, daß $\mathrm{A}_i \subset \mathrm{A}_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i < j$. Auf jedem A_n induziert μ ein Maß $\mu_{\mathrm{A}_n} = \mu \restriction \mathfrak{S} \cap \mathfrak{P}(\mathrm{A}_n)$. Wieder sei $\mathcal{T}$ ein beliebiges stetiges lineares Funktional auf $\mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$. Wie soeben gezeigt gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine eindeutig bestimmte Funktion $f_n \in \mathscr{L}^p(\mathrm{A}_n, \mu_{\mathrm{A}_n})$, sodaß

$$\mathcal{T} g = \int\limits_{\mathrm{A}_n} f_n\, g\, d\mu_{\mathrm{A}_n} \tag{2.37}$$

mit $\|f_n\|_p \leqq \|\mathcal{T}\|$ für alle $g \in \mathscr{L}^q(\mathrm{A}_n, \mu_{\mathrm{A}_n})$. Da die A_n eine aufsteigende Inklusionskette bilden, ist für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i < j$ jeweils $f_i(x) = f_j(x)$ fast überall auf A_i, und folglich existiert die Grenzfunktion $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ fast überall auf M. Nach Satz 1.22 gilt damit

$$\|f\|_p^p = \int\limits_M |f|\, d\mu = \int\limits_M \liminf_{n\to\infty} |f_n|\, d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_M |f_n|\, d\mu \leqq \|\mathcal{T}\|^p,$$

das heißt $f \in \mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$. Zusammen mit (2.37) garantiert dann die Stetigkeit von $\mathcal{T}$, daß

$$\mathcal{T} g = \int\limits_M f g\, d\mu$$

gilt für alle $g \in \mathscr{L}^q(\mathrm{M}, \mu)$.
Schließlich sei $\mu(\mathrm{M}) = \infty$ und μ nicht σ-finit. $\mathfrak{A}$ sei die Menge aller Teilmengen von M, die abzählbare Vereinigungen aus Mengen von endlichem Maß sind. Erneut sei $\mathcal{T}$ ein beliebiges stetiges lineares Funktional auf $\mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$. Wie soeben gezeigt gibt es zu jedem $\mathrm{A} \in \mathfrak{A}$ eine eindeutig bestimmte Funktion $f_{\mathrm{A}} \in \mathscr{L}^p(\mathrm{A}, \mu_{\mathrm{A}})$, sodaß

$$\mathcal{T} g = \int\limits_{\mathrm{A}} f_{\mathrm{A}}\, g\, d\mu_{\mathrm{A}}$$

mit $\|f_{\mathsf{A}}\|_p \leqq \|\mathfrak{T}\|$ für alle $g \in \mathscr{L}^p(\mathsf{A}, \mu_{\mathsf{A}})$; hierbei ist $\mu_{\mathsf{A}} = \mu \upharpoonright \mathfrak{S} \cap \mathfrak{P}(\mathsf{A})$. Damit gilt $\sup\{ \|f_{\mathsf{A}}\|_p \mid \mathsf{A} \in \mathfrak{A} \} \leqq \|\mathfrak{T}\|$. Nun wählen wir eine transfinite Folge $(\mathsf{A}_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ aus $\mathfrak{A}$ mit $\mathsf{A}_\rho \subset \mathsf{A}_\tau$ für alle $\rho, \tau < \Gamma$ mit $\rho < \tau$ und

$$\lim_{\gamma\to\Gamma} | \, \|f_{\mathsf{A}_\gamma}\|_p - \|\mathfrak{T}\| \, | = 0,$$

sodaß $\mathsf{M} = \bigcup\limits_{\gamma<\Gamma} \mathsf{A}_\gamma$. Wieder gilt für alle $\rho, \tau < \Gamma$ mit $\rho < \tau$ jeweils $f_{\mathsf{A}_\rho}(x) = f_{\mathsf{A}_\tau}(x)$ fast überall auf A_ρ. Damit erhalten wir eine eindeutig bestimmte Funktion $f = \lim\limits_{\gamma\to\Gamma} f_\gamma$ mit

$$\mathfrak{T}\, g = \int_{\mathsf{M}} f g \, d\mu$$

für alle $g \in \mathscr{L}^q(\mathsf{X}, \mu)$. Hierbei gilt mit der transfiniten Fassung von Satz 1.22

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathsf{M}} |f|^p \, d\mu = \int_{\mathsf{M}} \liminf_{\gamma<\Gamma} |f_\gamma|^p \, d\mu \leqq \liminf_{\gamma<\Gamma} \int_{\mathsf{M}} |f_\gamma|^p \, d\mu = \liminf_{\gamma<\Gamma} \|f_\gamma\|_p^p = \|\mathfrak{T}\|_p^p,$$

und damit ist $f \in \mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)$.
In allen drei Fällen ist somit $\mathfrak{T}$ surjektiv. □

Anders formuliert lautet die Aussage von Satz 2.92: Für $0 < p, q < \infty$ mit $1/p+1/q = 1$ gibt es zu jedem $\mathfrak{T} \in \mathscr{L}^q(\mathsf{M}, \mu)'$ ein eindeutig bestimmtes $f \in \mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)$, sodaß $\mathfrak{T}g = \int_{\mathsf{M}} f g \, d\mu$ gilt für alle $g \in \mathscr{L}^q(\mathsf{M}, \mu)$. Das heißt, die Wirkung eines jeden stetigen linearen Funktionals auf $\mathscr{L}^q(\mathsf{M}, \mu)$ läßt sich mit Hilfe eines eindeutig bestimmten Elements von $\mathscr{L}^q(\mathsf{M}, \mu)$ in Form eines Integrals schreiben[117]. – Der spezielle Fall $p = q = 2$ wird uns ab dem nächsten Abschnitt so ausgiebig beschäftigen, daß es sich dort lohnt, den Rieszschen Darstellungssatz für diese Situation gesondert zu formulieren.

Der soeben beschriebene Beweis beruht wesentlich auf der Einschränkung $1 < p < \infty$. Werden speziellere Anforderungen an den betrachteten Maßraum gestellt, dann läßt sich der Rieszsche Darstellungssatz auf den Fall $p = \infty$, $q = 1$ ausweiten.

2.93 Satz:[118] M *sei ein lokalkompakter, σ-kompakter topologischer Raum und μ ein Maß auf* M. *Dann ist die Abbildung $\mathfrak{T} : \mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu) \longrightarrow \mathscr{L}^1(\mathsf{M}, \mu)'$ mit*

$$\mathfrak{T}(f)g = \int_{\mathsf{M}} f g \, d\mu$$

ein isometrischer Isomorphismus.

---

[117]Für $\mathscr{L}^p$-Räume Banachraum-wertiger Funktionen sind für $1 < p, q < \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ jeweils $\mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E}')$ und $\mathscr{L}^q(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})'$ ebenfalls zueinander isometrisch isomorph. Genaueres dazu findet man in [70].

[118]Dieses Resultat stammt von Steinhaus [352].

Beweis: Wieder ist die Linearität von $\mathcal{T}$ klar, und zu zeigen bleibt dessen Isometrie und Isomorphie.

1. Nach Ungleichung 2.80 gilt

$$|\mathcal{T}(f)g| = \left| \int_{\mathsf{M}} f g \, d\mu \right| \leqq \int_{\mathsf{M}} |f g| \, d\mu = \|f g\|_1 \leqq \|f\|_\infty \, \|g\|_1$$

für alle $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu)$ und alle $g \in \mathscr{L}^1(\mathsf{M}, \mu)$, folglich ist $\|\mathcal{T}(f)\| \leqq \|f\|_\infty$, und somit ist $\mathcal{T}(f) \in \mathscr{L}^1(\mathsf{M}, \mu)'$ für alle $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu)$.
Nun sei $(\mathsf{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von M mit $\mathsf{A}_n = \{ x \in \mathsf{M} \mid |f(x)| \geqq \|\mathcal{T}\| + 1/n \}$. Alle A_n sind offensichtlich Nullmengen, daher ist

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathsf{A}_n \right) = \mu(\{ x \in \mathsf{M} \mid |f(x)| \geqq \|\mathcal{T}\| \}) = 0,$$

und es folgt $\|\mathcal{T}(f)\| \geqq \|f\|_\infty$. Damit gilt $\|\mathcal{T}(f)\| = \|f\|_\infty$, und $\mathcal{T}$ ist eine Isometrie.

2. läuft völlig analog zum entsprechenden Teil des Beweises von Satz 2.92, das heißt, $\mathcal{T}$ ist injektiv.

3. $\mathcal{T}$ sei ein beliebiges lineares stetiges Funktional auf $\mathscr{L}^1(\mathsf{M}, \mu)$.
Zunächst sei wieder $\mu(\mathsf{M}) < \infty$. Dann ist nach Satz 2.83 $\mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu) \subset \mathscr{L}^1(\mathsf{M}, \mu)$ für alle $p > 1$, und der Beweis von Satz 2.83 liefert zusätzlich

$$\|g\|_1 \leqq \|g\|_p \, \mu(\mathsf{M}).$$

Es folgt

$$|\mathcal{T}g| \leqq \|\mathcal{T}\| \, \|g\|_1 \leqq \|\mathcal{T}\| \, \|g\|_p \, \mu(\mathsf{M})$$

für alle $g \in \mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)$, und daraus wiederum $\mathcal{T} \in \mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)'$. Nach Satz 2.92 gibt es daher für alle $p > 1$ ein eindeutig bestimmtes $f_q \in \mathscr{L}^q(\mathsf{M}, \mu)$ mit $q = p/(p-1)$, sodaß

$$\mathcal{T}g = \int_{\mathsf{M}} f_q \, g \, d\mu$$

und $\|\mathcal{T}\| = \|f\|_q$ für alle $g \in \mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)$. Für beliebige $r, s > 1$ mit $r < s$ seien $f_r \in \mathscr{L}^r(\mathsf{M}, \mu)$ und $f_s \in \mathscr{L}^s(\mathsf{M}, \mu)$ jeweils diese Funktionen; es folgt

$$\mathcal{T}g = \int_{\mathsf{M}} f_r \, g \, d\mu = \int_{\mathsf{M}} f_s \, g \, d\mu$$

für alle $g \in \mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)$ mit $p > 1$, also auch für $h = \overline{(\, f_r - f_s \,)} \in \mathscr{L}^s(\mathsf{M}, \mu)$. Das wiederum liefert

$$\int_{\mathsf{M}} (\, f_r - f_s \,) \, h \, d\mu = \int_{\mathsf{M}} (\, f_r - f_s \,) \, \overline{(\, f_r - f_s \,)} \, d\mu = \int_{\mathsf{M}} |\, f_r - f_s \,|^2 \, d\mu = 0,$$

folglich gilt $f_r(x) = f_s(x)$ fast überall auf M. Das Funktional läßt sich daher für alle $p > 1$ durch dieselbe Funktion f darstellen; für diese gilt $f \in \mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)$ für alle $p > 1$, also

$f \in \bigcap\limits_{p>1} \mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)$, und nach Corollar 2.85 somit $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu)$. Also ist $\mathcal{T}$ surjektiv.

Nun sei $\mu(\mathsf{M}) = \infty$. Nach Vorraussetzung Ist M darstellbar als $\mathsf{M} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathsf{A}_n$ mit paarweise disjunkten Mengen A_n, für die $\mu(\mathsf{A}_n) < \infty$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $\mathfrak{S}$ die σ-Algebra, auf der μ definiert ist, dann sei wieder jeweils $\mu_n = \mu \restriction \mathfrak{P}(\mathsf{A}_n) \cap \mathfrak{S}$, und wie soeben gezeigt gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine eindeutig bestimmte Funktion $f_n \in \mathscr{L}^\infty(\mathsf{A}_n, \mu_n)$, sodaß

$$\mathcal{T} g = \int\limits_{\mathsf{A}_n} f_n \, g \, d\mu_n$$

und $\|\mathcal{T}\| = \|f_n\|_\infty$ gilt für alle $g \in \mathscr{L}^1(\mathsf{A}_n, \mu_n)$. Wir definieren $f(x) = f_n(x)$ für $x \in \mathsf{A}_n$ und alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu)$ mit $\|f\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ und

$$\mathcal{T} g = \int\limits_{\mathsf{M}} f g \, d\mu$$

mit $\|\mathcal{T}\| = \|f\|_\infty$ für alle $g \in \mathscr{L}^1(\mathsf{M}, \mu)$. Folglich ist $\mathcal{T}$ surjektiv. □

Obiges Resultat besagt anders ausgedrückt, daß es auf lokalkompakten, σ-kompakten Maßräumen zu jedem $\varphi \in \mathscr{L}^1(\mathsf{M}, \mu)'$ eine eindeutig bestimmte Funktion $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu)$ gibt mit $\varphi g = \int\limits_{\mathsf{M}} f g \, d\mu$ für alle $g \in \mathscr{L}^1(\mathsf{M}, \mu)$. Der umgekehrte Fall trifft nicht zu; $\mathscr{L}^1(\mathsf{M}, \mu)$ und $\mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu)'$ sind *nicht isometrisch isomorph*. Zwar induziert jedes Element f von $\mathscr{L}^1(\mathsf{M}, \mu)$ ein Funktional $\varphi \in \mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu)'$, wieder vermöge der Abbildung $\mathcal{T}$ mit $\mathcal{T}(f)g = \int\limits_{\mathsf{M}} f g \, d\mu$, diese ist hier jedoch nicht surjektiv. Denn Satz 2.55 garantiert die Existenz von Funktionalen aus der Menge $\mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu)' \setminus \mathcal{T}\mathscr{L}^1(\mathsf{M}, \mu)$. Das sieht man etwa an folgendem Beispiel. $(\mathsf{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ sei ein Maßraum und $x \in \mathsf{M}$. Dazu sei das Funktional $\delta_x : C_c(\mathsf{M}) \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\delta_x(g) = g(x)$. Offensichtlich gilt $|\delta_x(g)| \leqq \|g\|_\infty$, also ist $\|\delta_x\| = 1$ und folglich $\delta_x \in (C_c(\mathsf{M}), \| \ \|_\infty)'$. Außerdem ist $C_c(\mathsf{M})$ ein Unterraum von $\mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu)$, und nach Satz 2.55 gibt es dann eine Fortsetzung Δ_x auf $\mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu)$ mit $\Delta_x(g) = g(x)$ für alle $g \in \mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu)$ sowie $\|\Delta_x\| = 1$. Angenommen, es gäbe ein $f \in \mathscr{L}^1(\mathsf{M}, \mu)$ mit

$$\Delta_x(g) = \int\limits_{\mathsf{M}} f g \, d\mu \tag{2.38}$$

für alle $g \in \mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu)$, dann führt die Anwendung dieser Vorschrift auf den Grenzwert g der Funktionenfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $g_n = \chi_{\{x \in \mathsf{M} \mid \|x\| < 1/n\}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ unter Verwendung von Satz 1.21 auf

$$|\Delta_x(g)| = \left| \int\limits_{\mathsf{M}} f \lim_{n \to \infty} g_n \, d\mu \right| = \left| \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\mathsf{M}} f g_n \, d\mu \right| = \left| \int\limits_{\{0\}} f \, d\mu \right| = 0.$$

Aufgrund von $\|g\|_\infty = 1$ gilt jedoch nach Konstruktion $|\Delta_x(g)| = 1$ – ein Widerspruch. Daher kann es für Δ_x keine Darstellung der Form (2.38) geben. Das Funktional Δ_x heißt *Diracsche*

Delta-Distribution und ist in der Quantenmechanik von großer Bedeutung. Wir kommen in Band 2 darauf zurück und sehen dann, wie man dort trickreich und dem soeben beschriebenen Sachverhalt zum Trotz dennoch Integraldarstellungen solcher und anderer, damit verwandter Funktionale bastelt, wobei man allerdings über die Betrachtung von $\mathscr{L}^p$-Räumen und sogar über diejenige gewöhnlicher Funktionen hinausgeht.

Die Sätze 2.92 und 2.93 gestatten es unter den jeweils genannten Voraussetzungen, für $1 \leqq p < \infty$ und $q = p/(p-1)$ den Dualraum $\mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)'$ elementweise mit dem Raum $\mathscr{L}^q(\mathsf{M}, \mu)$ zu identifizieren[119]. Entsprechend lassen sich für $1 < p < \infty$ der Bidualraum $\mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)''$ und der Raum $\mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)$ elementweise identifizieren vermöge der Einbettungsabbildung ι, die sich durch zweimaliges Anwenden der oben beschriebenen Abbildung $\mathcal{T}$ ergibt. ι ist folglich ein isometrischer Isomorphismus der Form (2.25), und man erhält das folgende

2.94 Corollar: $(\mathsf{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ *sei ein Maßraum. Dann gilt:*

(i) Für $1 < p < \infty$ *ist* $\mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)$ *reflexiv* [120].

(ii) $\mathscr{L}^1(\mathsf{M}, \mu)$ *und* $\mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu)$ *sind nicht reflexiv* [121].

Damit bleiben zwei Fragen offen, erstens diejenige nach dem Dualraum von $\mathscr{L}^\infty$ und zweitens die Frage, wovon $\mathscr{L}^1$ der Dualraum ist. Hier ist die Situation komplizierter als in den oben betrachteten Fällen, und es zeigt sich wie oben für einen der beiden Fälle bereits angedeutet, daß man dabei jeweils den Rahmen der $\mathscr{L}^p$-Räume verläßt. Wir beginnen mit der ersten der beiden Fragen und einer

2.95 Definition: Es seien M eine beliebige Menge und $\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra auf M.

(i) $\mathfrak{ba}(\mathsf{M}, \mathfrak{S})$ sei der Raum der beschränkten additiven komplexen Funktionen auf $\mathfrak{S}$ [122].

(ii) Zu einem positiven Maß μ auf M sei $\mathfrak{ba}(\mathsf{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ der Raum der beschränkten additiven komplexen Funktionen auf $\mathfrak{S}$, die absolut stetig sind bezüglich μ.

Ist $\mathscr{Z}(\mathsf{M})$ die Menge aller disjunkter Zerlegungen von M aus Mengen von $\mathfrak{S}$, dann erhält man auf $\mathfrak{ba}(\mathsf{M}, \mathfrak{S})$ und $\mathfrak{ba}(\mathsf{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ mit

$$\|\nu\|_v := v(\nu, \mathsf{M}) = \sup \left\{ \sum_{\mathsf{A} \in \mathfrak{Z}} \|\nu(\mathsf{A})\| \;\middle|\; \mathfrak{Z} \in \mathscr{Z}(\mathsf{M}) \right\}$$

jeweils eine Norm[123]. Nach Konstruktion folgt für alle $\nu \in \mathfrak{ba}(\mathsf{M}, \mathfrak{S})$ und alle $\mathsf{A} \in \mathfrak{S}$

$$|\nu(\mathsf{A})| \leqq \|\nu\|_v.$$

[119] Für $0 < p < 1$ ist das natürlich nicht der Fall, da hier wie erwähnt $\mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)' = \{0\}$ gilt.

[120] Für Banachraum-wertige $\mathscr{L}^p$-Funktionen ist $\mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ nur dann reflexiv, wenn auch $\mathcal{E}$ reflexiv ist.

[121] Das bleibt auch für $\mathscr{L}^1(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ und $\mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ richtig.

[122] Die Abkürzung $\mathfrak{ba}$ steht hier für „bounded additive“. Entsprechend nennt man denjenigen Unterraum von $\mathfrak{ba}(\mathsf{M}, \mathfrak{S})$, der die σ-additiven komplexen Maße auf M enthält, $\mathfrak{ca}(\mathsf{M}, \mathfrak{S})$; hierbei bedeutet $\mathfrak{ca}$ „countably additive“. Funktionen, die auf Teilmengen der Potenzmenge einer Menge definiert sind, nennt man naheliegenderweise auch *Mengenfunktionen*.

[123] Zur Definition von v siehe auch Abschnitt 1.2.1.

Damit gilt der folgende

2.96 Satz: *(i) Für jede Menge* M *und jede σ-Algebra* $\mathfrak{S}$ *auf* M *ist* $\mathfrak{ba}(\mathrm{M}, \mathfrak{S})$ *mit der Norm* $\| \ \|_v$ *ein Banachraum.*

(ii) Für jedes positive Maß μ *auf* M *ist* $\mathfrak{ba}(\mathrm{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ *ein abgeschlossener Unterraum von* $\mathfrak{ba}(\mathrm{M}, \mathfrak{S})$*, also mit* $\| \ \|_v$ *ebenfalls ein Banachraum.*

Beweis: (i) $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Cauchy-Folge in $\mathfrak{ba}(\mathrm{M}, \mathfrak{S})$, das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$ gebe es ein $N \in \mathbb{N}$, sodaß $\| \nu_m - \nu_n \|_v < \varepsilon$ gilt für alle $m, n \geqq N$. Dann gilt auch $| \nu_m(\mathrm{A}) - \nu_n(\mathrm{A}) | < \varepsilon$ für alle $\mathrm{A} \in \mathfrak{S}$, das heißt, die Folge $(\nu_n(\mathrm{A}))_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent für alle $\mathrm{A} \in \mathfrak{S}$. Setzt man $\lim_{n \to \infty} \nu_n(\mathrm{A}) = \nu(\mathrm{A})$, dann ist ν eine beschränkte Mengenfunktion; wegen der Vertauschbarkeit des Limes mit endlichen Summen gilt außerdem für disjunkte Mengen $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{S}$

$$\nu(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \lim_{n \to \infty} \nu_n(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \lim_{n \to \infty} \nu_n(\mathrm{A}) + \lim_{n \to \infty} \nu_n(\mathrm{B}) = \nu(\mathrm{A}) + \nu(\mathrm{B}),$$

das heißt, ν ist auch eine additive Mengenfunktion auf $\mathfrak{S}$. Schließlich gilt wegen $| \nu_m(\mathrm{A}) - \nu(\mathrm{A}) | \leqq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\mathrm{A} \in \mathfrak{S}$

$$\lim_{m \to \infty} \| \nu_m - \nu \|_v \leqq \lim_{m \to \infty} \liminf_{n \to \infty} \| \nu_m - \nu_n \| = 0$$

und damit $\lim_{m \to \infty} \nu_m = \nu \in \mathfrak{ba}(\mathrm{M}, \mathfrak{S})$.

(ii) Nun sei $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathfrak{ba}(\mathrm{M}, \mathfrak{S})$; wie in (i) gezeigt gibt es dann ein $\nu \in \mathfrak{ba}(\mathrm{M}, \mathfrak{S})$ mit $\nu = \lim_{n \to \infty} \nu_n$. Für alle $\mathrm{A} \in \mathfrak{S}$ mit $\mu(\mathrm{A}) = 0$ folgt dann nach Voraussetzung

$$\nu(\mathrm{A}) = \lim_{n \to \infty} \nu_n(\mathrm{A}) = 0,$$

das heißt, es gilt $\nu \in \mathfrak{ba}(\mathrm{M}, \mathfrak{S}, \mu)$. □

Nach diesen Vorbetrachtungen läßt sich nun die genaue Gestalt von $\mathscr{L}^\infty(\mathrm{M}, \mu)'$ ermitteln.

2.97 Satz:[124] *Ist* $(\mathrm{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ *ein Maßraum und* μ *ein positives Maß, dann ist die Abbildung* $\mathcal{T} : \mathfrak{ba}(\mathrm{M}, \mathfrak{S}, \mu) \longrightarrow \mathscr{L}^\infty(\mathrm{M}, \mu)'$ *mit*

$$\mathcal{T}(\eta)\, f = \int_{\mathrm{M}} f \, d\eta$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis: Wegen $\mathscr{L}^\infty(\mathrm{M}, \mu) = \mathscr{L}^\infty(\mathrm{M}, v(\mu))$ kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß μ ein positives Maß ist. Der Beweis erfolgt in vier Schritten.

1. Wir zeigen zunächst, daß $\mathcal{T}(\eta) \in \mathscr{L}^\infty(\mathrm{M}, \mu)'$ für alle $\eta \in \mathfrak{ba}(\mathrm{M}, \mathfrak{S}, \mu)$. Ist $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathrm{M}, \mu)$, dann ist f μ-meßbar und insbesondere $f(\mathrm{M})$ beschränkt, und folglich ist

$$\overline{f(\mathrm{M})} \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{A}_n,$$

[124] Dieses Resultat wurde unabhängig voneinander von Hildebrandt [157] sowie von Fichtenholz und Kantorovitsch [100] entdeckt. Vergleiche auch [78].

wobei die A_j paarweise disjunkte Elemente von $\mathfrak{S}$ sind und so gewählt werden können, daß $\mu(A_j) < \delta$ gilt für $j = 1, 2, \ldots, n$ und vorgegebenem $\delta > 0$. Dann sind die Mengen $X_j = f^{-1}(A_j)$ jeweils μ-meßbar. Wählt man für $j = 1, 2, \ldots, n$ je ein $a_j \in A_j$ und setzt

$$\varphi_\delta = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{X_j},$$

dann sind alle φ_δ μ-meßbare einfache Funktionen, und es folgt $|\, f(x) - \varphi_\delta(x)\,| < \delta$ für alle $x \in M$. Da jedes $\eta \in \mathfrak{ba}(M, \mathfrak{S}, \mu)$ absolut stetig bezüglich μ ist, gibt es für jedes solche η zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodaß aus $|\mu(A)| < \delta$ stets $|\eta(A)| < \varepsilon$ folgt für alle $A \in \mathfrak{S}$. Damit sind alle φ_δ auch η-meßbar, es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodaß $|\, f(x) - \varphi_\delta(x)\,| < \varepsilon$ gilt, und folglich ist f η-meßbar. f ist wesentlich beschränkt bezüglich μ, also auch bezüglich η, und damit ist f η-integrierbar.

Nun seien $A_1, A_2, \ldots, A_m$ disjunkte Teilmengen von M und $\varphi = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}$ eine einfache Funktion auf M; außerdem sei $\xi : \mathfrak{S} \longrightarrow [0, 1]$ definiert durch

$$\xi(E) = \int\limits_E \varphi \, d\eta = \sum_{j=1}^{m} a_j \, \eta(E \cap A_j).$$

Ist $X \subseteqq E$ und $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ eine disjunkte Zerlegung von X, dann folgt mit Hilfe der Additivität von η

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\xi(X_i)| &= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{m} a_j \, \eta(X_i \cap A_j) \right| \\
&\leqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_j \, \eta(X_i \cap A_j)| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_j| \, v(\eta, (X_i \cap A_j)) = \sum_{j=1}^{m} |a_j| \, v(\eta, (X \cap A_j)) \\
&\leqq \sum_{j=1}^{m} |a_j| \, v(\eta, E \cap A_j)) = \int\limits_E |\varphi| \, dv(\eta),
\end{aligned}$$

also aufgrund der Definition von v

$$v(\xi, E) \leqq \int\limits_E |\varphi| \, dv(\eta). \tag{2.39}$$

Ist umgekehrt $\varepsilon > 0$ und $(A_{j,1}, A_{j,2}, \ldots, A_{j,n_j})$ eine disjunkte Zerlegung von A_j, sodaß

$$\sum_{q=1}^{n_j} |\eta(E \cap A_{j,q})| > v(\eta, E \cap A_j) - \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{j=1}^{m} |a_j|},$$

dann gilt

$$|\,\xi(\mathsf{E}\cap\mathsf{A}_{j,q})| = |a_j|\,|\eta(\mathsf{E}\cap\mathsf{A}_{j,q})|$$

sowie

$$\begin{aligned} v(\xi,\mathsf{E}) &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{q=1}^{n_j}|\xi(\mathsf{E}\cap\mathsf{A}_{j,q})| = \sum_{j=1}^{m}\sum_{q=1}^{n_j}|a_j\,\eta(\mathsf{E}\cap\mathsf{A}_{j,q})| \\ &> \sum_{j=1}^{m}|a_j|\,v(\eta,\mathsf{E}\cap\mathsf{A}_j)-\varepsilon = \int_{\mathsf{E}}|\varphi|\,dv(\eta)-\varepsilon, \end{aligned}$$

woraus

$$v(\xi,\mathsf{E}) \geqq \int_{\mathsf{E}}|\varphi|\,dv(\eta) \tag{2.40}$$

folgt. (2.39) und (2.40) liefern zusammen

$$v(\xi,\mathsf{E}) = \int_{\mathsf{E}}|\varphi|\,dv(\eta), \tag{2.41}$$

und da $\varphi\in\mathscr{E}(\mathsf{M})$ beliebig gewählt werden kann, ist das für alle einfache Funktionen auf M der Fall. Außerdem gilt

$$\left|\int_{\mathsf{E}}\varphi\,d\eta\right| \leqq \sum_{j=1}^{m}|a_j|\,|\eta(\mathsf{E}\cap\mathsf{A}_j)| \leqq \sup_{1\leqq j\leqq m}|a_j|\;v(\eta,\mathsf{E})$$

und wegen $\sup\limits_{1\leqq j\leqq m}|a_j|\leqq 1$ damit

$$\left|\int_{\mathsf{E}}\varphi\,d\eta\right| \leqq \int_{\mathsf{E}}|\varphi|\,dv(\eta). \tag{2.42}$$

Als nächstes seien $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen, $((\mathsf{A}_{n,1},\mathsf{A}_{n,2},\ldots,\mathsf{A}_{n,r_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Familien disjunkter Mengen aus $\mathfrak{S}$ und

$$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{j=1}^{r_n}a_{n,j}\,\chi_{\mathsf{A}_{n,j}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine Folge meßbarer einfacher Funktionen auf M, sodaß $\lim\limits_{n\to\infty}|\,f(x)-\varphi_n(x)\,| = 0$ gilt. Da eine Funktion genau dann η-integrierbar ist, wenn sie $v(\eta)$-integrierbar ist, gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $N\in\mathbb{N}$, sodaß

$$\int_{\mathsf{E}}|\,f-\varphi_n\,|\,dv(\eta) < \varepsilon \tag{2.43}$$

für alle $n>N$. Weiter seien die Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ additiver Mengenfunktionen auf $\mathfrak{S}$ definiert durch

$$\xi_n(\mathsf{E}) = \int_{\mathsf{E}}\varphi_n\,d\eta$$

sowie für alle $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu)$ die Mengenfunktion γ_f durch

$$\gamma_f(\mathsf{E}) = \int_{\mathsf{E}} f \, d\eta$$

für $\mathsf{E} \in \mathfrak{S}$. Ist dann $(\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2, \ldots, \mathsf{E}_m)$ eine beliebige disjunkte Zerlegung der Menge E, so gilt mit (2.43)

$$\left| \sum_{j=1}^{m} |\gamma_f(\mathsf{E}_j)| - \sum_{j=1}^{m} |\xi_n(\mathsf{E}_j)| \right| \leqq \sum_{j=1}^{m} |\, \gamma_f(\mathsf{E}_j) - \xi_n(\mathsf{E}_j) \,| = \sum_{j=1}^{m} \left| \int_{\mathsf{E}_j} (f - \varphi_n) \, d\eta \right|$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathsf{E}_j} |\, f - \varphi_n \,| \, d\eta = \int_{\mathsf{E}} |\, f - \varphi_n \,| \, dv(\eta) < \varepsilon.$$

Gemäß der Definition von v gibt es außerdem zu $\varepsilon > 0$ eine disjunkte Zerlegung $(\mathsf{E}_{\xi,1}, \mathsf{E}_{\xi,2}, \ldots, \mathsf{E}_{\xi,p})$ von E mit

$$v(\xi_n, \mathsf{E}) - \sum_{i=1}^{p} \left| \int_{\mathsf{E}_{\xi,i}} \varphi_n \, d\eta \right| \leqq v(\xi_n, \mathsf{E}) - \sum_{i=1}^{p} \int_{\mathsf{E}_{\xi,i}} |\varphi_n| \, d\eta$$

$$\leqq v(\xi_n, \mathsf{E}) - \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r_n} |\, \xi_n(\mathsf{E}_{\xi,i} \cap \mathsf{A}_{n,j}) \,| < \varepsilon$$

und analog eine disjunkte Zerlegung $(\mathsf{E}_{\gamma_f,1}, \mathsf{E}_{\gamma_f,2}, \ldots, \mathsf{E}_{\gamma_f,q})$ von E mit

$$v(\gamma_f, \mathsf{E}) - \sum_{i=1}^{q} \left| \int_{\mathsf{E}_{\gamma_{f,i}}} f \, d\eta \right| < \varepsilon.$$

Für die disjunkte Zerlegung $(\, \mathsf{A}_{i,j} = \mathsf{E}_{\xi,i} \cap \mathsf{E}_{\gamma_{f,j}} \mid 1 \leqq i \leqq p,\ 1 \leqq j \leqq q \,)$ von E folgt damit

$$v(\xi_n, \mathsf{E}) < \varepsilon + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \left| \int_{\mathsf{A}_{i,j}} \varphi_n \, d\eta \right|$$

und

$$v(\gamma_f, \mathsf{E}) < \varepsilon + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \left| \int_{\mathsf{A}_{i,j}} f \, d\eta \right|,$$

also

$$|\, v(\gamma_f, \mathsf{E}) - v(\xi_n, \mathsf{E}) \,| < \left| \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \left| \int_{\mathsf{A}_{i,j}} \varphi_n \, d\eta \right| - \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \left| \int_{\mathsf{A}_{i,j}} f \, d\eta \right| \right|$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \int_{\mathsf{A}_{i,j}} |\, f - \varphi_n \,| \, d\eta = \int_{\mathsf{E}} |\, f - \varphi_n \,| \, d\eta,$$

und da f η-integrierbar ist, gibt es folglich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodaß $|\, v(\gamma_f, \mathrm{E}) - v(\xi_n, \mathrm{E}) \,| < \varepsilon$ für alle $n > N$. Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} v(\xi_n, \mathrm{E}) = v(\gamma_f, \mathrm{E})$ für alle $\mathrm{E} \in \mathfrak{S}$. Mit (2.41) gilt daher

$$v(\gamma_f, \mathrm{E}) = \int_{\mathrm{E}} |f| \, dv(\eta)$$

und mit (2.42)

$$\left| \int_{\mathrm{E}} f \, d\eta \right| \leqq \int_{\mathrm{E}} |f| \, dv(\eta) \leqq \|f\|_\infty \, \|\eta\|$$

für alle $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathrm{M}, \mu)$. Folglich gilt

$$|\, \mathcal{T}(\eta)\, f \,| = \left| \int_{\mathrm{M}} f \, d\eta \right| \leqq \|f\|_\infty \, \|\eta\|,$$

und damit $\|\mathcal{T}(\eta)\| \leqq \|\eta\|$ für alle $\eta \in \mathfrak{ba}(\mathrm{M}, \mathfrak{S}, \mu)$.

2. Als nächstes zeigen wir die Isometrie von $\mathcal{T}$. Hierzu sei $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathrm{M}, \mu)$ mit $\|f\|_\infty = 1$ und $\eta \in \mathfrak{ba}(\mathrm{M}, \mathfrak{S}, \mu)$; dafür gilt

$$|\, \mathcal{T}(\eta)\, f \,| \leqq \|\eta\|. \tag{2.44}$$

Nun sei $\varepsilon > 0$ und $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n)$ eine Familie disjunkter Mengen aus $\mathfrak{S}$, sodaß

$$\sum_{j=1}^{n} |\eta(\mathrm{A}_j)| > \|\eta\| - \varepsilon.$$

Außerdem sei $\varphi = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \, \chi_{\mathrm{A}_j}$ mit $a_j = \overline{\eta(\mathrm{A}_j)} \,/\, |\eta(\mathrm{A}_j)|$ für $j = 1, 2, \ldots, n$. Es folgt $\varphi \in \mathscr{L}^\infty(\mathrm{M}, \mu)$ und $\|\varphi\|_\infty = 1$, also gilt

$$\|\mathcal{T}\| \geqq |\, \mathcal{T}(\eta)\, \varphi \,| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \, \eta(\mathrm{A}_j) \right| = \sum_{j=1}^{n} |\eta(\mathrm{A}_j)| > \|\eta\| - \varepsilon. \tag{2.45}$$

(2.44) und (2.45) liefern gemeinsam $\|\mathcal{T}\| = \|\eta\|$.

3. Zum Nachweis der Injektivität von $\mathcal{T}$ sei $\tilde{\eta}$ ein weiteres Element von $\mathfrak{ba}(\mathrm{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ mit

$$\mathcal{T}(\tilde{\eta})\, f = \int_{\mathrm{M}} f \, d\eta,$$

dann ist für alle $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathrm{M}, \mu)$

$$\int_{\mathrm{M}} f \, d\tilde{\eta} = \int_{\mathrm{M}} f \, d\eta,$$

und damit ist $\tilde{\eta} = \eta$.

4. Abschließend weisen wir nach, daß $\mathfrak{T}$ surjektiv ist. Dazu seien $\phi \in \mathscr{L}^\infty(\mathsf{M},\mu)'$ und $\mathsf{A} \in \mathfrak{S}$ beliebig gewählt. Wir setzen $\eta(\mathsf{A}) = \phi(\chi_\mathsf{A})$ und erhalten mit $(\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n)$ und φ_δ von oben $|\, f(x) - \varphi_\delta(x)\,| < \delta$ für alle $x \in \mathsf{M}$ sowie aufgrund der Linearität von ϕ

$$\phi(\varphi_\delta) = \sum_{j=1}^{m} a_j\, \phi(\chi_{\mathsf{A}_j}) = \sum_{j=1}^{m} a_j\, \eta(\mathsf{A}_j) = \int_\mathsf{M} \varphi_\delta \, d\eta.$$

Der Grenzübergang $\delta \longrightarrow 0$ führt auf

$$\phi(f) = \int_\mathsf{M} f \, d\eta,$$

und damit ist $\mathfrak{T}(\eta) = \phi$. □

Satz 2.97 besagt, daß es zu jedem Funktional $\phi \in \mathscr{L}^\infty(\mathsf{M},\mu)'$ eine eindeutig bestimmte Funktion $\eta \in \mathfrak{ba}(\mathsf{M},\mathfrak{S},\mu)$ gibt, sodaß die Wirkung von ϕ in der Form

$$\phi(f) = \int_\mathsf{M} f \, d\eta$$

geschrieben werden kann. Damit können die Räume $\mathscr{L}^\infty(\mathsf{M},\mu)'$ und $\mathfrak{ba}(\mathsf{M},\mathfrak{S},\mu)$ elementweise identifiziert werden. Dabei ist $|\mathfrak{ba}(\mathsf{M},\mathfrak{S},\mu)|$ im allgemeinen sehr viel größer als $|\mathscr{L}^\infty(\mathsf{M},\mu)|$ und auch als $|\mathscr{L}^1(\mathsf{M},\mu)|$.

Wir kommen nun zur zweiten der beiden oben genannten Fragen. Hier läßt sich keine einheitliche Antwort geben, ganz im Gegenteil gibt es eine ganze Klasse von Banachräumen mit der dabei betrachteten Eigenschaft, wofür sich sogar ein eigener Name etabliert hat. Ein Banachraum $\mathcal{E}$, für den es einen Maßraum $(\mathsf{M},\mathfrak{S},\mu)$ sowie einen isometrischen Isomorphismus $\mathfrak{T}$ von $\mathscr{L}^1(\mathsf{M},\mu)$ nach $\mathcal{E}'$ gibt, heißt *Lindenstrauss-Raum*[125]. Es gibt unterschiedliche Charakterisierungen für Lindenstrauss-Räume[126]; eine davon betrachten wir exemplarisch [73][127], wobei wir für Details und den Beweis auf die Originalliteratur verweisen. Eine beschränkte Teilmenge A des komplexen Banachraums $\mathcal{E}$ heißt *zentrierbar*, wenn

$$2 \inf_{x\in\mathcal{E}} \sup_{y\in\mathsf{A}} \|\, x - y\,\| = \sup_{a,b\in\mathsf{A}} \|\, a - b\,\|$$

gilt[128]. Lindenstrauss-Räume lassen sich nun durch eine Aussage über die Zentrierbarkeit ihrer Teilmengen charakterisieren, denn für einen Banachraum $\mathcal{E}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

[125] Grothendieck war der erste, der sich eingehend hiermit beschäftigte [123]. Sehr viel weitergehend (und namensgebend) waren später Arbeiten von Lindenstrauss, allein [222] und mit unterschiedlichen Co-Autoren [214], [215], [224].

[126] Siehe beispielsweise [59], [60], [84], [85], [89] und [278]. Vergleiche auch [235] und für den separablen Fall [236].

[127] Vergleiche auch [220].

[128] Die Bezeichnung ist anschaulich einleuchtend, denn eine zentrierbare Menge liegt zentral in der kleinsten sie umfassenden abgeschlossenen Kugel. Entsprechend tritt in obiger Relation im allgemeinen Fall ein $\geqq$ an die Stelle des $=$.

(i) $\mathcal{E}'$ ist isometrisch isomorph zu einem $\mathscr{L}^1$-Raum.

(ii) Jede Teilmenge von $\mathcal{E}$ mit vier Elementen ist zentrierbar.

(iii) Jede endliche Teilmenge von $\mathcal{E}$ ist zentrierbar.

(iv) Jede kompakte Teilmenge von $\mathcal{E}$ ist zentrierbar.

Mit universellen Charakterisierungstheoremen wie dem obigen werden alle Lindenstrauss-Räume erfaßt; andererseits ist nicht jeder $\mathscr{L}^1$-Raum der Dualraum eines Banachraums. So gibt es etwa keinen Banachraum $\mathcal{E}$, für den $\mathcal{E}' = \mathscr{L}^1([0,1])$ gilt[129]. Prominente Beispiele für Lindenstrauss-Räume sind die Räume $C(\mathsf{K})$ der stetigen skalaren Funktionen auf einem kompakten Hausdorffraum K.

Die weiter oben diskutierten vorhandenen oder auch nicht vorhandenen Inklusionsrelationen zwischen $\mathscr{L}^p$-Räumen zu unterschiedlichen p lassen die Möglichkeit offen, daß diese untereinander topologisch isomorph sein könnten. Zur Diskussion solcher Sachverhalte beschränken wir uns auf Maßräume mit σ-finiten Maßen. Damit ist nicht nur ein weiter Bereich relevanter Fälle abgedeckt, man kann sich bei allen Betrachtungen zusätzlich auf den noch übersichtlicheren Sonderfall von Wahrscheinlichkeitsräumen beschränken[130], wie das folgende Resultat zeigt.

2.98 Lemma: *Ist $1 \leqq p < \infty$ und μ ein σ-additives Maß auf einem Raum* M*, dann ist der Raum $\mathscr{L}^p(\mathsf{M},\mu,\mathcal{E})$ isometrisch isomorph zu einem Raum $\mathscr{L}^p(\mathsf{M},\nu,\mathcal{E})$ mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß ν.*

Beweis: Zu jedem σ-additiven Maß auf M gibt es stets eine μ-integrierbare Funktion $g \neq 0$ mit $\int\limits_{\mathsf{M}} \|g\|^p \, d\mu = 1$. Nun sei $d\nu = \|g\|^p \, d\mu$, dann gilt $\nu(\mathsf{M}) = 1$. Definiert man außerdem die Abbildung $\mathfrak{T} : \mathscr{L}^p(\mathsf{M},\mu,\mathcal{E}) \longrightarrow \mathscr{L}^p(\mathsf{M},\nu,\mathcal{E})$ durch

$$\mathfrak{T}f(t) = \frac{f(t)}{\|g(t)\|^p}$$

für alle $t \in \mathsf{M}$, dann ist $\mathfrak{T}$ erstens trivialerweise ein Isomorphismus, und zweitens gilt für alle $f \in \mathscr{L}^p(\mathsf{M},\mu,\mathcal{E})$

$$\|\,\mathfrak{T}f\,\|_p^p = \int\limits_{\mathsf{M}} \|\mathfrak{T}f\|^p \, d\nu = \int\limits_{\mathsf{M}} \left\| \frac{f}{\|g\|^p} \right\|^p \|g\|^p \, d\mu = \int\limits_{\mathsf{M}} \|f\|^p \, d\mu = \|f\|_p^p,$$

also ist $\mathfrak{T}$ auch eine Isometrie. □

Um nun zur Diskussion der Isomorphie von $\mathscr{L}^p$-Räumen zurückzukommen, benötigen wir wieder einige Begriffe.

[129]Näheres hierzu steht in [261].

[130]Ausführliche Informationen über Wahrscheinlichkeitsmaße im Kontext mit Banachräumen erteilt [216].

2.99 Definition: $(\mathsf{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ sei ein Maßraum. Eine *Rademacher-Folge*[131] ist eine Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen auf M mit

(i) $r_n(x) = \pm 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathsf{M}$,

(ii) $\mu(\{ x \in \mathsf{M} \mid r_n(x) = \delta_n \wedge r_m(x) = \delta_m \})$
$= \mu(\{ x \in \mathsf{M} \mid r_n(x) = \delta_n \}) \cdot \mu(\{ x \in \mathsf{M} \mid r_m(x) = \delta_m \})$
für $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$ und $(\delta_n, \delta_m) \in \{ (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1) \}$[132],

(iii) $\mu(\{ x \in \mathsf{M} \mid r_n(x) = 1 \}) = \mu(\{ x \in \mathsf{M} \mid r_n(x) = -1 \}) = 1/2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die nächste Definition liefert zwei charakteristische Kenngrößen für Banachräume, mit denen man unterschiedliche Exemplare auf mögliche Isomorphie überprüfen kann.

2.100 Definition: Es seien $\mathcal{E}$ ein Banachraum, $(\mathsf{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum und $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Rademacher-Folge auf M.

a) Die größte reelle Zahl p mit $1 \leqq p \leqq 2$, sodaß es eine Konstante $C > 0$ gibt, für die für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede endliche Folge $(x_j)_{0 \leqq j \leqq n}$ in $\mathcal{E}$ stets

$$\left(\int_{\mathsf{M}} \left\| \sum_{j=0}^{n} r_j(x)\, x_j \right\|^p d\mu \right)^{1/p} \leqq C \left(\sum_{j=0}^{n} \|x_j\|^p \right)^{1/p}$$

gilt, heißt *Typ* von $\mathcal{E}$. Die kleinste solche Konstante C wird mit $T_p(\mathcal{E})$ bezeichnet.

b) Die kleinste reelle Zahl q mit $2 \leqq q < \infty$, sodaß es eine Konstante $c > 0$ gibt, für die

$$\left(\int_{\mathsf{M}} \left\| \sum_{j=0}^{n} r_j(x)\, x_j \right\|^q d\mu \right)^{1/q} \geqq c \left(\sum_{j=0}^{n} \|x_j\|^q \right)^{1/q}$$

gilt, heißt *Cotyp* von $\mathcal{E}$. Die kleinste solche Konstante c wird mit $C_p(\mathcal{E})$ bezeichnet.

c) Gibt es eine Konstante $c > 0$, sodaß

$$\left(\int_{\mathsf{M}} \left\| \sum_{j=0}^{n} r_j(x)\, x_j \right\|^q d\mu \right)^{1/q} \geqq c \max_{1 \leqq j \leqq n} \|x_j\|$$

gilt, dann ist $\mathcal{E}$ vom Cotyp $q = \infty$.

---

[131] Benannt nach Hans Rademacher, der 1922 in Gestalt der ebenfalls nach ihm benannten, durch

$$r_n(x) = \operatorname{sign}(\sin(2^n \pi x)) = (-1)^k \quad \text{für} \quad \frac{k}{2^n} \leqq x < \frac{k+1}{2^n} \quad \text{und} \quad 0 \leqq k < 2^n - 1$$

definierten Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der *Rademacher-Funktionen* erstmals eine solche Rademacher-Folge beschrieb [293]. Die Rademacher-Funktionen lassen sich nach den in Abschnitt 2.2.3.8, Beispiel c) eingeführten Haar-Funktionen f_n entwickeln; es gilt nämlich für $k \in \mathbb{N}$ und $l = 1, 2, \ldots, 2^k$

$$r_{n+l}(x) = \sum_{j=1}^{2^n} f_{2^n + j}(x).$$

[132] Das heißt, die r_n sind paarweise unabhängig.

Man schreibt $p = \operatorname{type}(\mathcal{E})$ und $q = \operatorname{cotype}(\mathcal{E})$ und findet gelegentlich auch die Bezeichnungen *Rademacher-Typ* und *Rademacher-Cotyp* von Banachräumen[133]. Die Definitionen zeigen unmittelbar, daß Typ und Cotyp *invariant unter stetigen linearen Isomorphismen sind*, was sie zu einem sehr nützlichen Hilfsmittel für die Klassifikation von Banachräumen und Banachraum-Eigenschaften macht. Diese Invarianz wird sich als deren zentrale Eigenschaft auch für die hier verfolgten Zwecke erweisen.

Als nächstes beschaffen wir uns einige Hilfssätze. Der erste davon liefert eine alternative Berechnung der $\|\ \|_p$-Normen.

2.101 Lemma: *Für $f \in \mathscr{L}^p(M, \mu, \mathcal{E})$ mit $1 \leqq p < \infty$ gilt*

$$\int_M \|f\|^p \, d\mu = p \int_0^\infty s^{p-1} \mu(\{ x \in M \mid \|f(x)\| \geqq s \}) \, ds.$$

Beweis: Es ist

$$\|f(x)\|^p = \int_0^{\|f(x)\|^p} p\, s^{p-1} \, ds = \int_0^\infty p\, s^{p-1} \chi_{(0, \|f(x)\|^p]} \, ds.$$

Mit Satz 1.25 folgt daraus

$$\int_M \|f\|^p \, d\mu = p \int_M \int_0^\infty s^{p-1} \chi_{(0,\|f(x)\|^p]} \, ds \, d\mu = p \int_0^\infty \int_M s^{p-1} \chi_{(0,\|f(x)\|^p]} \, d\mu \, ds$$

$$= p \int_0^\infty s^{p-1} \mu(\{ x \in M \mid \|f(x)\| \geqq s \}) \, ds. \qquad \square$$

Die übrigen hier benötigten Hilfssätze haben die Form von Ungleichungen. Die erste davon ist die

2.102 Tschebyscheffsche Ungleichung:[134] $(M, \mathfrak{S}, \mu)$ *sei ein Maßraum und $f : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ eine meßbare Funktion. Dann gilt für alle $\lambda > 0$ und jedes $1 < p < \infty$*

$$\mu(\{ x \in M \mid |f(x)| \geqq \lambda \}) \leqq \frac{1}{\lambda^p} \int_M |f|^p \, d\mu.$$

Beweis: Für $A = \{ x \in M \mid |f(x)| \geqq \lambda \}$ gilt

$$\mu(A) = \int_A d\mu = \frac{1}{\lambda^p} \int_A \lambda^p \, d\mu \leqq \frac{1}{\lambda^p} \int_A |f|^p \, d\mu \leqq \frac{1}{\lambda^p} \int_M |f|^p \, d\mu. \qquad \square$$

[133] Diese Begriffe wurden von Bernard Maurey eingeführt [246], [247]. Vergleiche auch [249]. Typ und Cotyp sind typische Beispiele für sogenannte *Supereigenschaften* von Banachraumen, das sind Eigenschaften, die nur von den endlichdimensionalen Unterräumen der betrachteten Banachräume abhängen.

[134] Benannt nach und für den Fall $p = 2$ erstmals bewiesen von Pafnuti Lwowitsch Tschebyscheff [375].

Die zweite ist die

2.103 Lévy-Ungleichung:[135] $(\mathsf{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ *sei ein Maßraum,* $\mathcal{E}$ *ein Banachraum,* $\mathfrak{B}(\mathcal{E})$ *die Borel-Algebra von* $\mathcal{E}$*, außerdem* $(f_j : \mathsf{M} \longrightarrow \mathcal{E})_{1 \leqq j \leqq n}$ *eine Familie von Funktionen mit* $\mu(\{ t \in \mathsf{M} \mid f_j(t) \in \mathrm{B} \} = \mu(\{ t \in \mathsf{M} \mid - f_j(t) \in \mathrm{B} \}$ *für alle* $\mathrm{B} \in \mathfrak{B}(\mathcal{E})$ *und* $1 \leqq j \leqq n$*. Dann gilt für* $S_j = \sum_{i=1}^{j} f_i$ *und alle* $\lambda \geqq 0$

$$\mu\Big(\Big\{ t \in \mathsf{M} \Bigm| \max_{1 \leqq j \leqq n} \|S_j(t)\| > \lambda \Big\}\Big) \leqq 2\,\mu(\{ t \in \mathsf{M} \mid \|S_n(t)\| > \lambda \}).$$

Beweis: Es seien

$$\mathsf{A}_\lambda := \Big\{ t \in \mathsf{M} \Bigm| \max_{1 \leqq j \leqq n} \|S_j(t)\| > \lambda \Big\}, \quad \mathsf{A}_{j,\lambda} := \{ t \in \mathsf{M} \mid \|S_j(t)\| > \lambda \}$$

und

$$\mathsf{B}_{j,\lambda} := \{ t \in \mathsf{M} \mid \|S_j(t)\| > \lambda \text{ und } \|S_i(t)\| \leqq \lambda \text{ für } i = 1, 2, \ldots, j-1 \}.$$

Dann gelten

(i) $\mathsf{B}_{i,\lambda} \cap \mathsf{B}_{j,\lambda} = \emptyset$ für $i \neq j$,

(ii) $\bigcup_{j=1}^{n} \mathsf{B}_{j,\lambda} = \mathsf{A}_\lambda$,

(iii) $\mathsf{A}_{j,\lambda} \subseteqq \mathsf{A}_{n,\lambda} \cup \{ t \in \mathsf{M} \mid \| 2S_j - S_n \| > \lambda \}$ für $j = 1, 2, \ldots, n$,

(iv)
$$\begin{aligned} &\mu(\{ t \in \mathsf{M} \mid f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t) \in \mathrm{B} \} \\ &= \mu(\{ t \in \mathsf{M} \mid f_1(t), f_2(t), \ldots, f_j(t), -f_{j+1}(t), \ldots, -f_n(t) \in \mathrm{B} \} \end{aligned}$$

für alle $\mathrm{B} \in \mathfrak{B}(\mathcal{E})$ und $1 \leqq j \leqq n$.

Aufgrund von $S_n = S_j + \sum_{i=j+1}^{n} f_i$ und $2S_j - S_n = S_j - \sum_{i=j+1}^{n} f_i$ folgt aus (iv)

$$\begin{aligned} &\mu(\{ t \in \mathsf{M} \mid f_1(t), f_2(t), \ldots, f_j(t), S_n(t) \in \mathrm{B} \}) \\ &= \mu(\{ t \in \mathsf{M} \mid f_1(t), f_2(t), \ldots, f_j(t), 2S_j(t) - S_n(t) \in \mathrm{B} \}) \end{aligned}$$

für alle $\mathrm{B} \in \mathfrak{B}(\mathcal{E})$ und $1 \leqq j \leqq n$. Daraus ergibt sich

$$\mu(\mathsf{B}_{j,\lambda}) \leqq \mu(\mathsf{B}_{j,\lambda} \cap \mathsf{A}_{j,\lambda}) + \mu(\mathsf{B}_{j,\lambda} \cap \{ t \in \mathsf{M} \mid \| 2S_j - S_n \| > \lambda \}) = 2\,\mu(\mathsf{B}_{j,\lambda} \cap \mathsf{A}_{j,\lambda})$$

und somit

$$\mu(\mathsf{A}_\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{B}_{j,\lambda} \leqq 2 \sum_{j=1}^{n} \mu(\mathsf{B}_{j,\lambda} \cap \mathsf{A}_{j,\lambda}) = 2\,\mu(\mathsf{A}_{j,\lambda}). \qquad \square$$

[135] Nach Paul Lévy [218].

Die Ungleichungen 2.102 und 2.103 sind insbesondere auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Bedeutung. – Die Tschebyscheffsche Ungleich kommt nun sogleich zum Einsatz beim Beweis der

2.104 Khintchine-Ungleichung:[136] $(\mathrm{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ *sei ein Maßraum mit σ-finitem Maß μ und $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ein Rademacher-Folge in* M. *Dann gibt es zu jedem $0 < p < \infty$ Konstanten $A_p, B_p > 0$, sodaß für alle endlichen Folgen $(x_j)_{0 \leqq j \leqq N}$ reeller oder komplexer Zahlen*

$$A_p \left(\sum_{j=0}^{N} |x_j|^2 \right)^{1/2} \leqq \left(\int_{\mathrm{M}} \left| \sum_{j=0}^{N} x_j\, r_j \right|^p d\mu \right)^{1/p} \leqq B_p \left(\sum_{j=0}^{N} |x_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Beweis: Nach Lemma 2.98 genügt es, die Ungleichung für Wahrscheinlichkeitsmaße zu zeigen.
1. Fall: $p = 2$. Für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gilt $\int_{\mathrm{M}} r_i\, r_j\, d\mu = \delta_{ij}$; hieraus folgt

$$\int_{\mathrm{M}} \left| \sum_{j=0}^{N} x_j\, r_j \right|^2 d\mu = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} x_i\, \overline{x_j} \int_{\mathrm{M}} r_i\, r_j\, d\mu = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} x_i\, \overline{x_j}\, \delta_{ij} = \sum_{j=0}^{N} |x_j|^2, \tag{2.46}$$

das heißt, die Ungleichungen werden Gleichungen.
2. Fall: $p \neq 2$. Zunächst gilt aufgrund der Eigenschaften (ii) und (iii) in Definition 2.99 für alle $t > 0$

$$\int_{\mathrm{M}} \exp\left(t \sum_{j=0}^{N} x_j\, r_j \right) d\mu = \prod_{j=0}^{N} \int_{\mathrm{M}} e^{t\, x_j\, r_j}\, d\mu$$

$$= \prod_{j=0}^{N} [\, e^{t\, x_j}\, \mu(\{\, x \in \mathrm{M} \mid r_n(x) = 1\,\}) + e^{-t\, x_j}\, \mu(\{\, x \in \mathrm{M} \mid r_n(x) = -1\,\})]$$

$$= \prod_{j=0}^{N} \frac{e^{t\, x_j} + e^{-\lambda\, x_j}}{2} = \prod_{j=0}^{N} \cosh\,(t\, x_{/,j}).$$

Wie man den Taylorreihen $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ und $e^{x^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{\,n} n!}$ unmittelbar ansieht, ist $\cosh x \leqq e^{x^2/2}$; daraus folgt

$$\int_{\mathrm{M}} \exp\left(t \sum_{j=0}^{N} x_j\, r_j \right) d\mu \leqq \prod_{j=0}^{N} e^{\,t^2 x_j^2/2} = \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{j=0}^{N} x_j^2 \right),$$

und mit Ungleichung 2.103 und $s = t \sum_{j=0}^{N} x_j^2$ ergibt sich weiter

$$\mu\left(\left\{ x \in \mathrm{M} \,\middle|\, \left| \sum_{j=0}^{N} x_j\, r_j(x) \right| \geqq s \right\} \right) = \mu\left(\left\{ x \in \mathrm{M} \,\middle|\, \exp\left(\left| t \sum_{j=0}^{N} x_j\, r_j(x) \right| \right) \geqq e^{\,ts} \right\} \right)$$

[136] Entdeckt von A. Khintchine [201] und davon unabhängig von J. E. Littlewood [227].

$$\leqq e^{-ts} \int_M \exp\left(t \sum_{j=0}^N x_j\, r_j\right) d\mu \leqq \exp\left(-\frac{s^2}{2 \sum x_j^2}\right). \tag{2.47}$$

Mit Lemma 2.101 und Satz 1.25 folgt daraus

$$\int_M \|f\|^p \, d\mu = p \int_M \int_0^\infty s^{p-1} \chi_{(0,\|f(x)\|^p]} \, ds \, d\mu = p \int_0^\infty \int_M s^{p-1} \chi_{(0,\|f(x)\|^p]} \, d\mu \, ds$$
$$= p \int_0^\infty s^{p-1} \mu(\{ x \in \mathrm{M} \mid \|f(x)\| \geqq s \}) \, ds.$$

Wenden wir das auf (2.47) an, erhalten wir

$$\int_M \left| \sum_{j=0}^N x_j\, r_j \right|^p d\mu \leqq p \int_0^\infty s^{p-1} \exp\left(-\frac{s^2}{2 \sum x_j^2}\right) ds$$

und daraus mit der Substitution $u = \dfrac{s^2}{2 \sum x_j^2}$ und der Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

die Abschätzung

$$\int_M \left| \sum_{j=0}^N x_j\, r_j \right|^p d\mu \leqq 2^{p/2-1} \, p \left(\sum_{j=0}^N x_j^2 \right)^{p/2} \int_0^\infty u^{p/2-1} e^{-u} \, du$$
$$= 2^{p/2-1} \, p \, \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \left(\sum_{j=0}^N x_j^2 \right)^{p/2},$$

also mit $B_p^p = 2^{p/2-1} \, p \, \Gamma(p/2)$ die rechte Ungleichung.
Nun sei $0 < p < 2$, dann gilt für $q = 1/(2 - p/2)$

$$p\, q + 4\,(1 - q) = 2,$$

und mit Ungleichung 2.80 sowie der bereits gezeigten Ungleichung folgt

$$\int_M \left| \sum_{j=0}^N x_j\, r_j \right|^2 d\mu = \int_M \left| \sum_{j=0}^N x_j\, r_j \right|^{p\,q} \left| \sum_{j=0}^N x_j\, r_j \right|^{4\,(1-q)} d\mu$$
$$\leqq \left(\int_M \left| \sum_{j=0}^N x_j\, r_j \right|^p d\mu \right)^q \left(\int_M \left| \sum_{j=0}^N x_j\, r_j \right|^4 d\mu \right)^{1-q}$$

$$\leqq B_4^{4(1-q)} \left(\sum_{j=0}^{N} |x_j|^2 \right)^{2(1-q)} \left(\int_M \left| \sum_{j=0}^{N} x_j \, r_j \right|^p d\mu \right)^q .$$

Mit (2.46), Satz 2.83 und $0 < r < 1$ erhält man

$$\left(\sum_{j=0}^{N} |x_j|^2 \right)^{2q-1} \leqq B_4^{4(1-q)} \left(\int_M \left| \sum_{j=0}^{N} x_j \, r_j \right|^p d\mu \right)^q$$

$$= B_4^{4(1-q)} \left(\int_M \left| \sum_{j=0}^{N} x_j \, r_j \right|^p d\mu \right)^{q-r} \left(\int_M \left| \sum_{j=0}^{N} x_j \, r_j \right|^p d\mu \right)^r$$

$$\leqq B_4^{4(1-q)} \left(\int_M \left| \sum_{j=0}^{N} x_j \, r_j \right|^p d\mu \right)^{q-r} \left(\sum_{j=0}^{N} |x_j|^2 \right)^r ,$$

also weiter

$$\left(\sum_{j=0}^{N} |x_j|^2 \right)^{2q-r-1} \leqq B_4^{4(1-q)} \left(\int_M \left| \sum_{j=0}^{N} x_j \, r_j \right|^p d\mu \right)^{q-r} ,$$

und mit $r = \dfrac{q\,(\,p-4\,)+2}{p-2}$ ergibt sich die Behauptung.

Für $2 < p < \infty$ liefern (2.46) und Satz 2.83

$$\sum_{j=0}^{N} |x_j|^2 \leqq \left(\int_M \left| \sum_{j=0}^{N} x_j \, r_j \right|^p d\mu \right)^{2/p} ,$$

und damit ist der Beweis vollständig. □

Ungleichung 2.104 ist ein Sonderfall des nächsten, ziemlich bedeutenden Resultats und wird dadurch auf beliebige Banachräume verallgemeinert.

2.105 Kahane-Khintchine-Ungleichung:[137] *Ist $1 \leqq p, q < \infty$, dann gibt es eine Konstante C_p, so daß für jeden Banachraum $\mathcal{E}$ und jede endliche Folge $(x_j)_{0 \leqq j \leqq n}$ in $\mathcal{E}$ die folgende Ungleichung gilt:*

$$\int_M \left\| \sum_{j=0}^{n} r_j \, x_j \right\| d\mu \leqq \left(\int_M \left\| \sum_{j=0}^{n} r_j \, x_j \right\|^p d\mu \right)^{1/p} \leqq C_p \int_M \left\| \sum_{j=0}^{n} r_j \, x_j \right\| d\mu .$$

Beweis: $(x_j)_{0 \leqq j \leqq n}$ sei eine beliebige endliche Folge in $\mathcal{E}$; dabei sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\int_M \left\| \sum_{j=0}^{n} r_j \, x_j \right\| d\mu = 1$. Außerdem sei $F_n : \mathrm{M} \longrightarrow \mathcal{E}$ für $0 \leqq j \leqq n$ definiert durch

$$F_n(t) = \sum_{j=0}^{n} r_j(t) \, x_j .$$

[137] Diese Verallgemeinerung stammt von J.-P. Kahane [185].

Für $\lambda > 0, j = 1, 2, \ldots, N$ und $1 \leqq p < \infty$ definieren wir folgende Mengen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_\lambda &:= \{\, t \in \mathrm{M} \mid \|F_N(t)\| \geqq \lambda \,\},\\
\mathrm{A}_\lambda^p &:= \{\, t \in \mathrm{M} \mid \|F_N(t)\|^p \geqq \lambda \,\},\\
\mathrm{B}_\lambda &:= \Big\{\, t \in \mathrm{M} \;\Big|\; \max_{1 \leqq n \leqq N} \|F_n(t)\| \geqq \lambda \,\Big\},\\
\mathrm{A}_{n,\lambda} &:= \{\, t \in \mathrm{M} \mid \|F_n(t)\| \geqq \lambda \,\},\\
\mathrm{B}_{n,\lambda}^{(1)} &:= \{\, t \in \mathrm{M} \mid \|\, F_N(t) - F_{n-1} \,\| \geqq \lambda \,\},\\
\mathrm{B}_{n,\lambda}^{(2)} &:= \{\, t \in \mathrm{M} \mid \|\, F_N(t) - 2\, F_{n-1} \,\| \geqq \lambda \,\},\\
\mathrm{C}_{n,\lambda} &:= \{\, t \in \mathrm{M} \mid \|S_n(t)\| \geqq \lambda \text{ und } \|S_j(t)\| < \lambda \text{ für } j = 1, 2, \ldots, n-1 \,\}\\
\mathrm{D}_{n,\lambda,\delta} &:= \left(\bigcap_{j=1}^{n} \{\, t \in \mathrm{M} \mid r_j(t) = \delta_j \,\} \right) \cap \mathrm{B}_{n,\lambda}^{(1)} \cap \mathrm{A}_\lambda,\\
\mathrm{E}_{n,\lambda,\delta} &:= \left(\bigcap_{j=1}^{n} \{\, t \in \mathrm{M} \mid r_j(t) = \delta_j \,\} \right) \cap \mathrm{B}_{n,\lambda}^{(1)} \cap \mathrm{B}_{n,\lambda}^{(2)},\\
&\ \delta_j \in \{-1, 1\} \text{ beliebig.}
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\mathrm{B}_\lambda = \bigcup_{J=1}^{N} \mathrm{C}_{j,\lambda} \tag{2.48}$$

und

$$\mathrm{B}_{n,\lambda}^{(1)} \cap \bigcap_{j=1}^{n} \{\, t \in \mathrm{M} \mid r_j(t) = \delta_j \,\} = \mathrm{D}_{n,\lambda,\delta} \cup \mathrm{E}_{n,\lambda,\delta}. \tag{2.49}$$

Zunächst liefert Ungleichung 2.103

$$\mu(\mathrm{B}_\lambda) \leqq 2\, \mu(\mathrm{A}_\lambda). \tag{2.50}$$

Außerdem ist $\mathrm{C}_{j,\lambda} \cap \mathrm{A}_{2\lambda} \subset \mathrm{B}_{j,\lambda}^{(1)}$, woraus

$$\mu(\mathrm{C}_{j,\lambda} \cap \mathrm{A}_{2\lambda}) \leqq \mu\big(\mathrm{C}_{j,\lambda} \cap \mathrm{B}_{j,\lambda}^{(1)}\big)$$

folgt, und $\mathrm{A}_{2\lambda} \subset \mathrm{A}_\lambda \subset \mathrm{B}_\lambda$, was mit (2.48) auf

$$\mu(\mathrm{A}_{2\lambda}) = \mu(\mathrm{B}_\lambda \cap \mathrm{A}_{2\lambda}) = \mu\left(\bigcup_{J=1}^{N} \mathrm{C}_{j,\lambda} \cap \mathrm{A}_{2\lambda} \right) = \sum_{j=1}^{N} \mu(\mathrm{C}_{j,\lambda} \cap \mathrm{A}_{2\lambda}) \leqq \sum_{j=1}^{N} \mu\big(\mathrm{C}_{j,\lambda} \cap \mathrm{B}_{j,\lambda}^{(1)}\big)$$

führt. Als nächstes verwenden wir die für Rademacher-Folgen trivialerweise gültigen Relationen $r_n^2 = 1$ und $|r_n| = 1$ für $n \in \mathbb{N}$ und finden damit

$$\|\, F_N(t) - F_{j-1} \,\| = \left\| \sum_{j=0}^{N} r_j(t)\, x_j - \sum_{j=0}^{n-1} r_j(t)\, x_j \right\| = \left\| \sum_{j=n}^{N} r_j(t)\, x_j \right\|$$

$$= \left\| r_n(t) \sum_{j=n}^{N} r_j(t)\, x_j \right\| = \left\| r_n^2(t)\, x_n + \sum_{j=n+1}^{N} r_n(t)\, r_j(t)\, x_j \right\|$$

$$= \left\| x_n + \sum_{j=n+1}^{N} r_n(t)\, r_j(t)\, x_j \right\|,$$

also

$$\mathrm{B}_{n,\lambda}^{(1)} = \left\{ t \in \mathrm{M} \;\middle|\; \left\| x_n + \sum_{j=n+1}^{N} r_n(t)\, r_j(t)\, x_j \right\| \leqq \lambda \right\}.$$

Eine weitere, aus der Definition folgende Eigenschaft von Rademacher-Folgen ist die für beliebige Folgen $(\delta_n)_{1 \leqq n \leqq N}$ mit $\delta_j \in \{-1, 1\}$ gültige Relation

$$\begin{aligned} &\mu(\{\, t \in \mathrm{M} \mid r_1(t) = \delta_1, r_2(t) = \delta_2, \ldots, r_n(t) = \delta_n, \\ &\qquad\qquad r_n(t)\, r_{n+1}(t) = \delta_{n+1}, r_n(t)\, r_{n+2}(t) = \delta_{n+2}, \ldots, r_n(t)\, r_N(t) = \delta_N \,\}) \\ = \;&\mu(\{\, t \in \mathrm{M} \mid r_1(t) = \delta_1, r_2(t) = \delta_2, \ldots, r_n(t) = \delta_n, \\ &\qquad\qquad r_{n+1}(t) = \delta_n\, \delta_{n+1}, r_{n+2}(t) = \delta_n\, \delta_{n+2}, \ldots, r_N(t) = \delta_n\, \delta_N \,\}) = 2^{-N}, \end{aligned}$$

die unmittelbar

$$\begin{aligned} &\mu(\{\, t \in \mathrm{M} \mid r_1(t) = \delta_1, r_2(t) = \delta_2, \ldots, r_n(t) = \delta_n, \\ &\qquad\qquad r_n(t)\, r_{n+1}(t) = \delta_{n+1}, r_n(t)\, r_{n+2}(t) = \delta_{n+2}, \ldots, r_n(t)\, r_N(t) = \delta_N \,\}) \\ &\quad = \prod_{j=1}^{n} \mu(\{\, t \in \mathrm{M} \mid r_j(t) = \delta_j \,\}) \prod_{j=n+1}^{N} \mu(\{\, t \in \mathrm{M} \mid r_n(t)\, r_j(t) = \delta_j \,\}) \end{aligned}$$

nach sich zieht. Daraus folgt

$$\mu\big(\mathrm{C}_{n,\lambda} \cap \mathrm{B}_{n,\lambda}^{(1)}\big) = \mu(\mathrm{C}_{n,\lambda}) \cdot \mu\big(\mathrm{B}_{n,\lambda}^{(1)}\big),$$

also

$$\mu(\mathrm{A}_{2\lambda}) \leqq \sum_{n=1}^{N} \mu\big(\mathrm{C}_{n,\lambda} \cap \mathrm{B}_{n,\lambda}^{(1)}\big) = \sum_{n=1}^{N} \mu(\mathrm{C}_{n,\lambda}) \cdot \mu\big(\mathrm{B}_{n,\lambda}^{(1)}\big) \leqq \sum_{n=1}^{N} \mu(\mathrm{C}_{n,\lambda}) \cdot \max_{1 \leqq n \leqq N} \mu\big(\mathrm{B}_{n,\lambda}^{(1)}\big).$$

Mit $\sum\limits_{n=1}^{N} \mu(\mathrm{C}_{n,\lambda}) = \mu(\mathrm{B}_\lambda)$ und (2.50) wird das zu

$$\mu(\mathrm{A}_{2\lambda}) \leqq \mu(\mathrm{B}_\lambda) \cdot \max_{1 \leqq n \leqq N} \mu\big(\mathrm{B}_{n,\lambda}^{(1)}\big) \leqq 2\, \mu(\mathrm{A}_\lambda) \cdot \max_{1 \leqq n \leqq N} \mu\big(\mathrm{B}_{n,\lambda}^{(1)}\big).$$

Mit (2.49) erhält man außerdem

$$\mu\big(\mathrm{B}_{n,\lambda}^{(1)}\big) = \sum_{\substack{\delta_j \in \{-1,1\} \\ 1 \leqq j \leqq n}} \mu\left(\mathrm{B}_{n,\lambda}^{(1)} \cap \bigcap_{j=1}^{n} \{\, t \in \mathrm{M} \mid r_j(t) = \delta_j \,\}\right) = \sum_{\substack{\delta_j \in \{-1,1\} \\ 1 \leqq j \leqq n}} \mu(\mathrm{D}_{n,\lambda,\delta} \cup \mathrm{E}_{n,\lambda,\delta})$$

und wegen $\mu(\mathsf{D}_{n,\lambda,\delta}) \leqq \mu(\mathsf{E}_{n,\lambda,\delta})$ weiter

$$\mu(\mathsf{B}^{(1)}_{n,\lambda}) \leqq 2 \sum_{\substack{\delta_j \in \{-1,1\} \\ 1 \leqq j \leqq n}} \mu(\mathsf{D}_{n,\lambda,\delta}) = 2 \sum_{\substack{\delta_j \in \{-1,1\} \\ 1 \leqq j \leqq n}} \mu\left(\left(\bigcap_{j=1}^{n} \{\, t \in \mathsf{M} \mid r_j(t) = \delta_j \,\}\right) \cap \mathsf{B}^{(1)}_{n,\lambda} \cap \mathsf{A}_\lambda\right)$$

$$\leqq 2 \sum_{\substack{\delta_j \in \{-1,1\} \\ 1 \leqq j \leqq n}} \mu\left(\left(\bigcap_{j=1}^{n} \{\, t \in \mathsf{M} \mid r_j(t) = \delta_j \,\}\right) \cap \mathsf{A}_\lambda\right) = 2\,\mu(\mathsf{A}_\lambda)$$

Zusammen folgt damit

$$\mu(\mathsf{A}_{2\lambda}) \leqq 4\,\mu(\mathsf{A}_\lambda)^2. \tag{2.51}$$

Ungleichung 2.102 mit $p = 1$ liefert nun

$$\mu(\mathsf{A}_\lambda) \leqq \frac{1}{\lambda^2},$$

iterierte Anwendung von (2.51) führt auf

$$\mu(\mathsf{A}_{2\lambda}) \leqq \frac{4}{\lambda^2},\ \ \mu(\mathsf{A}_{4\lambda}) \leqq \frac{4^3}{\lambda^4},\ \ \ldots, \mu(\mathsf{A}_{2^n\lambda}) \leqq \frac{4^{2^n-1}}{\lambda^{2^n}},\ \ \ldots,$$

und mit $\lambda = 1/8$ ergibt sich

$$\mu(\mathsf{A}_{2^n\lambda}) \leqq \frac{4^{2^n}}{8^{2^n}} = \frac{1}{2^{2^n}}. \tag{2.52}$$

Damit können wir nun die zweite in der Behauptung auftretende Abschätzung verifizieren. Zunächst liefert partielle Integration

$$\int_{\mathsf{M}} \|F_n(t)\|^p d\mu = \int_0^\infty \mu(\mathsf{A}^p_r)\,dr = \int_0^\infty p\,r^{p-1}\,\mu(\mathsf{A}_r)\,dr,$$

woraus mit Hilfe der Linearität des Integrals sowie von (2.52)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathsf{M}} \|F_n(t)\|^p d\mu &= \int_0^8 p\,r^{p-1}\,\mu(\mathsf{A}_r)\,dr + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{8\cdot 2^{n-1}}^{8\cdot 2^n} r^{p-1}\,\mu(\mathsf{A}_r)\,dr \\
&\leqq \int_0^8 p\,r^{p-1}\,dr + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^n-1}} \int_{8\cdot 2^{n-1}}^{8\cdot 2^n} p\,r^{p-1}\,dr \\
&= 8^p + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^p\,(2^{pn} - 2^{p(n-1)})}{2^{2^n-1}} = 8^p\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2^{n-1}}{2^{2^n-p-1}}\right]
\end{aligned}$$

folgt. Mit $C^p_p = 8^p\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2^{n-1}}{2^{2^n-p-1}}\right]$ erhalten wir die behauptete Ungleichung. $\square$

Die beschriebenen Hilfsmittel erlauben nun, die oben erwähnte Fragestellung zu klären. Dazu seien wieder $1 \leqq p, q < \infty$. Zunächst zeigen wir folgendes.

2.106 Satz:[138] *(i) Für* $1 \leqq p \leqq 2$ *gilt* $\operatorname{type}(\mathscr{L}^p(\mathsf{M},\mu)) = p$ *und* $\operatorname{cotype}(\mathscr{L}^p(\mathsf{M},\mu)) = 2$.
(ii) Für $2 < p < \infty$ *gilt* $\operatorname{type}(\mathscr{L}^p(\mathsf{M},\mu)) = 2$ *und* $\operatorname{cotype}(\mathscr{L}^p(\mathsf{M},\mu)) = p$.

Beweis: Es sei $N \in \mathbb{N}$, dazu $(f_j)_{0 \leqq j \leqq N}$ eine endliche Folge in $\mathscr{L}^p(\mathsf{M},\mu,\mathcal{E})$ und $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Rademacher-Folge auf M.
1. Fall: $1 \leqq p \leqq 2$. Nach Ungleichung 2.104 gibt es eine Konstante B_p, sodaß für alle $x \in \mathsf{M}$

$$\left(\int_{\mathsf{M}} \left| \sum_{j=0}^{n} r_j\, f_j(x) \right|^p d\mu \right)^{1/p} \leqq B_p \left(\sum_{j=0}^{N} |f_j(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

Daraus folgt

$$\int_{\mathsf{M}} \int_{\mathsf{M}} \left| \sum_{j=0}^{n} r_j\, f_j(x) \right|^p d\mu\, d'\mu \;\leqq\; B_p^p \left\| \left(\sum_{j=0}^{N} |f_j(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p,$$

also weiter

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathsf{M}} \left\| \sum_{j=0}^{N} r_j\, f_j \right\|_p^p d\mu \right)^{1/p} &\leqq B_p \left\| \left(\sum_{j=0}^{N} |f_j(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p = B_p \left\| \sum_{j=0}^{N} |f_j(x)|^2 \right\|_{p/2}^{1/2} \\ &\leqq B_p \left\| \left(\sum_{j=0}^{N} |f_j(x)|^p \right)^{2/p} \right\|_{p/2}^{1/2} = B_p \left(\int_{\mathsf{M}} \sum_{j=0}^{N} |f_j(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \\ &= B_p \left(\sum_{j=0}^{N} \|f_j\|_p^p \right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Somit gilt $\operatorname{type}(\mathscr{L}^p(\mathsf{M},\mu)) = p$.
Andererseits gibt es ebenfalls nach Ungleichung 2.104 eine Konstante A_p, sodaß für alle $x \in \mathsf{M}$

$$A_p \left(\sum_{j=0}^{N} |f_j(x)|^2 \right)^{1/2} \leqq \left(\int_{\mathsf{M}} \left| \sum_{j=0}^{n} r_j\, f_j(x) \right|^p d\mu \right)^{1/p},$$

und analog zu oben folgt

$$\left(\int_{\mathsf{M}} \left\| \sum_{j=0}^{N} r_j\, f_j \right\|_p^p d\mu \right)^{1/p} \geqq A_p \left\| \left(\sum_{j=0}^{N} |f_j(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p = A_p \left\| \sum_{j=0}^{N} |f_j(x)|^2 \right\|_{p/2}^{1/2}$$

Mit (2.27) ergibt sich

$$\left(\int_{\mathsf{M}} \left\| \sum_{j=0}^{N} r_j\, f_j \right\|_p^p d\mu \right)^{1/p} \geqq A_p \left(\sum_{j=0}^{N} \|f_j^2\|_{p/2} \right)^{1/2} = A_p \left(\sum_{j=0}^{N} \|f_j\|_p^2 \right)^{1/2};$$

[138] Diese Resultate wurde erstmals von Nordlander für den Typ [277] und Orlicz für den Cotyp [279], [280] hergeleitet, jeweils ohne daß die Definitionen dieser modernen Begriffe damals schon vorgelegen hätten.

gleichzeitig erhält man mit Hilfe von Ungleichung 2.105 eine Konstante C_2, sodaß

$$\left(\int\limits_{\mathsf{M}}\left\|\sum_{j=0}^{N} r_j\, f_j\right\|_p^p d\mu\right)^{1/p} \leqq C_p \int\limits_{\mathsf{M}}\left\|\sum_{j=0}^{n} r_j\, f_j\right\|_p d\mu \leqq C_p\, C_2\left(\int\limits_{\mathsf{M}}\left\|\sum_{j=0}^{N} r_j\, f_j\right\|_p^2 d\mu\right)^{1/2}$$

gilt. Insgesamt folgt

$$\left(\int\limits_{\mathsf{M}}\left\|\sum_{j=0}^{N} r_j\, f_j\right\|_p^2 d\mu\right)^{1/2} \geqq \frac{A_p}{C_p\, C_2}\left(\sum_{j=0}^{N}\|f_j\|_p^2\right)^{1/2},$$

also ist $\operatorname{cotype}(\mathscr{L}^p(\mathsf{M},\mu)) = 2$.

2. Fall: $2 < p < \infty$. Analog zum ersten Fall schließt man aus Ungleichung 2.105, daß es eine Konstante B_p gibt, sodaß

$$\left(\int\limits_{\mathsf{M}}\left\|\sum_{j=0}^{N} r_j\, f_j\right\|_p^2 d\mu\right)^{1/2} \leqq B_p\left\|\left(\sum_{j=0}^{N}|f_j(x)|^2\right)^{1/2}\right\|_p = B_p\left\|\sum_{j=0}^{N}|f_j(x)|^2\right\|_{p/2}^{1/2}.$$

gilt. Ungleichung 2.81 liefert dann

$$\left(\int\limits_{\mathsf{M}}\left\|\sum_{j=0}^{N} r_j\, f_j\right\|_p^2 d\mu\right)^{1/2} \leqq B_p\left(\sum_{j=0}^{N}\|f_j^2\|_{p/2}\right)^{1/2} = B_p\left(\sum_{j=0}^{N}\|f_j\|_p^2\right)^{1/2}.$$

Folglich ist $\operatorname{type}(\mathscr{L}^p(\mathsf{M},\mu)) = 2$.

Für die noch fehlende Behauptung sei daran erinnert, daß nach Satz 2.92 für $1/p+1/q = 1$ die Räume $\mathscr{L}^p(\mathsf{M},\mu)'$ und $\mathscr{L}^q(\mathsf{M},\mu)$ zueinander isometrisch isomorph sind. Ist nun $(\varphi_j)_{0\leqq j\leqq N}$ eine beliebige endliche Folge in $\mathscr{L}^p(\mathsf{M},\mu)'$, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ stets eine endliche Folge $(f_j)_{0\leqq j\leqq N}$ in $\mathscr{L}^q(\mathsf{M},\mu)$, sodaß $\|f_j\|_q = 1$ und $\|\varphi_j\|_p > (1+\varepsilon)\,|\varphi_j(f_j)|$ gilt für $j = 0, 1, \ldots, N$. Daraus folgt

$$\left(\sum_{j=0}^{N}\|\varphi_j\|_p\right)^{1/p} \leqq (1+\varepsilon)\left(\sum_{j=0}^{N}|\varphi_j(f_j)|^p\right)^{1/p}.$$

Außerdem gilt für alle $(\alpha_j)_{0\leqq j\leqq N} \in \mathbb{R}^{N+1}$ mit $\sum\limits_{j=0}^{N}|\alpha_j|^q \leqq 1$ nach Definition 2.99 und Ungleichung 2.80

$$\sum_{j=0}^{N}\alpha_j\,\varphi_j(f_j) = \int\limits_{\mathsf{M}}\sum_{i=0}^{N} r_i\,\varphi_i(f_i)\sum_{j=0}^{N} r_j\,\alpha_j\, f_j\, d\mu \leqq \int\limits_{\mathsf{M}}\left\|\sum_{i=0}^{N} r_i\,\varphi_i\right\|_p\left\|\sum_{j=0}^{N} r_j\,\alpha_j\, f_j\right\|_q d\mu$$

$$\leqq \left(\int\limits_{\mathsf{M}}\left\|\sum_{i=0}^{N} r_i\,\varphi_i\right\|_p^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int\limits_{\mathsf{M}}\left\|\sum_{j=0}^{N} r_j\,\alpha_j\, f_j\right\|_q^q d\mu\right)^{1/q}.$$

Aus $2 < p < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$ folgt $0 < q < 2$, es ist also wie soeben gezeigt $\operatorname{type}(\mathscr{L}^q(\mathsf{M}, \mu)) = q$ und damit

$$\sum_{j=0}^{N} \alpha_j \varphi_j(f_j) \leqq q \left(\sum_{j=0}^{N} \| \alpha_j f_j \|_q^q \right)^{1/p} \left(\int_{\mathsf{M}} \left\| \sum_{i=0}^{N} r_i \varphi_i \right\|_p^p d\mu \right)^{1/p}$$

$$\leqq q \left(\int_{\mathsf{M}} \left\| \sum_{i=0}^{N} r_i \varphi_i \right\|_p^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Außerdem gilt

$$\left(\sum_{j=0}^{N} |\varphi_j(f_j)|^p \right)^{1/p} = \sup \left\{ \left| \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \varphi_j(f_j) \right| \,\middle|\, (\alpha_j)_{0 \leqq j \leqq N} \in \mathbb{R}^{N+1} \wedge \sum_{j=0}^{N} |\alpha_j|^q \leqq 1 \right\},$$

insgesamt erhält man also

$$\left(\sum_{j=0}^{N} \|\varphi_j\|_p \right)^{1/p} \leqq p\,(1+\varepsilon) \left(\int_{\mathsf{M}} \left\| \sum_{i=0}^{N} r_i \varphi_i \right\|_p^p d\mu \right)^{1/p},$$

und damit folgt $\operatorname{cotype}(\mathscr{L}^q(\mathsf{M}, \mu)') = p$. Da der Cotyp invariant unter Isomorphismen ist, erhält man gleichzeitig auch $\operatorname{cotype}(\mathscr{L}^p(\mathsf{M}, \mu)) = p$. □

Das nächste Resultat ergibt sich nun beinahe von selbst. Es sei dabei jeweils M so gewählt, daß die zugehörigen $\mathscr{L}^p$-Räume unendlichdimensional sind; andernfalls ist die gesamte Angelegenheit trivial.

2.107 Corollar: *Für $p \neq q$ sind $\mathscr{L}^p$ und $\mathscr{L}^q$ nicht isomorph.*

Beweis: Sind $\mathscr{L}^p$ und $\mathscr{L}^q$ isomorph, dann gilt nach Satz 2.106

$$\begin{aligned} \operatorname{type}(\mathscr{L}^p) &= \min\{2, p\}, & \operatorname{type}(\mathscr{L}^q) &= \min\{2, q\}, \\ \operatorname{cotype}(\mathscr{L}^p) &= \max\{2, p\}, & \operatorname{cotype}(\mathscr{L}^q) &= \max\{2, q\}. \end{aligned}$$

Aus der Invarianz von Typ und Cotyp unter Isomorphismen folgt dann $\min\{2, p\} = \min\{2, q\}$ und $\max\{2, p\} = \max\{2, q\}$ und damit $p = q$. □

Die auffällige Sonderrolle, welche der Wert $p = 2$ insbesondere bei den Beweisen von Ungleichung 2.104 und Satz 2.106, aber auch generell bei den hier betrachteten Sachverhalten spielt, ist natürlich kein Zufall. Das wird sich in den nächsten beiden Abschnitten noch etwas weiter andeuten und in den darauffolgenden Abschnitten dann so richtig deutlich werden, wobei noch weitere Besonderheiten dazukommen.

2.2.3.10 ℓ^p-Räume

Zum Thema dieses Abschnitts wurde scheinbar bereits alles gesagt; wir erinnern daran, daß sich durch Wahl von μ als Zählmaß auf einer beliebigen Menge M die ℓ^p-Räume als spezielle $\mathscr{L}^p$-Räume erweisen, allerdings gewöhnlich als solche mit $\mu(\mathrm{M}) = \infty$. Neben der Einschränkung auf endliche Maße war eine solche auf Radon-Maße oder positive Maße Voraussetzung für einige der Sätze des vorigen Abschnitts. Nur diejenigen der oben bewiesenen Aussagen, die für allgemeine $\mathscr{L}^p$-Räume gelten, sind automatisch insbesondere auch für die ℓ^p-Räume richtig. Daher sind für ein paar Eigenschaften letzterer gesonderte Beweise erforderlich. Stellt man zusätzlich die Bedeutung des Gegenstands in Rechnung, dürften einige präzisierende Bemerkungen dazu nicht ganz überflüssig sein.

Daher wiederholen wir zunächst kurz die Definition[139]: Ist M eine beliebige unendliche Menge[140] und $1 \leqq p < \infty$, dann ist $\ell^p(\mathrm{M})$ die Menge aller Funktionen $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{C}$, für welche die Reihe $\sum\limits_{x \in \mathrm{M}} |f(x)|^p$ summierbar ist. $\ell^\infty(\mathrm{M})$ ist die Menge der beschränkten komplexen Funktionen auf M. Die zugehörigen Normen sind

$$\|f\|_p = \left(\sum_{x \in \mathrm{M}} |f(x)|^p \right)^{1/p}$$

beziehungsweise

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathrm{M}} |f(x)|.$$

Aus Satz 2.82 folgt nun sofort

2.108 Corollar: *Für $1 \leqq p \leqq \infty$ ist der Raum $\ell^p(\mathrm{M})$ mit der $\| \;\|_p$-Norm ein Banachraum.*

Auch die Aussage von Satz 2.91 kann man unmittelbar übertragen; wir liefern der Vollständigkeit halber jedoch auch einen direkten Beweis dafür.

2.109 Corollar: $\ell^\infty(\mathrm{M})$ *ist nicht separabel.*

Beweis: Wir wählen eine injektive Abbildung $j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathrm{M})$ und definieren damit zu jedem $t \in \mathbb{R}$ eine Funktion f_t durch

$$f_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in j(t), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\|f_t\|_\infty = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und folglich $\{ f_t \mid t \in \mathbb{R} \}$ eine überabzählbare Teilmenge von $\ell^\infty(\mathrm{M})$. Außerdem gilt $\| f_t - f_{t'} \|_\infty = 1$ für $t \neq t'$, und Satz 2.19 liefert damit die Behauptung. □

[139] Wir beschränken uns hier auf den komplexen Fall.

[140] Natürlich kann man ℓ^p-Räume auch für endliche Mengen definieren, die Sache wird dadurch jedoch ziemlich trivial, und Überlegungen zu Separibilität und dergleichen erübrigen sich dann.

Die Aussagen der Sätze 2.89 und 2.90 sind ebenfalls auf die ℓ^p-Räume anwendbar; sie lassen sich jedoch auch gemeinsam und sehr übersichtlich formulieren, weswegen wir auch hierfür einen eigenen Beweis angeben. Es gilt nämlich

2.110 Corollar: *Für $1 \leqq p < \infty$ sind die Räume $\ell^p(\mathrm{M})$ genau dann nicht separabel, wenn M überabzählbar ist.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Wäre M abzählbar, etwa $\mathrm{M} = \{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}$, dann wären auch

$$\mathscr{B} = \{ \varphi_n \mid \varphi_n(x_m) = \delta_{nm},\ n, m \in \mathbb{N} \} \subset \ell^p(\mathrm{M})$$

sowie

$$\mathscr{A} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \,\middle|\, \alpha_n \in \mathbb{Q}[\,i\,],\ (\,|\alpha_n|\,)_{n\in\mathbb{N}} \text{ summierbar} \right\}$$

abzählbar, und mit $\mathscr{A}$ hätte $\ell^p(\mathrm{M})$ eine abzählbare dichte Teilmenge – ein Widerspruch zur Voraussetzung.

„$\Longleftarrow$“: Nach Voraussetzung gibt es eine injektive Abbildung $j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}$. Damit definieren wir für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Funktion f_t durch

$$f_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } j(t) = x, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist trivialerweise $\|f_t\|_p = 1$, also erhalten wir mit $\{ f_t \mid t \in \mathbb{R} \}$ eine überabzählbare Teilmenge von $\ell^p(\mathrm{M})$. Hierfür gilt $\| f_t - f_{t'} \|_p = 2^{1/p}$, und nach Satz 2.19 ist $\ell^p(\mathrm{M})$ somit nicht separabel. $\square$

Konsequenterweise ist umgekehrt $\ell^p(\mathrm{M})$ genau dann separabel, wenn M abzählbar ist.

Gerade zu diesem Fall sind noch weitere Bemerkungen angebracht, wobei ohne Einschränkung jeweils $\mathrm{M} = \mathbb{N}$ angenommen werden darf, das heißt, es geht sozusagen um die Original-ℓ^p-Räume. Nach Satz 2.83 und 2.86 lassen sich die Räume $\mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$ für $\mu(\mathrm{M}) < \infty$ als Inklusionsketten mit aufsteigenden Werten von p anordnen, während das für $\mu(\mathrm{M}) = \infty$ im allgemeinen nicht gilt. Die ℓ^p-Räume, die natürlich zur zweiten dieser beiden Kategorien gehören, bilden hier einen wichtigen Sonderfall, da sich bei ihnen die Situation im Vergleich zum maßbeschränkten Fall genau umkehrt.

2.111 Satz: *Für $0 < p < q < \infty$ gilt $\ell^p \subset \ell^q$, und für alle $x \in \ell^p$ ist $\|x\|_p \leqq \|x\|_q$.*

Beweis: Sei $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p, x \neq 0$. Dann ist $|x_n|/\|x\|_p < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und für $0 < p < q < \infty$ gilt

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_p} \right\|_q^q = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x_n}{\|x\|_p} \right|^q \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x_n}{\|x\|_p} \right|^p = \left\| \frac{x}{\|x\|_p} \right\|_p^p = 1.$$

Hieraus folgt $\|x\|_q \leqq \|x\|_p$ für alle $x \in \ell^p$ und damit $\ell^p \subseteqq \ell^q$. Betrachtet man nun die Folge $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = n^{-(1/p+1/q)/2}$, so gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{(r/p+r/q)/2}} = \zeta\left(\frac{r}{2p} + \frac{r}{2q}\right),$$

also die ζ-Funktion in der Dirichletschen Darstellung. Diese konvergiert absolut für Argumente s mit $\mathfrak{Re}\, s > 1$ und divergiert[141] für solche mit $\mathfrak{Re}\, s \leqq 1$, folglich ist $a \in \ell^q$, aber $a \notin \ell^p$, und damit ist $\ell^q \subset \ell^p$ eine echte Inklusion. □

Auch die Dualräume der ℓ^p-Räume verdienen eine gesonderte Betrachtung; hier lassen sich die entsprechenden, die $\mathscr{L}^p$-Räume betreffenden Resultate zwar eins zu eins übertragen, dafür sind jedoch ein paar Vorüberlegungen erforderlich. μ sei das Zählmaß auf $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, das heißt, es gelte $\mu(\mathrm{A}) = |\mathrm{A}|$ für $\mathrm{A} \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$. Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Folgenräume, dann erhält das im vorigen Abschnitt verwendete Funktional $\mathcal{T}$ für Folgen $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ die Gestalt

$$\mathcal{T}(x)\, y = \int_{\mathbb{N}} x\, y\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\, y_n. \tag{2.54}$$

Nach Konstruktion ist $\mathcal{T}$ linear; wählt man $1 \leqq p, q < \infty$ so, daß $1/p + 1/q = 1$, und damit $\mathcal{A} = \ell^p$ und $\mathcal{B} = \ell^q$, dann gilt außerdem für alle $x \in \ell^p$ nach Ungleichung 2.80

$$\|\mathcal{T}(x)\| = \sup_{\substack{y\in\ell^q \\ \|y\|_{\ell^q}\leqq 1}} |\mathcal{T}(x)\, y| \leqq \sup_{\substack{y\in\ell^q \\ \|y\|_{\ell^q}\leqq 1}} \left|\sum_{n=0}^{\infty} x_n\, y_n\right| \leqq \sup_{\substack{y\in\ell^q \\ \|y\|_{\ell^q}\leqq 1}} \sum_{n=0}^{\infty} |x_n\, y_n| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| = \|x\|_p,$$

das heißt, $\mathcal{T}$ ist wohldefiniert und stetig. Damit lassen sich die Sätze 2.92, 2.93 und 2.97 unmittelbar auf die im vorliegenden Abschnitt betrachtete Situation zurechtbiegen.

Aus dem ersten der drei wird dabei das folgende

2.112 Corollar: *Für $1 < p, q < \infty$ mit $1/p+1/q = 1$ ist $\mathcal{T}$ ein isometrischer Isomorphismus von ℓ^p nach $\ell^{q\prime}$.*

Analog zu oben läßt sich somit $\ell^{q\prime}$ mit ℓ^p identifizieren, sofern $1/p + 1/q = 1$ gilt.

Der zweite Satz liefert entsprechend das nächste

[141] Das gilt natürlich nur für diese Darstellung. Die ζ-Funktion läßt sich meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortstzen mit der einzigen Polstelle $s = 1$; das gelingt beispielsweise durch die Reihe

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (k+1)^{1-s}$$

oder das Kurvenintegral

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{z^{s-1}}{e^{-z} - 1}\, dz,$$

wobei der Integrationsweg die gesamte negative reelle Achse samt Ursprung im Gegenuhrzeigersinn umläuft.

2.113 Corollar: $\mathcal{T}$ *ist ein isometrischer Isomorphismus von* ℓ^∞ *nach* $\ell^{1\prime}$.

Folglich ist der Dualraum von ℓ^1 identifizierbar mit ℓ^∞. Die Umkehrung ist natürlich auch hier wieder falsch. Jedes Element von ℓ^1 liefert zwar ein Funktional aus $\ell^{\infty\prime}$ vermöge der durch (2.54) definierten Abbildung $\mathcal{T}$, letztere ist hier jedoch nicht surjektiv. Auch hier garantiert Satz 2.55 die Existenz von Funktionalen aus der Menge $\ell^{\infty\prime} \setminus \mathcal{T}\ell^1$; diese lassen sich jedoch – nicht untypisch für Produkte aus dem Umfeld des Auswahlaxioms – nicht konstruktiv explizit angeben[142]. Immerhin läßt sich die Gesamtheit dieser Funktionale trotz allem schön charakterisieren.

Denn auch der dritte der oben erwähnten Sätze läßt sich in derselben Weise spezialisieren, allerdings nicht ohne ein wenig Vorarbeit. Hierfür sei μ wieder das Zählmaß auf $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$. Dann ist $\mathfrak{ba}(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mu)$ der Raum der beschränkten additiven Funktionen auf $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$. Bevor dieser nun als Dualraum von ℓ^∞ etabliert werden kann, muß mit seiner Hilfe ein Integral für die Elemente von ℓ^∞ konstruiert werden[143]. Das geschieht in der üblichen Weise, indem man zunächst geeignete einfache Elemente von ℓ^∞ betrachtet[144]. Für jede Familie $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ komplexer Zahlen und jede Familie $(\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n)$ paarweise disjunkter Teilmengen von $\mathbb{N}$ erhält man eine solche einfache Folge gemäß

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{\mathsf{A}_j},$$

wobei mit χ_{A_j} jeweils die charakteristische Funktion der Menge A_j bezeichnet sei, also eine Folge $(\chi_{\mathsf{A}_j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\chi_{\mathsf{A}_j,n} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n \in \mathsf{A}_j \\ 0 & \text{für} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \mathsf{A}_j. \end{cases}$$

Jedes $x \in \ell^\infty$ läßt sich als Grenzwert einer geeigneten Folge einfacher Folgen darstellen. Für jedes $\nu \in \mathfrak{ba}(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mu)$, definiert man dann ein Integral für einfache Folgen durch

$$\int_{\mathbb{N}} \varphi \, d\nu = \int_{\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{\mathsf{A}_j} d\nu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \nu(\mathsf{A}_j).$$

Das durch dieses Integral definierte lineare Funktional $t(\nu)$ mit $t(\nu)\,\varphi = \int \varphi \, d\nu$ ist stetig, denn es gilt

$$\|t(\nu)\| = \sup_{\|\varphi\|_\infty \leqq 1} \left| \int_{\mathbb{N}} \varphi \, d\nu \right| = \sup_{\|\varphi\|_\infty \leqq 1} \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \nu(\mathsf{A}_j) \right| \leqq \sup_{\|\varphi\|_\infty \leqq 1} \sum_{j=1}^{n} |\, \alpha_j \, \nu(\mathsf{A}_j)\,|$$

[142] Es ist möglich, Modelle der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre zu konstruieren, in denen $\mathscr{L}^1$ und $\mathscr{L}^{\infty\prime}$ und damit auch ℓ^1 und $\ell^{\infty\prime}$ isometrisch isomorph sind; allerdings gilt dort das Auswahlaxiom nicht, mit den bereits erwähnten sich daraus ergebenden, schwer akzeptablen Konsequenzen, insbsondere auch der Ungültigkeit des Satzes von Hahn-Banach. Folgt man der hier vertretenen platonistischen Auffassung der Mathematik, kann man mit solchen Artefakten des Konstruktivismus wenig anfangen.

[143] Genaueres dazu findet man in [69].

[144] Vergleiche Abschnitt 1.2.2.

$$\leqq \sup_{\|\varphi\|_\infty \leqq 1} \max_{1 \leqq j \leqq n} |\alpha_j| \sum_{j=1}^{n} |\nu(\mathrm{A}_j)| \leqq \|\nu\|_1.$$

Das obige Integral ist somit stetig auf ℓ^∞ fortsetzbar, indem man für $x = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{x,n} \in \ell^\infty$

$$\int_{\mathbb{N}} x\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} \varphi_{x,n}\, d\mu$$

setzt. Entsprechend erhält man für jedes $\nu \in \mathfrak{ba}(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ein stetiges lineares Funktional $\mathcal{T}(\nu)$ mit $\mathcal{T}(\nu)\, x = \int x\, d\nu$. Damit ist auch die Frage nach $\ell^{\infty\prime}$ geklärt.

2.114 Satz: *Die Abbildung* $\mathcal{T} : \mathfrak{ba}(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mu) \longrightarrow \ell^{\infty\prime}$ *mit*

$$\mathcal{T}(\eta)\, x = \int x\, d\eta$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Der Dualraum von ℓ^∞ ist demgemäß mit $\mathfrak{ba}(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mu)$ identifizierbar[145].

Es bleibt auch hier noch zu klären, wessen Dualraum denn dann ℓ^1 ist. Mit Hilfe der durch (2.54) definierten Abbildung kann man sehr einfach einen solchen Raum angeben.

2.115 Satz: *Die Abbildung* $\mathcal{T} : \ell^1 \longrightarrow c_0'$ *mit*

$$\mathcal{T}(x)\, y = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\, y_n$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis: 1. Für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ gilt nach Ungleichung 2.80

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n\, y_n = \|\, x\, y\,\|_1 \leqq \|x\|_1\, \|y\|_\infty < \infty.$$

Ist $\mathcal{T}(x) = 0$ und $e_n = (\delta_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$, dann gilt $\mathcal{T}(x)\, e_n = x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $x = 0$. Also ist $\mathcal{T}$ injektiv.

2. Nun sei $f \in c_0'$ und $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = f(e_n)$, dann ist

$$\mathcal{T}(x)\, e_n = \sum_{m=0}^{\infty} x_m\, \delta_{nm} = x_n = f(e_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\mathcal{T}(x)$ und f stetige lineare Funktionale sind, gilt somit nach Satz 2.26 $f = \mathcal{T}(x) \restriction \operatorname{span}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit auch $f = \mathcal{T}(x)$ auf $\overline{\operatorname{span}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \ell^1$. Also ist $\mathcal{T}$ surjektiv. □

145 Eine ausführliche Diskussion des Raums $\ell^{\infty\prime}$ mit vielen weiteren Eigenschaften liefert [128].

Damit ist c_0' mit ℓ^1 identifizierbar, das heißt, c_0 ist ein Lindenstrauss-Raum.

Als nächstes wenden wir uns ähnlichen Isomorphiebetrachtungen wie im vorigen Abschnitt zu, wodurch die besondere Rolle der Zahl 2, wie sie sich dort stellenweise bereits andeutete, weiter untermauert wird. Dazu eine weitere

2.116 Definition: $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Schauder-Basis im Banachraum $\mathcal{E}$ und $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis im Banachraum $\mathcal{F}$; außerdem sei $1 \leqq \lambda < \infty$. Die Basen $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißen

(i) λ-*äquivalent*, wenn es einen Isomorphismus $\mathcal{T} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ gibt mit $\mathcal{T}e_n = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\|\mathcal{T}\|\,\|\mathcal{T}^{-1}\| \leqq \lambda$;

(ii) *äquivalent*, wenn sie λ-äquivalent sind mit $\lambda \geqq 1$.

Ein wichtiges, uns gleich interessierendes Beispiel für nicht äquivalente Basen sind die kanonischen Basen von ℓ^p und ℓ^q für $p \neq q$, was unmittelbar aus Corollar 2.107 ersichtlich ist. – Im folgenden sei μ ein σ-additives Maß auf einem Raum M.

2.117 Satz: *Für $1 \leqq p < 2$ und $2 < p < \infty$ sind ℓ^p und $\mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$ nicht isomorph.*

Beweis: Nach Satz 2.98 genügt es, anstelle eines beliebigen σ-additiven Maßes ein Wahrscheinlichkeitsmaß zu betrachten. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.

1. Wir zeigen zunächst, daß ℓ^2 isometrisch isomorph zu einem Unterraum von $\mathscr{L}^p$ ist. Diesen konstruieren wir als Abschluß der linearen Hülle einer Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Gaußschen Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathrm{M}, \mathfrak{S}, \gamma)$ mit Gaußschem Wahrscheinlichkeitsmaß γ. Es gilt $\|g_i\|_p = \|g_j\|_p$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ und alle $1 \leqq p < \infty$. Die Abbildung $\mathcal{T} : \ell^2 \longrightarrow \overline{\operatorname{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ sei definiert durch

$$\mathcal{T}\,a = \frac{1}{\|g_j\|_p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, g_n$$

für $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\mathcal{T}$ ist ein Isomorphismus, außerdem folgt aus den Eigenschaften der Gauß-Verteilung

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathrm{M}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, g_n(t) \right|^p d\nu \right)^{1/p} = \|a\|_2\, \|g_j\|_p$$

und damit $\|\,\mathcal{T}\,a\,\|_p = \|a\|_2$. Folglich ist $\mathcal{T}$ auch eine Isometrie.

2. Als nächstes zeigen wir, daß für $1 \leqq p < \infty$ und $p \neq 2$ der Raum ℓ^2 nicht isomorph zu einem Unterraum des Raums ℓ^p ist. Dazu sei $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die kanonische Schauder-Basis in ℓ^2 und $x_n = \mathcal{T}e_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Da die Anwendung beschränkter Operatoren auf schwach konvergente Folgen stets wieder auf schwach konvergente Folgen führt, ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Nullfolge. Zu dieser gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Teilfolge $(x_{n_j})_{n_j\in\mathbb{N}}$, die $(\,1 + \varepsilon\,)$-äquivalent zur kanonischen Schauder-Basis $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Um eine solche zu konstruieren[146], setzt man zunächst $n_1 = q_0 = 0$ sowie $x = \sum_{n=0}^{\infty} e_n^*(x)\, e_n$, wählt ein beliebiges

[146] Der erste Teil der hier beschriebenen Konstruktion verwendet die *Methode des gleitenden Buckels* (im

$\varepsilon_1 > 0$, findet ein q_2, sodaß

$$\left[\sum_{j=q_1+1}^{\infty}\left|e_j^*\left(\frac{x_{n_1}}{\|x_{n_1}\|_p}\right)\right|^p\right]^{1/p} < \frac{\varepsilon_1}{2}$$

gilt und setzt dann $y_1 = \sum_{j=0}^{q_1} e_j^*(x_{n_1}/\|x_{n_1}\|_p)\, e_j$. Damit ist $\lim_{j\to\infty} e_j^*(x_n/\|x_n\|_p) = 0$, folglich gibt es ein $n_2 > n_1$, sodaß für beliebiges $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$

$$\left[\sum_{j=0}^{q_2}\left|e_j^*\left(\frac{x_{n_2}}{\|x_{n_2}\|_p}\right)\right|^p\right]^{1/p} < \frac{\varepsilon_2}{2}$$

gilt. Auch hier findet man ein $q_2 > q_1$ mit

$$\left[\sum_{j=q_2+1}^{\infty}\left|e_j^*\left(\frac{x_{n_2}}{\|x_{n_2}\|_p}\right)\right|^p\right]^{1/p} < \frac{\varepsilon_2}{2}$$

und setzt anschließend $y_2 = \sum_{j=p_1+1}^{q_2} e_j^*(x_{n_2}/\|x_{n_2}\|_p)\, e_j$. Hierfür gilt

$$\begin{aligned}\left\|y_2 - \frac{x_{n_2}}{\|x_{n_2}\|_p}\right\|_p &= \left\|\sum_{j=0}^{q_2} e_j^*\left(\frac{x_{n_2}}{\|x_{n_2}\|_p}\right) e_j - \sum_{j=0}^{\infty} e_j^*\left(\frac{x_{n_2}}{\|x_{n_2}\|_p}\right) e_j\right\|_p \\ &\leqq \left\|\sum_{j=0}^{q_2} e_j^*\left(\frac{x_{n_2}}{\|x_{n_2}\|_p}\right) e_j\right\|_p + \left\|\sum_{j=0}^{\infty} e_j^*\left(\frac{x_{n_2}}{\|x_{n_2}\|_p}\right) e_j\right\|_p < \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2} < \varepsilon_2.\end{aligned}$$

Diese Konstruktion setzt man immerzu fort und erhält so eine Folge

$$(y_j)_{j\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} e_j^*\left(\frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|_p}\right) e_i\right)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Nun gibt es einerseits für alle $j \in \mathbb{N}$ ein ε_j, sodaß

$$1 - \varepsilon_j \leqq \|y_j\|_p \leqq 1 + \varepsilon_j,$$

anderseits gilt für jede Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=0}^{\infty} a_j y_j\right\|_p &= \left\|\sum_{j=0}^{\infty} a_j \sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} e_i^*\left(\frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|_p}\right) e_i\right\|_p \\ &= \left[\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^p \sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n}\left|e_i^*\left(\frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|_p}\right)\right|^p\right]^{1/p} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^p \,\|y_j\|_p^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

englischen Sprachraum *gliding hump argument*), ein klassisches Verfahren der Funktionalanalysis, das auch bei vielen anderen Beweisen auftaucht und auf Banach zurückgeht.

Daraus folgt

$$(1 - \sup_{j \in \mathbb{N}} \varepsilon_j) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^p \right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^p \, \|y_j\|_p^p \right)^{1/p} \leqq (1 + \sup_{j \in \mathbb{N}} \varepsilon_j) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^p \right)^{1/p}$$

und mit $1/p + 1/q = 1$ sowie den Ungleichungen 2.80 und 2.81 weiter

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(y_j - \frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|_p} \right) \right\|_p &\leqq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \left\| y_j - \frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|_p} \right\|_p \\
&\leqq \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^p \right)^{1/p} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(y_j - \frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|_p} \right)^q \right]^{1/q} \\
&\leqq \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j^q \right)^{1/q} .
\end{aligned}$$

Insgesamt führt das auf

$$\begin{aligned}
\left[1 - \sup_{j \in \mathbb{N}} \varepsilon_j - \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j^q \right)^{1/q} \right] \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^p \right)^{1/p} &\leqq \left\| \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|_p} \right\|_p \\
&\leqq \left[1 + \sup_{j \in \mathbb{N}} \varepsilon_j + \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j^q \right)^{1/q} \right] \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^p \right)^{1/p} .
\end{aligned}$$

Wählt man nun ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\frac{1 + \sup_{j \in \mathbb{N}} \varepsilon_j + \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j^q \right)^{1/q}}{1 - \sup_{j \in \mathbb{N}} \varepsilon_j - \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j^q \right)^{1/q}} \leqq 1 + \varepsilon$$

dann folgt

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|_p} \right\|_p \leqq 1 + \varepsilon,$$

und die Teilfolge $(x_{n_j}/\|x_{n_j}\|_p)_{j \in \mathbb{N}}$ hat damit genau die gewünschten Eigenschaften. Wäre nun ℓ^2 isometrisch isomorph zu einem Unterraum von ℓ^p, dann gäbe es eine Abbildung $\mathcal{T} : \ell^2 \longrightarrow \ell^p$, sodaß die Einschränkung von $\mathcal{T}^{-1}$ auf den betreffenden Unterraum von ℓ^p ein Isomorphismus ist. Daraus folgt $\|\mathcal{T}\| \, \|\mathcal{T}^{-1}\| < \infty$, und somit wäre die Folge $(x_{n_j}/\|x_{n_j}\|_p)_{j \in \mathbb{N}}$ auch äquivalent zur kanonischen Basis von ℓ^2. Das zöge aber andererseits auch die Äquivalenz der kanonischen Basen von ℓ^2 und ℓ^p nach sich – ein Widerspruch.

Aus 1. und 2. folgt unmittelbar die Behauptung. □

Als Zusammenfassung läßt sich nun eine weitgehende Isomorphie-Aussage für ℓ^p- und $\mathscr{L}^p$-Räume formulieren.

2.118 Corollar: *Die Räume $\ell^p, \ell^q, \mathscr{L}^p(\mathrm{M}, \mu)$ und $\mathscr{L}^q(\mathrm{M}, \mu)$ sind für $1 \leqq p, q < \infty, p \neq q$ sowie $p, q \neq 2$ jeweils paarweise nicht isomorph.*

Dabei sind die explizit ausgenommenen Sonderfälle ℓ^2 und $\mathscr{L}^2(\mathrm{M}, \mu)$ nicht nur isomorph, sondern auch isometrisch; wir kommen darauf im Abschnitt 2.3, im nächsten Kapitel sowie in Band 2 zurück.

Die Räume $\ell^1(\mathrm{M})$ und $\ell^\infty(\mathrm{M})$ stellen wenig überraschend ebenfalls Sonderfälle dar; das hat sich in Gestalt der Sätze 2.109, 2.114 und 2.115 bereits angedeutet und soll nun weiter untermauert werden, wobei gleichzeitig zwei sehr allgemeine Eigenschaften beliebiger Banachräume zur Sprache kommen. Zunächst kann man zeigen, daß jeder Banachraum als Quotient in einem Raum $\ell^1(\mathrm{M})$ mit geeigneter Menge M auftritt.

2.119 Lemma: *Jeder Banachraum ist isometrisch isomorph zu einem Quotienten eines Raums $\ell^1(\mathrm{M})$.*

Beweis: Es seien $\mathcal{E}$ ein Banachraum und M eine dichte Teilmenge der Einheitskugel $\mathrm{B}_{\mathcal{E}}$ in $\mathcal{E}$. Nach dem Wohlordnungssatz läßt sich der Menge M ein Ordnungstyp mit zugehöriger Ordinalzahl Γ zuordnen; damit schreiben wir $\mathrm{M} = \{ x_\gamma \mid \gamma \leqq \Gamma \}$. Dazu definieren wir die Abbildung $\mathcal{A} : \ell^1(\mathrm{M}) \longrightarrow \mathcal{E}$ durch

$$\mathcal{A}\,\xi = \sum_{\gamma \leqq \Gamma} \xi_\gamma\, x_\gamma$$

für $\xi = (\xi_\gamma)_{\gamma \leqq \Gamma}$. Diese ist nach Konstruktion linear, außerdem gilt für alle $\xi \in \ell^1(\mathrm{M})$

$$\|\,\mathcal{A}\,\xi\,\| \leqq \sum_{\gamma \leqq \Gamma} \|\,\xi_\gamma\, x_\gamma\,\| = \sum_{\gamma \leqq \Gamma} |\xi_\gamma|\,\|x_\gamma\| \leqq \sum_{\gamma \leqq \Gamma} |\xi_\gamma| = \|\xi\|_1 < \infty,$$

also ist $\mathcal{A}$ beschränkt. Nun definieren wir induktiv eine Folge $(x_{\gamma_n})_{n \in \mathbb{N}}$ in M: Zu $1/2 \geqq \varepsilon > 0$ und $x \in \mathrm{B}_{\mathcal{E}}$ wählen wir zunächst γ_1 so, daß $\|\,x - x_{\gamma_1}\| < \varepsilon$, dann ist $\varepsilon^{-1}(\,x - x_{\gamma_1}\,) \in \mathrm{B}_{\mathcal{E}}$. Da M dicht in $\mathrm{B}_{\mathcal{E}}$ ist, können wir $\gamma_2 > \gamma_1$ so wählen, daß $\|\,\varepsilon^{-1}(\,x - x_{\gamma_1}\,) - x_{\gamma_2}\| < \varepsilon$, dann ist $\varepsilon^{-2}(\,x - x_{\gamma_1}) - \varepsilon^{-1} x_{\gamma_2} \in \mathrm{B}_{\mathcal{E}}$. Nach n Schritten finden wir auf diese Weise ein $\gamma_n > \gamma_{n-1} > \ldots > \gamma_1$ mit $\|\,\varepsilon^{-n+1}(\,x - x_{\gamma_1}\,) - \varepsilon^{-n+2} x_{\gamma_2} - \ldots - \varepsilon^{-1} x_{\gamma_{n-1}} - x_{\gamma_n}\,\| < \varepsilon$ und $\varepsilon^{-n}(\,x - x_{\gamma_1}\,) - \varepsilon^{-n+1} x_{\gamma_2} - \ldots - \varepsilon^{-1} x_{\gamma_n} \in \mathrm{B}_{\mathcal{E}}$. Wiederholen wir das Verfahren immerfort, erhalten wir eine Folge $(x_{\gamma_n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\left\|\, x - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{\,n-1}\, x_{\gamma_n} \right\| = \lim_{n \to \infty} \varepsilon^{\,n} = 0$$

und daher mit

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{\,n-1}\, x_{\gamma_n}.$$

Wählen wir $y = (y_\gamma)_{\gamma \leqq \Gamma}$ mit $y_\gamma = 0$ für $\gamma \neq \gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$ und $y_{\gamma_n} = \varepsilon^n$ für $n \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$\|y\|_1 = \sum_{\gamma \leqq \Gamma} |y_\gamma| = \sum_{n=1}^{\infty} |y_{\gamma_n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n = \frac{1}{1-\varepsilon} - 1 = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \leqq 1,$$

also gehört y zur Einheitskugel $\mathrm{B}_{\ell^1(\mathrm{M})}$ von $\ell^1(\mathrm{M})$. Außerdem gilt

$$\mathcal{A}\, y = \sum_{\gamma \leqq \Gamma} y_\gamma\, x_\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1}\, x_{\gamma_n} = x$$

und damit $\mathcal{A}\,\mathrm{B}_{\ell^1(\mathrm{M})} = \mathrm{B}_{\mathcal{E}}$. Daraus folgt

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{\xi \in \mathrm{B}_{\ell^1(\mathrm{M})}} \|\mathcal{A}\,\xi\| = \sup_{x \in \mathrm{B}_{\mathcal{E}}} \|x\| = 1.$$

Definieren wir nun die Abbildung $\mathcal{T} : \ell^1(\mathrm{M})/\ker\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ durch $\mathcal{T}[\xi] = \mathcal{A}\,\xi$ für $[\xi] = \xi + \ker\mathcal{A}$ und $\xi \in \ell^1(\mathrm{M})$, dann ist diese linear und bijektiv, und für alle $\xi \in \ell^1(\mathrm{M})$ und alle $\eta \in [\xi]$ ist

$$\|\mathcal{T}[\xi]\| = \|\mathcal{A}\,\xi\| \leqq \|\mathcal{A}\|\,\|\xi\|_1 = \|\xi\|_1.$$

Folglich ist $\mathcal{T}$ ein isometrischer Isomorphismus, das heißt, $\mathcal{E}$ ist isometrisch isomorph zu $\ell^1(\mathrm{M})/\ker\mathcal{A}$. □

Hieraus ergibt sich unmittelbar ein

2.120 Corollar: *Jeder separable Banachraum ist isometrisch isomorph zu einem Quotienten des Raums ℓ^1.*

Beweis: Wähle für M eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathrm{B}_{\mathcal{E}}$. □

Etwas ähnliches gilt für den zweiten erwähnten Fall, denn jeder Banachraum ist als Unterraum in einem Raum $\ell^\infty(\mathrm{M})$ mit geeigneter Menge M enthalten[147]; das ist Gegenstand von folgendem fundamentalen

2.121 Satz: *Jeder Banachraum ist isometrisch isomorph zu einem Unterraum eines Raums $\ell^\infty(\mathrm{M})$.*

Beweis: $\mathcal{E}$ sei ein beliebiger Banachraum und M eine dichte Teilmenge der abgeschlossenen Einheitskugel in $\mathcal{E}'$. Wir definieren die Abbildung $j : \mathcal{E} \longrightarrow \ell^\infty(\mathrm{M})$ durch $j_x(f) := f(x)$ für alle $f \in \mathrm{M}$. Die Menge ran j ist ein Unterraum von $\mathcal{E}$. Gilt $j_x(f) = j_y(f)$ für alle $f \in \mathrm{M}$, so

[147] Die Aussage läßt sich auf beliebige metrische Räume ausdehnen. Etwas analoges gilt auch für Räume stetiger reeller Funktionen; das ist die Aussage des Satzes von Banach-Mazur: *Jeder normierte Vektorraum ist Unterraum eines Raums $C(\mathrm{K})$ mit einer geeigneten kompakten Hausdorffschen Menge* K, *und jeder separable normierte Vektorraum ist Unterraum eines Raums $C(\mathrm{K})$ mit einem geeigneten kompakten metrischen Raum* K *und damit Unterraum von* $C([0,1])$ [22].

folgt $f(x) = f(y)$ für alle $f \in \mathrm{M}$ und damit $x = y$, das heißt, j ist injektiv auf $\mathcal{E}$, also ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{E}$ und ran j. Außerdem gilt

$$\| j_x \| = \sup \{ |f(x)| \mid f \in \mathrm{M}, \|f\| = 1 \} = \|x\|,$$

für alle $x \in \mathcal{E}$, folglich ist j sogar eine Isometrie. □

Natürlich gilt das soeben bewiesene Resultat auch für den einfachsten Vertreter der ℓ^∞-Räume, dennoch lohnt es sich, diesen Spezialfall gesondert zu betrachten, denn hier kommen zwei Details dazu.

2.122 Satz: *(i) Jeder separable Banachraum ist isometrisch isomorph zu einem Unterraum des Raums ℓ^∞.*

(ii) Jeder Banachraum, der topologischer Dualraum eines separablen Banachraums ist, ist isometrisch isomorph zu einem Unterraum des Raums ℓ^∞.

Beweis: (i) Ist $\mathcal{E}$ ein separabler Banachraum, dann gibt es eine dichte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}$ und nach Satz 2.55 für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $f_n \in \mathcal{E}'$ mit $\|f_n\| = 1$ und $f_n(x_n) = \|x_n\|$. Nun sei die Abbildung $\mathcal{T}$ auf $\mathcal{E}$ definiert durch $\mathcal{T}x = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für $x \in \mathcal{E}$. Nach Konstruktion ist $\mathcal{T}$ linear und wegen

$$\| \mathcal{T} x \|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leqq \|f_n\| \, \|x\| = \|x\| \tag{2.55}$$

eine stetige Abbildung von $\mathcal{E}$ nach ℓ^∞. Außerdem ist

$$\| \mathcal{T} x_n \|_\infty \geqq |f_n(x_n)| = \|x_n\| \tag{2.56}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus (2.55) und (2.56) folgt $\| \mathcal{T} x_n \|_\infty = \|x_n\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und aufgrund der Stetigkeit von $\mathcal{T}$ somit $\| \mathcal{T} x \|_\infty = \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{E}$. Daher ist $\mathcal{T} : \mathcal{E} \longrightarrow \operatorname{ran} \mathcal{T}$ ein isometrischer Isomorphismus. Da $\operatorname{ran} \mathcal{T}$ ein Unterraum von ℓ^∞ ist, folgt die Behauptung.

(ii) Wieder sei $\mathcal{E}$ ein separabler Banachraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine dichte Folge in der Einheitskugel von $\mathcal{E}$. Nun definieren wir die Abbildung $\mathcal{T} : \mathcal{E}' \longrightarrow \ell^\infty$ durch

$$\mathcal{T} \varphi = (\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{E}'$. Diese ist nach Konstruktion linear, und es gilt

$$\| \mathcal{T} \varphi \|_\infty = \|(\varphi(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup \left(|\varphi(x_n)|\right)_{n\in\mathbb{N}} = \|\varphi\| < \infty.$$

Folglich ist einerseits $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ für alle $\varphi \in \mathcal{E}'$, also $\operatorname{ran} \mathcal{T}$ ein Unterraum von ℓ^∞, und anderseits $\mathcal{T}$ beschränkt, also eine Isometrie von $\mathcal{E}'$ nach $\operatorname{ran} \mathcal{T}$. □

Der Fall $p = \infty$ weist noch andere besondere Eigenschaften auf; ein paar davon schauen wir uns nun an. Wir brauchen dazu unter anderem drei Definitionen, wobei mit der ersten wieder einmal ein algebraisch wohlbekannter Begriff topologisiert wird.

2.123 Definition: (i) Zwei algebraisch komplementäre Unterräume $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ eines metrischen Vektorraums $\mathcal{E}$ heißen *topologisch komplementär*, wenn die Abbildung

$\mathcal{F} : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \longrightarrow \mathcal{E}$ mit $\mathcal{F}(x_1, x_2) := x_1 + x_2$ ein Isomorphismus ist. In diesem Fall heißt $\mathcal{U}_1$ *topologisches Komplement* von $\mathcal{U}_2$ und entsprechend $\mathcal{U}_2$ topologisches Komplement von $\mathcal{U}_1$.

(ii) Ein Unterraum $\mathcal{U}$ von $\mathcal{E}$ heißt *komplementiert*, wenn es in $\mathcal{E}$ ein topologisches Komplement zu $\mathcal{U}$ gibt.

Soweit keine Verwechslungsgefahr besteht, ist im folgenden mit „Komplement“ stets „topologisches Komplement“ gemeint. – Punkt (ii) von Definition 2.123 wäre wenig sinnvoll, wenn es dabei um algebraische Komplemente ginge, denn Satz 2.10 garantiert natürlich, daß alle Unterräume eines jeden Vektorraums im algebraischen Sinn komplementiert sind. Dagegen gibt es sehr wohl Banachräume mit im topologischen Sinn nicht komplementierten abgeschlossenen Unterräumen; das ist sogar der Normalfall, und die sehr speziellen Ausnahmen hierzu werden uns von Abschnitt 2.3 an ganz generell und aus der gerade diskutierten Perspektive betrachtet in Abschnitt 2.3.2 im besonderen tiefschürfend beschäftigen. Der Raum ℓ^∞ gehört nicht zu diesen Ausnahmen. Um das zu sehen, braucht man zunächst ein

2.124 Lemma:[148] *Zu jeder abzählbaren Menge* A *gibt es eine überabzählbare Teilmenge* $\mathfrak{C}$ *von* $\mathfrak{P}(\mathrm{A})$, *sodaß alle Elemente von* $\mathfrak{C}$ *jeweils paarweise endlichen Durchschnitt besitzen.*

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es eine bijektive Abbildung $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, hat die Menge $\mathfrak{C} = \{\, \mathrm{A}_r \mid r \in \mathbb{R}\,\}$ mit $\mathrm{A}_r = \left\{\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = r \,\right\} \subset \mathrm{A}$ die gewünschte Eigenschaft. $\square$

Damit beweisen wir den folgenden

2.125 Satz:[149] c_0 *ist in* ℓ^∞ *nicht komplementiert.*

Beweis: $\mathcal{B} : \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty$ sei eine beschränkte Abbildung mit $\mathcal{B}x = 0$ für alle $x \in c_0$. Wir zeigen zunächst, daß es eine unendliche Teilmenge A von $\mathbb{N}$ gibt, für die $\mathcal{B}y = 0$ gilt für alle $y \in \ell^\infty$ mit $\operatorname{supp} y \subsetneqq \mathrm{A}$. Andernfalls gäbe es zu jedem Element A_r der Menge $\mathfrak{C} = \{\, \mathrm{A}_r \mid r \in \mathbb{R}\,\}$ aus dem Beweis von Lemma 2.124 ein $x_r \in \ell^\infty$ mit $\operatorname{supp} x_r \subsetneqq \mathrm{A}_r$ und $\mathcal{B}x_r \neq 0$, also $x_r \notin c_0$. Dabei kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\|x_r\|_\infty = 1$ für alle $r \in \mathbb{R}$ vorausgesetzt werden. Da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodaß die Menge $\mathrm{R}_n = \{\, r \in \mathbb{R} \mid x_{r,n} \neq 0\}$ überabzählbar ist. Folglich gibt es ein $j \in \mathbb{N}$, sodaß auch die Menge $\mathrm{R}_{n,j} = \{\, r \in \mathbb{R} \mid x_{r,j} \geqq 1/j\,\}$ überabzählbar ist. Für jedes $r \in \mathrm{R}_{n,j}$ setzen wir $\zeta_r = \overline{x_{r,j}} \,/\, |x_{r,j}|$; außerdem sei A eine endliche Teilmenge von $\mathrm{R}_{n,j}$ und $y = \sum\limits_{i\in\mathrm{A}} \zeta_i\, x_i$. Wie oben gezeigt ist $|\operatorname{supp} x_q \cap \operatorname{supp} x_r\,| < \infty$ für $q, r \in \mathrm{R}_n$, $q \neq r$; daher gilt $y = a + b$ mit einem Anteil $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\,\zeta_i\, x_{i,n}\,| = \|x_i\|_\infty = 1$$

[148] Dieses Resultat stammt von Sierpiński [343].

[149] Das ist ein Resultat von Phillips [287] und Sobzcyk [347]. Der hier geführte Beweis findet sich erstmals bei Whitley [388], aufbauend auf Arbeiten von Nakamura und Kakutani [265] sowie Pełczyński und Sudakov [285], und wurde später von Albiac und Kalton in eine übersichtliche Gestalt gebracht [4].

sowie einem weiteren Anteil b mit nur endlich vielen nicht verschwindenden Folgengliedern. Daraus folgt $\mathcal{B}\, y = \mathcal{B}\, a$, also auch

$$\|\,\mathcal{B}\, y\,\|_\infty = \|\,\mathcal{B}\, a\,\|_\infty \leqq \|\mathcal{B}\|$$

und somit

$$|(\mathcal{B}\, y)_n| = \sum_{i \in \mathrm{A}} \zeta_i\, x_{i,n} = \sum_{i \in \mathrm{A}} |x_{i,n}| = \frac{|\mathrm{A}|}{j} \leqq \|\mathcal{B}\|.$$

Dann ist aber $|\mathrm{A}| \leqq j\,\|\mathcal{B}\|$ für alle endlichen Teilmengen von $\mathrm{R}_{n,j}$, und $\mathrm{R}_{n,j}$ wäre endlich – ein Widerspruch.
Nun nehmen wir an, es gäbe eine stetige Projektion $\mathcal{P}$ von ℓ^∞ auf c_0. Wie soeben gezeigt, gäbe es dann zu $\mathcal{Q} = \mathbf{1} - \mathcal{P}$ eine unendliche Menge $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}$ mit $\mathcal{Q}\, x = 0$ für alle $x \in \ell^\infty$ mit $\operatorname{supp} x \subseteqq \mathrm{A}$, und es wäre $\mathcal{P}\, x = x$ und damit $x \in c_0$ für alle $x \in \ell^\infty$ mit $\operatorname{supp} x \subseteqq \mathrm{A}$ – ein Widerspruch. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Bevor wir den gerade aufgenommenen Gedankengang weiterverfolgen, halten wir nebenbei einen Sachverhalt von weitreichender Bedeutung fest: Die Existenz von Banachräumen mit nicht abgeschlossenen, komplementierten Unterräumen zeigt, daß der Satz von Hahn-Banach nur für lineare Funktionale, im allgemeinen jedoch nicht für lineare Abbildungen in beliebige andere Banachräume gilt. Denn die Aussage, der Banachraum $\mathcal{F}$ sei ein abgeschlossenener, nicht komplementierter Unterraum des Banachraums $\mathcal{E}$ ist äquivalent dazu, daß es keine beschränkte Projektion von $\mathcal{E}$ auf $\mathcal{F}$ gibt. Das bedeutet umgekehrt, daß die identische Abbildung auf $\mathcal{F}$ nicht zu einer beschränkten Abbildung von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{F}$ fortgesetzt werden kann, womit ein einfaches Gegenbeispiel vorliegt.

Es gibt jedoch sehr wohl spezielle Banachräume, in denen eine dem Satz von Hahn-Banach vergleichbare Aussage für allgemeine beschränkte lineare Abbildungen gilt. Das ist Gegenstand des zweiten neu einzuführenden Begriffs, denn hier geht es nun um Banachräume, auf denen jede beschränkte Abbildung in einen beliebigen Unterraum eines beliebigen anderen Banachraums zu einer beschränkten linearen Abbildung in den gesamten anderen Banachraum fortgesetzt werden kann.

2.126 Definition: Ein Banachraum $\mathcal{E}$ heißt *injektiv*, wenn es zu jedem Banachraum $\mathcal{F}$, der $\mathcal{E}$ als Unterraum enthält, eine beschränkte surjektive Projektion von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{E}$ gibt.

Ist $\mathcal{P}$ eine solche Projektion von einem Oberraum $\mathcal{F}$ von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}$, dann gilt einerseits $\mathcal{F} = \mathcal{P}\,\mathcal{F} \cup (\,\mathbf{1} - \mathcal{P}\,)\,\mathcal{F} = \mathcal{E} \cup (\,\mathbf{1} - \mathcal{P}\,)\,\mathcal{F}$, wegen $(\,\mathbf{1} - \mathcal{P}\,)\,\mathcal{P} = \mathcal{P} - \mathcal{P}^2 = \mathcal{P} - \mathcal{P} = 0$ andererseits aber auch $\mathcal{E} \cap (\,\mathbf{1} - \mathcal{P}\,)\,\mathcal{F} = \{0\}$ und damit $\mathcal{F} = \mathcal{E} \oplus (\,\mathbf{1} - \mathcal{P}\,)\,\mathcal{F}$. Folglich ist ein Banachraum genau dann injektiv, wenn er in jedem seiner Oberräume komplementiert ist. Damit ergibt sich für injektive Banachräume genau die oben erwähnte Fortsetzungseigenschaft für beschränkte lineare Abbbildungen. Allerdings handelt es sich dabei um eine ziemlich exklusive Gesellschaft, und die Frage nach einer Charakterisierung der Klasse der injektiven Banachräume war eines der großen klassischen Probleme der Funktionalanalysis. Ein Beispiel für eine solche Charakterisierung sei hier ohne Beweis aufgeführt: Ein Banachraum $\mathcal{E}$ ist genau dann injektiv, wenn jede Teilmenge der Menge aller abgeschlossenen Kugeln in $\mathcal{E}$, deren

Elemente paarweise nicht disjunkt sind, einen nichtleeren Durchschnitt besitzt[150]. Vertiefte Beschäftigung mit diesem Sachverhalt würde uns zu weit vom Weg abbringen[151]; stattdessen betrachten wir die wichtigste Unterklasse der injektiven Banachräume explizit.

2.127 Satz: *Für jede Menge* M *ist* $\ell^\infty(\mathrm{M})$ *injektiv.*

Beweis: Es seien $\mathcal{E}$ ein Banachraum, der $\ell^\infty(\mathrm{M})$ als Unterraum enthält, Γ eine Ordinalzahl mit $|\Gamma| = |\mathrm{M}|$ und $(e'_\gamma)_{\gamma \leqq \Gamma}$ die (abzählbare oder überabzählbare) Folge der Koordinatenfunktionale auf $\ell^\infty(\mathrm{M})$, das heißt, es gelte $e'_\gamma(x) = x_\gamma$ für alle $x = (x_\gamma)_{\gamma \leqq \Gamma} \in \ell^\infty(\mathrm{M})$. Ist $\mathcal{T}$ ein beschränkter Endomorphismus auf $\ell^\infty(\mathrm{M})$, dann betrachten wir die Folge $(f_\gamma)_{\gamma \leqq \Gamma}$ beschränkter Funktionale auf $\ell^\infty(\mathrm{M})$ mit $f_n(x) = e'_n(\mathcal{T}x)$ für $x \in \ell^\infty(\mathrm{M})$ und setzen diese nach Satz 2.55 zu einer Folge $(g_\gamma)_{\gamma \leqq \Gamma}$ von Funktionalen auf $\mathcal{E}$ fort. Wir erhalten die geforderte Projektion $\mathcal{P}$ von $\mathcal{E}$ nach $\ell^\infty(\mathrm{M})$ mit $\mathcal{P}z = (g_\gamma(z))_{\gamma \leqq \Gamma}$ für $z \in \mathcal{E}$. □

Ein weiteres Beispiel sei nur am Rande erwähnt. Ist $(\mathrm{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum mit σ-endlichem Maß, dann ist $\mathscr{L}^\infty(\mathrm{M}, \mu)$ ebenfalls injektiv[152]. – Satz 2.127 zeigt unmittelbar, daß es injektive Banachräume beliebig großer Mächtigkeit gibt. Auf der anderen Seite folgt aus Satz 2.122 (i), daß ein unendlichdimensionaler separabler Banachraum nur dann injektiv sein kann, wenn er isomorph zu einem komplementierten Unterraum von ℓ^∞ ist. Das hat weitreichende Konsequenzen, wie wir mit Hilfe der dritten der angekündigten Definitionen gleich sehen werden.

2.128 Definition: Ein unendlichdimensionaler Banachraum $\mathcal{E}$ heißt *prim*, wenn jeder unendlichdimensionale komplementierte Unterraum von $\mathcal{E}$ isomorph zu $\mathcal{E}$ ist.

Das nächste Resultat liefert ein Beispiel; zuvor verschaffen wir uns ein Lemma, das ob seiner Bedeutung hier und anderswo eigentlich mehr als nur ein solches darstellt; es wird im vorliegenden Abschnitt gleich in drei Fällen zum Einsatz kommen. Um es zu formulieren, betrachten wir Verallgemeinerungen der Räume c_0 und ℓ^p, $1 \leqq p \leqq \infty$. Zu einem beliebigen Banachraum $\mathcal{E}$ sei $\mathcal{E}^\infty := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}$ und

$$\mathfrak{l}^p(\mathcal{E}) := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}^\infty \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty \right\},$$

$$\mathfrak{l}^\infty(\mathcal{E}) := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}^\infty \;\middle|\; \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty \right\},$$

$$\mathfrak{c}_0(\mathcal{E}) := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}^\infty \;\middle|\; \lim_{n \to \infty} \|x_n\| = 0 \right\}.$$

Versieht man $\mathfrak{l}^p(\mathcal{E})$ mit der $\|\ \|_p$-Norm sowie $\mathfrak{c}_0(\mathcal{E})$ und $\mathfrak{l}^\infty(\mathcal{E})$ mit der Suprememumsnorm, so erhält man jeweils wieder Banachräume. Damit formulieren wir

[150] Dieses bemerkenswerte Resultat wurde von Nachbin entdeckt [264].

[151] Informationen hierzu findet man unter anderem in [399].

[152] Einen Beweis hierfür findet man in [4]. Dort wird Definition 2.126 noch etwas weitergeführt; fordert man für die beschränkte surjektive Projektion $\mathcal{P}$ zusätzlich $\|\mathcal{P}\| = 1$, so heißt der betrachtete Banachraum *isometrisch injektiv*. In [4] wird auch gezeigt, daß $\ell^\infty(\mathrm{M})$ und $\mathscr{L}^\infty(\mathrm{M}, \mu)$ unter den erwähnten Voraussetzungen isometrisch injektiv sind.

2.129 Pełczyńskis Zerlegungstechnik:[153] *$\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ seien zwei Banachräume, sodaß jeder der beiden Räume isomorph zu einem komplementierten Unterraum des jeweils anderen ist; außerdem gelte mindestens einer der beiden folgenden Sachverhalte.*
(i) $\mathcal{E} \cong \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$ *und* $\mathcal{F} \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}$;
(ii) $\mathcal{E} \cong \mathfrak{c}_0(\mathcal{E})$ *oder* $\mathcal{E} \cong \mathfrak{l}^p(\mathcal{E})$ *für ein* $1 \leqq p \leqq \infty$.
Dann sind $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ isomorph.

Beweis: Nach Voraussetzug gibt es Banachräume $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ mit $\mathcal{E} \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{X}$ und $\mathcal{F} \cong \mathcal{E} \oplus \mathcal{Y}$. Aus (i) folgt dann

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \oplus \mathcal{X} \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{E}$$

sowie

$$\mathcal{F} \cong \mathcal{E} \oplus \mathcal{E} \oplus \mathcal{Y} \cong \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$$

und damit $\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$. Aus (ii) folgt zunächst $\mathcal{E} \cong \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$ und damit wie soeben gezeigt $\mathcal{F} \cong \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$. Wegen $\mathfrak{c}_0(\mathcal{E}) \cong \mathfrak{c}_0(\mathcal{F} \oplus \mathcal{X}) \cong \mathfrak{c}_0(\mathcal{F}) \oplus \mathfrak{c}_0(\mathcal{X})$ und $\mathfrak{c}_0(\mathcal{F}) \cong \mathcal{F} \oplus \mathfrak{c}_0(\mathcal{F})$ erhält man aus $\mathcal{E} \cong \mathfrak{c}_0(\mathcal{E})$

$$\mathcal{E} \cong \mathfrak{c}_0(\mathcal{F}) \oplus \mathfrak{c}_0(\mathcal{X}) \cong \mathcal{F} \oplus \mathfrak{c}_0(\mathcal{F}) \oplus \mathfrak{c}_0(\mathcal{X}) \cong \mathcal{F} \oplus \mathfrak{c}_0(\mathcal{E}) \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{E}.$$

Analog liefern $\mathfrak{l}^p(\mathcal{E}) \cong \mathfrak{l}^p(\mathcal{F} \oplus \mathcal{X}) \cong \mathfrak{l}^p(\mathcal{F}) \oplus \mathfrak{l}^p(\mathcal{X})$ und $\mathfrak{l}^p(\mathcal{F}) \cong \mathcal{F} \oplus \mathfrak{l}^p(\mathcal{F})$ zusammen mit $\mathcal{E} \cong \mathfrak{l}^p(\mathcal{E})$

$$\mathcal{E} \cong \mathfrak{l}^p(\mathcal{F}) \oplus \mathfrak{l}^p(\mathcal{X}) \cong \mathcal{F} \oplus \mathfrak{l}^p(\mathcal{F}) \oplus \mathfrak{l}^p(\mathcal{X}) \cong \mathcal{F} \oplus \mathfrak{l}^p(\mathcal{E}) \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{E}.$$

In beiden Fällen erhält man insgesamt $\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$. □

Mit Hilfe dieses Verfahrens kommen wir nun zum angekündigten Beispiel und gleichzeitig zum wichtigsten Vertreter seiner Art.

2.130 Satz: *ℓ^∞ ist prim*[154].

Beweis: Es seien $\mathcal{E}$ ein unendlichdimensionaler komplementierter Unterraum von ℓ^∞ und $\mathcal{P} : \ell^\infty \longrightarrow \mathcal{E}$ eine beliebige beschränkte Projektion; außerdem sei $\beta\,\mathbb{N}$ die Stone-Čech-Kompaktifizierung von $\mathbb{N}$. Da jedes Element von ℓ^∞ als beschränkte Funktion auf $\mathbb{N}$ in eindeutiger Weise zu einer stetigen Funktion auf $\beta\,\mathbb{N}$ fortgesetzt werden kann, ist ℓ^∞ zu $C(\beta\,\mathbb{N})$ isomorph. $\beta\,\mathbb{N}$ ist ein kompakter Hausdorffraum, folglich ist $\mathcal{E}$ nicht reflexiv[155], also sind die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathcal{E}$ und damit auch die Projektion $\mathcal{P}$ nicht schwach kompakt. Nach einem Satz von Rosenthal[156] folgt daraus, daß $\mathcal{E}$ einen zu ℓ^∞ isomorphen

[153] Benannt nach ihrem Entdecker Aleksander Pełcziński [284].
[154] Erstmals bewiesen von Lindenstrauss [223].
[155] Das folgt aus einem Satz von Grothendieck: *Ist die Menge* K *ein kompakter Hausdorffraum, dann enthält* $C(\mathrm{K})$ *keinen unendlichdimensionalen, komplementierten reflexiven Unterraum* [122].
[156] Dieser Satz besagt folgendes: *Zu jedem injektiven Banachraum $\mathcal{E}$, jedem beliebigen Banachraum $\mathcal{F}$ und jeder linearen Abbildung $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ gibt es einen zu ℓ^∞ isomorphen Unterraum $\mathcal{X}$ von $\mathcal{E}$, sodaß die Abbildung $\mathcal{A} \restriction \mathcal{X}$ nach unten beschränkt ist* [318].

Unterraum $\mathcal{F}$ enthält, der nach Satz 2.127 in $\mathcal{E}$ komplementiert ist. Außerdem ist ℓ^∞ isomorph zu $\mathfrak{l}^\infty(\ell^\infty)$, und nach Satz 2.129 (ii) ist daher $\mathcal{E}$ isomorph zu ℓ^∞. □

Da nun also ℓ^∞ keine unendlichdimensionale komplementierte echte Unterräume besitzt, erhält man die nächste Aussage unmittelbar als

2.131 Corollar: *Unendlichdimensionale injektive Banachräume sind stets nicht separabel.*

Die Eigenschaft, prim zu sein, stellt übrigens eine sehr starke Forderung an Banachräume dar, und in der Tat hat man bis jetzt nur wenige Beispiele gefunden. So sind neben ℓ^∞ auch die Räume c_0 und ℓ^p für $1 \leqq p < \infty$ prim [284]. Das sind aber bereits alle bis jetzt bekannten „konventionellen" Beispiele. In neuerer Zeit wurden weitere Exemplare entdeckt; diese sind eher von exotischer Natur, wie etwa der von Gowers und Maurey konstruierte Banachraum $\mathcal{X}_\mathcal{S}$, bei dem es sich um die Vervollständigung des Raums c_{00} der komplexen Folgen mit nur endlich vielen nicht verschwindenden Folgengliedern unter Verwendung einer besonders raffiniert gewählten Norm $\| \ \|_{GM}$ handelt [115][157]. Um diese Norm zu konstruieren, braucht man eine ganze Reihe sehr spezieller Begriffe. Erstens betrachtet man die Funktion $f(x) = \log_2(x+1)$, die Menge q_{00} derjenigen Folgen aus c_{00}, die nur Folgenglieder aus $\mathbb{Q}$ enthalten, sowie eine aufsteigende Folge $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit $f(j_1) > 256$ und $\ln\ln\ln j_m \geqq 2 j_n$ für $j_m > j_n$. Zweitens sei A^*_m die Menge der Funktionale der Gestalt

$$\varphi = \frac{1}{f(m)} \sum_{j=0}^{m} x_j^*$$

mit $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^* \in c_{00}^*$ sowie

$$\sup_{x\in c_{00}} x_1^* < \sup_{x\in c_{00}} x_2^* < \ldots < \sup_{x\in c_{00}} x_m^*$$

und $\|x_j^*\| \leqq 1$ für $j = 0, 1, \ldots, m$. Ist drittens σ eine injektive Abbildung von q_{00} in die Folge $(j_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $k \in \mathbb{N}$, dann sei $\Gamma_k^\mathcal{S}$ die Menge der Funktionale $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_k^* \in q_{00}^*$ mit

$$\sup_{y\in q_{00}} y_1^* < \sup_{y\in q_{00}} y_2^* < \ldots < \sup_{y\in q_{00}} y_k^*$$

sowie $y_1^* \in \mathrm{A}^*_{j_{2k}}$ und $y_{i+1}^* \in \mathrm{A}^*_{\sigma(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_i^*)}$ für alle $i = 1, 2, \ldots, k-1$, und B_k^* sei die Menge der Funktionale der Gestalt

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{f(k)}} \sum_{i=1}^{k} a_i^*$$

mit $(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_k^*) \in \Gamma_k^\mathcal{S}$. Viertens sei $\mathfrak{I}(\mathbb{N})$ die Menge der Intervalle in $\mathbb{N}$, also der Mengen aus aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Dabei bezeichne $\mathrm{E}_1 < \mathrm{E}_2 < \ldots < \mathrm{E}_n$ eine aufsteigende Folge aus $\mathfrak{I}(\mathbb{N})$, das heißt, es gelte $\max \mathrm{E}_j + 1 < \min \mathrm{E}_{j+1}$ für $1 \leqq j \leqq n-1$. Fünftens sei $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ die Menge aller Folgen der Form $\mathrm{A}_m = \{ m, m+1, m+2, \ldots \}$ mit

[157] Vergleiche auch [114] und [248].

$m \in \mathbb{N}$ sowie die Menge $\mathscr{S}$ von Abbildungen auf c_{00} mit folgender Definition: Ist $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Basis der kanonischen Einheitsvektoren auf c_{00} und $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{B}$, dann sei $\mathcal{S}_{nm} : c_{00} \longrightarrow c_{00}$ die Abbildung mit $\mathcal{S}_{nm}\, e_j = 0$ für $j \notin \mathrm{A}$ und $\mathcal{S}_{nm}\, e_{n+j} = e_{m+j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Wählt man $n = m$, landet man mit $\mathcal{S}_{nn} = \mathcal{P}_n$ bei der Projektion von c_{00} auf $\operatorname{span}(e_j)_{j \geqq n}$, und mit $\mathcal{S}^*_{nm} = \mathcal{S}_{mn}$ erhält man eine formale adjungierte Abbildung. Die Menge $\mathscr{S}$ ist der Abschluß der Menge aller Abbildung der Form $\mathcal{S}_{nm}$ sowie deren adjungierter Abbildungen und beliebiger Kompositionen dieser Abbildungen. Damit definieren wir die erwähnte Norm für $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ induktiv durch

$$\|x\|_{GM} = \min\{\, \alpha > 0 \mid A \leqq \alpha \wedge B \leqq \alpha \wedge C \leqq \alpha \wedge D \leqq \alpha \,\}$$

mit

$$\begin{aligned}
A &= \|x\|_\infty, \\
B &= \sup\left\{ \frac{1}{f(n)} \sum_{j=0}^{n} \left\| \sum_{i \in \mathrm{E}_j} x_i\, e_i \right\| \;\middle|\; 2 \leqq n \in \mathbb{N},\ \mathrm{E}_1 < \mathrm{E}_2 < \ldots < \mathrm{E}_n \in \mathfrak{I}(\mathbb{N}) \right\}, \\
C &= \sup\left\{ \left| x^*\Big(\sum_{i \in \mathrm{E}} x_i\, e_i \Big) \right| \;\middle|\; k \in (j_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}},\ x^* \in \mathrm{B}^*_k,\ \mathrm{E} \in \mathfrak{I}(\mathbb{N}) \right\}, \\
D &= \sup\{\, \| \mathcal{S}x \| \mid \mathcal{S} \in \mathscr{S} \,\}.
\end{aligned}$$

Mit dem Abschluß von c_{00} in der Norm $\|\ \|_{GM}$ erhält man den Banachraum $\mathcal{X}_{\mathcal{S}}$, und dieser ist prim[158].

Inzwischen haben wir alle notwendigen Hilfsmittel beisammen, um auch den in Corollar 2.118 ausgesparten Fall $p = \infty$ zu betrachten, wenigstens in einer speziellen Situation. Es gilt nämlich der nachstehende

2.132 Satz: *ℓ^∞ und $\mathscr{L}^\infty([0,1])$ sind isomorph*[159].

[158]Gowers und Maurey fanden noch weitere Banachräume ähnlich dem oben beschriebenen, die besonders merkwürdige Eigenschaften aufweisen. Beispielsweise erhält man durch geeignet modifizierte Wahl der Menge $\mathscr{S}$ einen Banachraum $\mathcal{X}$, der isomorph zu $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ ist, aber nicht zu $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$, und entsprechend findet man zu jedem $p \in \mathbb{N}$ einen Banachraum $\mathcal{X}$, sodaß $\mathcal{X}^n$ genau dann zu $\mathcal{X}^m$ isomorph ist, wenn $m \cong n \bmod p$; dabei ist $\mathcal{X}^n = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{X}$ [115]. Allgemeiner gelten für eine ganze Klasse von Banachräumen verwandten Typs die folgenden, eng miteinander zusammenhängenden Eigenschaften: Keiner dieser Räume und auch keiner ihrer echten Unterräume läßt sich als topologische direkte Summe zweier unendlichdimensionaler Unterräume darstellen, keiner dieser Unterräume enthält eine unbedingte Basisfolge, und jeder beschränkte Endomorphismus $\mathcal{A}$ auf einem solchen Raum ist darstellbar als $\mathcal{A} = \lambda + \mathcal{B}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und einem *streng singulären* Endomorphismus $\mathcal{B}$. Dabei heißt eine Abbildung $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ streng singulär, wenn es zu jedem unendlichdimensionalen Unterraum $\mathcal{U}$ von $\mathcal{E}$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in \mathcal{U}$ gibt mit $\|\mathcal{S}x\| < \varepsilon \|x\|$ [114], [115], [248]. Argyros und Haydon fanden vor kurzem sogar eine Klasse von Banachräumen, in denen jede Abbildung $\mathcal{A} = \mathscr{L}(\mathcal{E})$ als $\mathcal{A} = \lambda + \mathcal{C}$ mit $\mathcal{C} \in \mathscr{C}(\mathcal{E})$ geschrieben werden kann [13].

[159]Dieses Resultat stammt ebenfalls von Pełcziński [283].

Beweis: Zunächst wählen wir eine abzählbare disjunkte Zerlegung $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des Intervalls $[0,1]$ in meßbare Mengen und definieren die Abbildung $\mathcal{T}:\ell^\infty \longrightarrow \mathscr{L}^\infty([0,1])$ durch

$$\mathcal{T}x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\,\chi_{\mathrm{A}_n}$$

für $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^\infty$. Diese ist nach Konstruktion linear, folglich ist $\operatorname{ran}\mathcal{T}$ ein Unterraum von $\mathscr{L}^\infty([0,1])$. Außerdem gilt

$$\|\,\mathcal{T}x\,\| = \sup_{t\in[0,1]}\left|\sum_{n=0}^{\infty} x_n\,\chi_{\mathrm{A}_n}(t)\right| = \sup(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}} = \|x\|_\infty,$$

das heißt, $\mathcal{T}$ ist ein isometrischer Isomorphismus von ℓ^∞ nach $\operatorname{ran}\mathcal{T}$. Nach Satz 2.93 ist $\mathscr{L}^\infty([0,1])$ der Dualraum von $\mathscr{L}^1([0,1])$, und dieser Raum ist nach Satz 2.89 separabel, nach Satz 2.122 (ii) gibt es folglich auch einen isometrischen Isomorphismus von $\mathscr{L}^\infty([0,1])$ auf einen Unterraum von ℓ^∞. Weiter ist einerseits $\ell^\infty\cong\ell^\infty\oplus\ell^\infty$ und andererseits $\mathscr{L}^\infty([0,1])\cong\mathscr{L}^\infty([0,1/2])\oplus\mathscr{L}^\infty([1/2,1])\cong\mathscr{L}^\infty([0,1])\oplus\mathscr{L}^\infty([0,1])$. Nach Satz 2.129 (i) gilt daher $\ell^\infty\cong\mathscr{L}^\infty([0,1])$. □

Der Isomorphismus, dessen Existenz hier soeben gezeigt wurde, ist ein klassisches Beispiel für eine Abbildung, die nicht explizit (etwa durch ein Integral über irgendeine $\mathscr{L}^1$-Funktion) darstellbar ist. Insbesondere ist er *nicht isometrisch*; es gibt keinen isometrischen Isomorphismus von ℓ^∞ nach $\mathscr{L}^\infty([0,1])$. Nebenbei ist es erwähnenswert, daß Satz 2.132 gemeinsam mit Satz 2.117 ein Beispiel für folgende interessante Konstellation liefert: ℓ^1 und $\mathscr{L}^1([0,1])$ sind zwei nicht isomorphe Banachräume mit isomorphen Dualräumen ℓ^∞ und $\mathscr{L}^\infty([0,1])$.

Nachdem wir in diesem und dem vorigen Abschnitt den Fall $p=2$ mehrfach ausgeschlossen haben, ist es nun an der Zeit, diesem sehr speziellen Fall ausgiebige Aufmerksamkeit zu gewähren; auch hierfür sind wieder einige Vorbetrachtungen erforderlich.

2.2.3.11 Orthogonalität in Banachräumen

Ergänzend beschäftigen wir uns kurz mit einem Begriff, dessen Bedeutung erst in den nächsten Abschnitten richtig deutlich werden wird, und das zunächst auch nur aus der mathematischen Perspektive. Die physikalische Sicht darauf erhellt sich auch hier erst in Band 2. In der Tat ruft die Sache im Kontext des vorliegenden Abschnitts einen reichlich technischen Eindruck hervor und benimmt sich beim Versuch, auf der Ebene der Banachräume definiert zu werden, eher widerborstig, sie wird sich jedoch im nächsten Abschnitt als eine ganz natürlich aus den betrachteten Strukturen folgende Eigenschaft erweisen. Es handelt sich um den Begriff der Orthogonalität, der sich in Analogie zu seiner elementaren Form im Anschauungsraum mit gewissen Einschränkungen von den in den nächsten Abschnitten betrachteten speziellen auf beliebige normierte Räume verallgemeinern läßt[160].

[160] Die hier beschriebene Definition der Orthogonalität wurde erstmals von Birkhoff erwähnt [34]. Vergleiche auch [102] und [103].

2.133 Definition: Es seien $\mathcal{E}$ ein normierter Raum und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ Unterräume.
(i) $x \in \mathcal{E}$ heißt *orthogonal* zu $y \in \mathcal{E}$, wenn $\|y\| \leqq \| y + \lambda x \|$ gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.
(ii) $x \in \mathcal{E}$ heißt orthogonal zu $\mathcal{A}$, wenn x zu jedem $y \in \mathcal{A}$ orthogonal ist.
(iii) $\mathcal{A}$ heißt orthogonal zu $\mathcal{B}$, wenn jedes $x \in \mathcal{A}$ zu jedem $y \in \mathcal{B}$ orthogonal ist.

Man schreibt dafür auch $x \perp y$, $x \perp \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$. Daß die Orthogonalität für beliebige, insbesondere unendlichdimensionale Banachräume kein unmittelbar naheliegendes Attribut ist, erkennt man in zweifacher Weise. Erstens gibt es eine ganze Reihe weiterer Vorschläge zur Definition der Orthogonalität[161], die jedoch im allgemeinen nicht dasselbe bedeuten und auch nicht äquivalent sind[162] – es sei denn, man beschränkt sich auf diejenige ganz spezielle Unterklasse der Banachräume, die Gegenstand des nächsten Abschnitts ist, und dort werden wir es mit einer weiteren, viel einfacheren Definition zu tun bekommen. Zweitens sind die Eigenschaften, die man typischerweise von einem Begriff wie demjenigen der Orthogonalität erwartet, also etwa

$$\begin{array}{llcll}
\textit{Regularität}: & \alpha x \perp \beta x & \Longleftrightarrow & \alpha x = 0 \ \vee \ \beta x = 0 & \text{für} \quad x \in \mathcal{E},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\
\textit{Homogenität}: & x \perp y & \Longrightarrow & \alpha x \perp \beta y & \text{für} \quad x, y \in \mathcal{E},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \\
\textit{Symmetrie}: & x \perp y & \Longrightarrow & y \perp x & \text{für} \quad x, y \in \mathcal{E}, \\
\textit{Additivität}: & x \perp y \ \wedge \ x \perp z & \Longrightarrow & x \perp y + z & \text{für} \quad x, y, z \in \mathcal{E},
\end{array}$$

für Banachräume nicht in vollem Umfang gegeben. Bei der Orthogonalität gemäß Definition 2.133 hat man zwar Regularität und Homogenität, im allgemeinen jedoch nicht Symmetrie und Additivität. Um zu sehen, wann diese Eigenschaften tatsächlich vorliegen, ist der Erstkontakt mit einem weiteren für die Quantenmechanik fundamentalen Begriff erforderlich.

2.134 Definition: $\mathcal{V}$ sei ein Vektorraum. Eine Abbildung $(\ ,\ ) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *Skalarprodukt* auf $\mathcal{V}$, wenn für alle $x, y, z \in \mathcal{V}$ und alle $a, b \in \mathbb{C}$ folgende Eigenschaften gelten:

(i) $(a x + b y, z) = a (x, z) + b (y, z)$,

(ii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,

(iii) $(x, x) > 0$ für $x \neq 0$.

Eigenschaft (iii) ist identisch mit der Aussage, Skalarprodukte seien *positiv definit*. Vektorräume mit Skalaprodukt nennt man im reellen Fall *euklidische* und im komplexen Fall *unitäre Vektorräume*. Skalarprodukte werden ab dem nächsten Abschnitt von herausragender Bedeutung sein; hier stellen sie vorläufig noch einen Hilfsbegriff dar. Insbesondere sind Vektorräume mit Skalarprodukt stets normiert. Eigenschaft (iii) deutet das bereits an, und in der Tat wird durch

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)} \tag{2.57}$$

[161] [29] liefert einen Überblick über die unterschiedlichen Definitionen.
[162] Details hierzu findet man in [7], [8], [63], [65], [169], [170], [190] und [191].

eine Norm induziert, wovon man sich durch Nachrechnen der Normaxiome leicht überzeugen kann.

Es stellt sich nun natürlich sofort die Frage, in welchen Vektorräumen beziehungsweise unter welchen Bedingungen ein solches Skalaprodukt existiert. Diese läßt sich konstruktiv beantworten; hierfür benötigen wir das nächste

2.135 Lemma: *Die Abbildung $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $F(\alpha) = (\alpha\, x, y)$ ist für alle $x, y \in \mathcal{V}$ stetig.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß $\|\, \alpha\, x \pm y\, \|$ stetig in α ist. Aus Ungleichung 2.80 folgt

$$\|x\| - \|y\| \leqq \|\, x - y\, \|$$

sowie

$$\|y\| - \|x\| \leqq \|\, y - x\, \| = \|\, x - y\, \|$$

und damit

$$\big|\, \|x\| - \|y\|\, \big| \leqq \|\, x - y\, \|.$$

Mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ erhält man daraus

$$\big|\, \|\, \alpha\, x \pm y\, \| - \|\, \beta\, x \pm y\, \|\, \big| \leqq \|\, (\alpha - \beta)\, x\, \| = |\, \alpha - \beta\, |\, \|x\|,$$

also auch $\big|\, \|\, \alpha\, x \pm y\, \| - \|\, \beta\, x \pm y\, \|\, \big| \longrightarrow 0$ für $|\, \alpha - \beta\, | \longrightarrow 0$. □

Damit schreiten wir zur Beantwortung der oben erwähnten Frage und beweisen das für den Alltagsgebrauch wichtigste Kriterium für Räume mit Skalarprodukt[163].

2.136 Satz:[164] *Ein normierter Vektorraum $\mathcal{V}$ ist genau dann ein unitärer Raum, wenn in ihm die Parallelogrammgleichung erfüllt ist, das heißt, wenn*

$$\|\, x + y\, \|^2 + \|\, x - y\, \|^2 = 2\, \|x\|^2 + 2\, \|y\|^2$$

gilt für alle $x, y \in \mathcal{V}$. In diesem Fall wird in $\mathcal{V}$ durch die Polarisationsgleichung

$$(x, y) = \left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2 + i \left\| \frac{x + i\, y}{2} \right\|^2 - i \left\| \frac{x - i\, y}{2} \right\|^2$$

in eindeutiger Weise ein Skalarprodukt definiert [165].

[163] Ein paar weitere folgen im nächsten Abschnitt.

[164] Dieses Resultat wurde erstmals durch Jordan und von Neumann bewiesen [181]. Es taucht etwas früher auch schon in einer gemeinsam mit Wigner verfaßten Arbeit [180] sowie in einem Aufsatz von Riesz [312] auf. Vergleiche auch [63]. Es gibt Verallgemeinerungen hierzu, siehe beispielsweise [257] - [259].

[165] Im euklidischen Fall ist das durch

$$(x, y) = \left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2$$

zu ersetzen.

Beweis: „$\Longrightarrow$“: $\mathcal{V}$ sei ein unitärer Raum mit Skalarprodukt (,). Aus dessen Eigenschaften folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}(x+y,x+y)+(x-y,x-y) &= (x,x+y)+(y,x+y)+(x,x-y)-(y,x-y)\\ &= \overline{(x+y,x)}+\overline{(x+y,y)}+\overline{(x-y,x)}-\overline{(x-y,y)}\\ &= \overline{(x,x)}+\overline{(y,x)}+\overline{(x,y)}+\overline{(y,y)}+\overline{(x,x)}-\overline{(y,x)}-\overline{(x,y)}+\overline{(y,y)}\\ &= 2\,(x,x)+2\,(y,y),\end{aligned}$$

also mit (2.57) genau die Parallelogrammgleichung.

„$\Longleftarrow$“: Nun sei $\mathcal{V}$ ein normierter Raum, in dem die Parallelogrammgleichung gilt. Zu zeigen ist, daß das durch die Polarisationsgleichung definierte Skalarprodukt die Eigenschaften (i) bis (iii) der Definition 2.134 erfüllt.

(i): Wir zeigen zunächst $(x_1,y)+(x_2,y)=(x_1+x_2,y)$ für alle $x_1,x_2,y\in\mathcal{V}$. Gemäß der Polarisationsgleichung gilt für alle $y\in\mathcal{V}$

$$\mathfrak{Re}\,(0,y)=0.$$

Außerdem liefern die Parallelogrammgleichung und (2.57) für alle $x_1,x_2,y\in\mathcal{V}$

$$\begin{aligned}2\,\mathfrak{Re}\,(x_1+x_2,y)+2\,\mathfrak{Re}\,(x_1-x_2,y) &= \|x_1+x_2+y\|^2-\|x_1+x_2-y\|^2\\ &\quad+\|x_1-x_2+y\|^2-\|x_1-x_2-y\|^2\\ &= 2\,\|x_1+y\|^2+2\,\|x_2\|^2-2\,\|x_1-y\|^2-2\,\|x_2\|^2\\ &= 2\,\|x_1+y\|^2-2\,\|x_1-y\|^2=4\,\mathfrak{Re}\,(x_1,y).\end{aligned}$$

Zusammen erhält man

$$\mathfrak{Re}\,(2\,x,y)=2\,\mathfrak{Re}\,(x,y),$$

also weiter

$$\mathfrak{Re}\,(x_1+x_2,y)+\mathfrak{Re}\,(x_1-x_2,y)=\mathfrak{Re}\,(2\,x_1,y).$$

Das wiederum liefert

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1-x_2}{2},y\right)+\mathfrak{Re}\left(\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1-x_2}{2},y\right) &= \mathfrak{Re}\,(x_1,y)+\mathfrak{Re}\,(x_2,y)\\ &= \mathfrak{Re}\,(x_1+x_2,y).\end{aligned}$$

Da sich die Polarisationsgleichung zu

$$\begin{aligned}(x,y) &= \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2+i\left\|\frac{i\,x-y}{2}\right\|^2-i\left\|\frac{i\,x+y}{2}\right\|^2\\ &= \mathfrak{Re}\,(x,y)-i\,\mathfrak{Re}\,(i\,x,y)\end{aligned}\tag{2.58}$$

umschreiben läßt, folgt unmittelbar $(x_1, y) + (x_2, y) = (x_1 + x_2, y)$.
Nun zeigen wir $(\alpha\, x, y) = \alpha\,(x, y)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$. Offensichtlich gilt das für $\alpha = 1$, und aus der Gültigkeit für α und β folgt auch diejenige für $\alpha + \beta$ und, sofern $\beta \neq 0$, für α/β. Damit gilt die Relation für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$. Nach Lemma 2.135 folgt daraus die Gültigkeit für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt, wieder gemäß der Polarisationsgleichung,

$$\begin{aligned}
(i\,x, y) &= \left\| \frac{i\,x + y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{i\,x - y}{2} \right\|^2 + i\,\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 - i\,\left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2 \\
&= \left\| \frac{x - i\,y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x - i\,y}{2} \right\|^2 + i\,\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 - i\,\left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2 \\
&= i\left(\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2 + i\,\left\| \frac{x + i\,y}{2} \right\|^2 - i\,\left\| \frac{x - i\,y}{2} \right\|^2 \right) = i\,(x, y),
\end{aligned}$$

das heißt, die Relation gilt für $\alpha = i$ und folglich für alle $\alpha \in \mathbb{C}$, womit Eigenschaft (i) gezeigt ist.
(ii): Für alle $x \in \mathcal{V}$ gilt $\|\,i\,x\,\| = \|x\|$; mit der Polarisationsgleichung folgt daraus
$\mathfrak{Re}\,(x, y) = \mathfrak{Re}\,(i\,x, i\,y)$ und mit (2.58) weiter $\mathfrak{Re}\,(x, y) = \mathfrak{Re}\,(y, x)$. Daraus erhält man

$$\mathfrak{Re}\,(i\,x, y) = \mathfrak{Re}\,(i^2\,x, i\,y) = \mathfrak{Re}\,(-x, i\,y) = -\mathfrak{Re}\,(x, i\,y) = -\mathfrak{Re}\,(i\,y, x),$$

wiederum mit (2.58) also auch

$$(x, y) = \mathfrak{Re}\,(y, x) + i\;\mathfrak{Re}\,(i\,y, x) = \overline{\mathfrak{Re}\,(y, x) - i\;\mathfrak{Re}\,(i\,y, x)} = \overline{(y, x)}$$

und somit Eigenschaft (ii).
(iii): Gemäß der Polarisationsgleichung und (2.58) gilt

$$(x, x) = \mathfrak{Re}\,(x, x) - i\;\mathfrak{Re}\,(i\,x, y) = \|x\|^2 - i\,\mathfrak{Re}(i\,\|x\|^2) = \|x\|^2,$$

und damit folgt Eigenschaft (iii). □

Da in einem normierten unitären Raum das Skalarprodukt vermöge der Polarisationsgleichung in eindeutiger Weise durch die Norm definiert wird, gilt natürlich auch das umgekehrte, und man überzeugt sich unmittelbar, daß das für alle $x \in \mathcal{E}$ durch die einfache Relation

$$\|x\|^2 = (x, x)$$

realisiert wird. Daher induziert jedes Skalarprodukt in dieser Weise eine Norm. Unitäre Räume sind somit stets normiert.

Zwischen Skalarprodukten und dem Begriff der Orthogonalität besteht ein bedeutender Zusammenhang, der sich zunächst nur andeutet. Um das näher auszuführen, ist ein weiterer Hilfssatz notwendig, der gleichzeitig ein alternatives Kriterium für Unitarität von normierten Räumen darstellt.

2.137 Lemma:[166] *Ein normierter Vektorraum $\mathcal{E}$ ist genau dann unitär, wenn jeder Unterraum $\mathcal{U}$ von $\mathcal{E}$ mit* $\dim \mathcal{U} \leqq 2$ *unitär ist.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Klar.

„$\Longleftarrow$“: Es seien $x, y \in \mathcal{E}$ beliebig und $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{x, y\}$, dann ist $\mathcal{U}$ ein Unterraum von $\mathcal{E}$ mit $\dim \mathcal{U} \leqq 2$ und nach Voraussetzung unitär. Damit gilt die Polarisationsgleichung für x und y und, da diese beliebig gewählt waren, auch für alle Elemente von $\mathcal{E}$. Folglich ist $\mathcal{E}$ unitär. □

Nun können wir den erwähnten ersten Zusammenhang zwischen Skalarprodukten und Orthogonalität formulieren, und zwar in Gestalt eines dritten Unitaritäts-Kriteriums.

2.138 Satz: *In einem normierten Vektorraum $\mathcal{E}$ mit* $\dim \mathcal{E} \geqq 3$ *ist die Orthogonalität genau dann symmetrisch, wenn $\mathcal{E}$ unitär ist.*

Beweis: [167] „$\Longrightarrow$“: $\mathcal{E}$ sei ein normierter Raum, in dem die Orthogonalität symmetrisch ist. Wir zeigen zunächst, daß für ein lineares Funktional $\varphi \neq 0$ auf $\mathcal{E}$ genau dann $|\varphi(x)| = \|\varphi\|\,\|x\|$ gilt, wenn $x \perp \mathcal{A} := \{\, t \in \mathcal{E} \mid \varphi(t) = 0 \,\}$ ist. Es sei einerseits $\varphi(x) = \|\varphi\|\,\|x\|$ für ein solches $x \perp \mathcal{A}$, dann folgt

$$\|\varphi\|\,\|\, x+t \,\| \geqq |\, \varphi(x+t)\,| = |\varphi(x)| = \|\varphi\|\,\|x\|$$

und damit $\|\, x+t \,\| \geqq \|x\|$ für alle $t \in \mathcal{A}$; folglich ist $x \perp \mathcal{A}$. Andererseits sei $|\varphi(x)| = \alpha\,\|x\|$ mit $\alpha > 0$ und $x \perp \mathcal{A}$, dann gilt $\|\, x+t \,\| \geqq \|x\|$ für alle $y \in \mathcal{A}$, also

$$|\, \varphi(x+t)\,| = |\varphi(x)| = \alpha\,\|x\| \leqq \alpha\,\|x+t\|.$$

Mit $0 \in \mathcal{A}$ folgt daraus $|\varphi(y)| \leqq \alpha\,\|y\|$ für alle $y \in \mathcal{E}$. Damit ist $\alpha = \|\varphi\|$ und $\varphi(x) = \|\varphi\|\,\|x\|$, wie behauptet.

Hierauf aufbauend leiten wir als nächstes eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür her, daß es zu jedem abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{U}$ von $\mathcal{E}$ ein orthogonales Element von $\mathcal{E}$ gibt. Dies ist genau dann der Fall, wenn zu jedem linearen Funktional φ auf $\mathcal{E}$ ein x existiert mit $\varphi(x) = \|\varphi\|\,\|x\|$. Denn einerseits ist für $\varphi \neq 0$ die Menge $\mathcal{A} = \{\, y \in \mathcal{E} \mid \varphi(y) = 0 \,\}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{E}$, und damit folgt aus $x \perp \mathcal{A}$ wie gezeigt $\varphi(x) = \|\varphi\|\,\|x\|$. Ist andererseits $\mathcal{U}$ ein beliebiger abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{E}$, dazu $a \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{U}$, und außerdem Φ ein durch

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in \mathcal{U} \\ 1 & \text{für} \quad x = a \end{cases}$$

definiertes Funktional, dann ist Φ stetig auf $\mathcal{U} \oplus \mathbb{C}\,a$, weil $\mathcal{U}$ abgeschlossen ist, und es läßt sich zu einem stetigen Funktional f auf ganz $\mathcal{E}$ fortsetzen mit $f \restriction \mathcal{U} \oplus \mathbb{C}\,a = F$. Gibt es ein $x \in \mathcal{E}$ mit $x \perp \mathcal{U}$, dann gilt wie oben gezeigt $\varphi(x) = \|\varphi\|\,\|x\|$.

[166] Auch hierzu findet man einen ersten Beweis in [181].

[167] Der Satz wurde erstmals von Birkhoff bewiesen [34]; vergleiche auch [169] und [170]. Weitere Kritirien für die Existenz eines Skalarprodukts liefert Day in [63].

Nun seien $\mathcal{U}_0$ ein dreidimensionaler Unterraum von $\mathcal{E}$ und a und b zwei beliebige Elemente von $\mathcal{U}_0$. Dann existiert nach dem bisher gezeigten ein $y \in \mathcal{U}_0$ sodaß $y \perp \operatorname{span}\{a, b\}$. Nach Voraussetzung ist dann auch $\operatorname{span}\{a, b\} \perp y$. Definiert man eine Projektion $\mathcal{P}$ von $\mathcal{U}_0$ nach $\operatorname{span}\{a, b\}$ durch $\mathcal{P}\, x := x - \alpha_x\, y$, dann gilt $\|\,\mathcal{P}\, x\,\| = \|x\| - |\alpha_x|\,\|y\| \leqq \|x\|$ und damit auch $\|\mathcal{P}\| = 1$. Es gibt also zu jedem $\mathcal{U}_0$ mit $\dim \mathcal{U}_0 = 3$ eine Projektion mit Norm 1 auf jeden abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{U}_0$.

Die Einheitskugel $\mathcal{S} = \{\, x \in \mathcal{U}_0 \mid \|x\| \leqq 1\,\}$ ist konvex und symmetrisch zum Ursprung $0 \in \mathcal{U}_0$. Ist $\mathcal{A}$ ein Unterraum von $\mathcal{U}_0$ mit $\dim \mathcal{A} = 2$ und $\mathrm{C}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cap \partial \mathcal{S}$, dann sei B das Bild von $\mathrm{C}_{\mathcal{A}}$ unter der gerade konstruierten Projektion $\mathcal{P}$ von $\mathcal{U}_0$ auf $\mathcal{A}$. Die Menge $\mathrm{Z} = \{\, \alpha\,(\, x - \mathcal{P}\, x\,) \mid x \in \mathrm{C}_{\mathcal{A}},\ \alpha \in \mathbb{C}\,\}$ ist ein Zylinder, der $\mathcal{S}$ enthält. Folglich ist $\mathcal{S}$ ein Ellipsoid[168]. Hat $x \in \mathcal{S}$ in einer beliebigen Basis $\{\, e_1, e_2, e_3\,\}$ von $\mathcal{U}_0$ die Entwicklung

$$x = \xi_1\, e_1 + \xi_2\, e_2 + \xi_3\, e_3,$$

dann gilt daher mit geeigneten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\xi_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{\xi_3^2}{\alpha_3^2} = 1.$$

Auf diesem Weg wird vermöge

$$(x, y) = \xi_1\, \eta_1 + \xi_2\, \eta_2 + \xi_3\, \eta_3$$

für $x = \xi_1\, e_1 + \xi_2\, e_2 + \xi_3\, e_3 \in \mathcal{U}_0$ und $y = \eta_1\, e_1 + \eta_2\, e_2 + \eta_3\, e_3 \in \mathcal{U}_0$ auf $\mathcal{U}_0$ ein Skalaprodukt definiert, das heißt, $\mathcal{U}_0$ ist ein unitärer Raum. Damit ist jeder dreidimensionale Unterraum von $\mathcal{E}$ und folglich auch $\mathcal{E}$ selbst ein unitärer Raum.

„$\Longleftarrow$“: $\mathcal{E}$ sei ein unitärer Raum mit Skalarprodukt $(\ ,\ )$; für die Norm von $\mathcal{E}$ gilt damit $\|x\|^2 = (x, x)$. Außerdem seien $x, y \in \mathcal{E}$ mit $x \neq 0$ und $(x, y) = 0$. Daraus folgt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(y + \lambda\, x, y + \lambda\, x) = (y, y + \lambda\, x) + \lambda\,(x, y + \lambda\, x) = (y, y) + \lambda^2\,(x, x) \geqq (y, y),$$

also $x \perp y$. Aus der Symmetrie des Skalaprodukts ergibt sich damit die Symmetrie der Orthogonalität. □

Mit der Eigenschaft, symmetrisch zu sein, gewinnt der Begriff der Orthogonalität in unitären Räumen erst seine wirkliche Bedeutung; fast noch wichtiger ist jedoch eine Folgerung, die sich vermeintlich beiläufig im soeben gezeigten Beweis andeutet.

2.139 Corollar: *In einem unitären Raum $\mathcal{E}$ gilt für $x, y \in \mathcal{E}$*

$$x \perp y \iff (x, y) = 0.$$

[168] Das ist Gegenstand eines Satzes von R. S. Phillips [286]. Vergleiche ein ähnliches, älteres Resultat von W. Blaschke [35].

Beweis: „$\Longrightarrow$": Es seien $x, y \in \mathcal{E}$ mit $x \neq 0$ und $x \perp y$. Mit Definition 2.133 (i) folgt daraus

$$\begin{aligned}(y, y) &\leqq (y + \lambda\, x, y + \lambda\, x) = (y, y + \lambda\, x) + \lambda\, (x, y + \lambda\, x)\\ &= (y, y) + 2\,\lambda\, (x, y) + \lambda^2\, (x, x)\end{aligned}$$

und damit

$$2\,\lambda\, (x, y) \geqq -\lambda^2\, (x, x).$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Für $\lambda \geqq 0$ ist das trivialerweise erfüllt; andernfalls folgt

$$2\, (x, y) \leqq -\lambda\, (x, x),$$

und das geht für beliebige $\lambda < 0$ nur, wenn $(x, y) = 0$ ist.
„$\Longleftarrow$": Bereits gezeigt. □

Damit ist eine der wichtigsten Anwendungen des Skalarprodukts in Form des Kriteriums schlechthin für Orthogonalität bereitgestellt – sofern ein Skalarprodukt zur Verfügung steht. Eine direkte Folge daraus ist der

2.140 Satz des Pythagoras: *Für orthogonale Elemente x, y eines unitären Raumes $\mathcal{E}$ gilt*

$$\|\, x + y\, \|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Beweis: Nach Definition 2.134 (i) und (ii) ist

$$\|\, x + y\, \|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, x) + (x.y) + (y, y)$$

$$\begin{aligned}&= (x, x) + \overline{(x, y)} + (x.y) + (y, y) = (x, x) + 2\, \mathfrak{Re}\, (x.y) + (y, y)\\ &= \|x\|^2 + 2\, \mathfrak{Re}\, (x.y) + \|y\|^2\end{aligned}$$

Mit $(x, y) = 0$ folgt die Behauptung. □

Richtig interessant werden unitäre Räume (wenig überraschend) erst, wenn sie auch vollständig sind, weswegen hierfür nun ein eigener Abschnitt eröffnet wird.

2.3 Hilberträume

2.3.1 Definition und erste Eigenschaften

Wir kommen nun also zu einer etwas ausführlicheren Betrachtung derjeniger Banachräume, deren Norm durch ein Skalarprodukt induziert wird. Genaugenommen wird sich der gesamte Rest des vorliegenden Buchs damit beschäftigen; zunächst stehen dabei die Räume selbst im Mittelpunkt, später werden weitere, damit zusammenhängende Strukturen dazukommen.

Dabei muß man die Banachraum-Eigenschaft, daß heißt Vollständigkeit *und* Normiertheit gar nicht explizit voraussetzen; im Falle der ersteren ergibt sich die letztere aus dem Vorhandensein eines Skalarprodukts samt der im vorigen Abschnitt diskutierten Zusammenhänge von selbst. Das führt auf folgende zentrale

2.141 Definition: Ein vollständiger Vektorraum mit Skalarprodukt heißt *Hilbertraum*.

Ist der betrachtete Vektorraum mit Skalarprodukt nicht vollständig, heißt er *Prä-Hilbertraum*. Vollständige Unterräume von Hilberträumen sind stets selbst auch Hilberträume. Natürlich sind alle Hilberträume auch Banachräume. Die Umkehrung dieser Aussage ist falsch; hierbei handelt es sich jedoch um eine durchaus nichttriviale Angelegenheit, sodaß wir genaueres besser auf einen eigenen, nämlich den nächsten Abschnitt verschieben.

Da wir bereits eine Menge Vorarbeit geleistet haben, können wir gleich einmal einige allgemeine Eigenschaften von Hilberträumen auflisten. Dazu sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $(\ ,\ ) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ dessen Skalarprodukt[169].

Das Skalarprodukt liefert wie bereits beschrieben unmittelbar den Begriff der Orthogonalität, das heißt, zwei Vektoren aus $\mathcal{H}$ sind zueinander orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet. Natürlich induziert das Skalarprodukt auch eine Norm in $\mathcal{H}$ gemäß

$$\|\psi\|^2 := (\psi, \psi),$$

das heißt, die Norm eines Vektors ist die Quadratwurzel aus dessen Skalarprodukt mit sich selbst. Hierbei gilt die

2.142 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:[170] *Für alle* $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ *ist* $|(\psi, \varphi)| \leqq \|\psi\|\,\|\varphi\|$.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varphi \neq 0$ (andernfalls ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt). Für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt nach Definition 2.134

$$(\psi - \alpha\,\varphi, \psi - \alpha\,\varphi) = (\psi, \psi) - \alpha\,(\varphi, \psi) - \overline{\alpha}\,(\psi, \varphi) + |\alpha|^2\,(\varphi, \varphi) \geqq 0,$$

also für $\alpha = (\psi, \varphi)/\|\varphi\|^2$

$$\|\psi\|^2 - \frac{|(\psi, \varphi)|^2}{\|\varphi\|^2} \geqq 0.$$

Daraus folgt sofort die Behauptung. □

Man überzeugt sich leicht, daß in Ungleichung 2.142 das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn ψ ein Vielfaches von φ ist. Die Norm-Eigenschaften lassen sich nun mit Hilfe der Skalarprodukt-Eigenschaften sowie von Ungleichung 2.142 durch simples Nachrechnen verifizieren. Außerdem ergibt sich das folgende wichtige

2.143 Corollar: *Ist* $\mathcal{H}$ *ein Hilbertraum, dann ist für jedes* $\psi \in \mathcal{H}$ *das durch* $f_\psi(\varphi) := (\varphi, \psi)$ *definierte Funktional* f_ψ *stetig auf* $\mathcal{H}$.

---

[169] Wir betrachten generell Hilberträume über $\mathbb{C}$.

[170] Entsprechend seiner Benennung taucht dieses Resultat erstmals 1821 bei Cauchy auf, allerdings nur in Summenform [52]. Eine Version in Integralform wurde 1859 von V. J. Bunjakowski bewiesen; beim zweiten Namensgeber H. A. Schwarz taucht sie, ebenfalls in allgemeiner Form, erst 1909 auf.

Beweis: Sei $\psi \in \mathcal{H}$. Nach Ungleichung 2.142 gilt für alle $\varphi, \chi \in \mathcal{H}$

$$|f_\psi(\varphi - \chi)| = |(\varphi - \chi, \psi)| \leqq \|\varphi - \chi\| \, \|\psi\|,$$

daher folgt $|f_\psi(\varphi - \chi)| \longrightarrow 0$ für $\|\varphi - \chi\| \longrightarrow 0$. □

Eine Projektion $\mathcal{P}$ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt *orthogonal*, wenn $\operatorname{ran}\mathcal{P} \perp \ker\mathcal{P}$ ist. Für jede orthogonal Projektion $\mathcal{P} \neq 0$ in $\mathcal{H}$ gilt nach Satz 2.140

$$\|\mathcal{P}\psi\|^2 \leqq \|\mathcal{P}\psi\|^2 - \|\psi - \mathcal{P}\psi\|^2 = \|\psi\|^2$$

für alle $\psi \in \mathcal{H}$ und damit $\|\mathcal{P}\| = 1$. Zwei Unterräume $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von $\mathcal{H}$ heißen zueinander orthogonal, wenn $\psi \perp \varphi$ gilt für alle $\psi \in \mathcal{A}$ und $\varphi \in \mathcal{B}$; man schreibt dafür $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$. Ist $\mathcal{U}$ ein Unterraum von $\mathcal{H}$, dann heißt

$$\mathcal{U}^\perp := \{\, \psi \in \mathcal{H} \mid \psi \perp \varphi \ \text{ für alle } \ \varphi \in \mathcal{U} \,\}$$

Orthogonalraum oder *orthogonales Komplement* von $\mathcal{U}$. Natürlich ist $\mathcal{U} \perp \mathcal{U}^\perp$ und $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}^{\perp\perp}$; weitere Eigenschaften beschreibt das nächste

2.144 Lemma: *Für jeden abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{U}$ eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ gelten die folgenden Aussagen.*

(i) $\mathcal{H} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$,

(ii) *$\mathcal{H}/\mathcal{U}$ ist isometrisch isomorph zu $\mathcal{U}^\perp$ und damit ein Hilbertraum.*

Beweis: (i): $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge in $\mathcal{U}^\perp$; da $\mathcal{H}$ vollständig ist, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = \psi \in \mathcal{H}$. Nach Corollar 2.143 ist das Skalarprodukt stetig, daher ist

$$(\psi, \varphi) = \big(\lim_{n\to\infty} \psi_n, \varphi\big) = \lim_{n\to\infty} (\psi_n, \varphi) = 0$$

für alle $\varphi \in \mathcal{U}$. Es folgt $\psi \in \mathcal{U}^\perp$, also ist $\mathcal{U}^\perp$ abgeschlossen.
(ii): Wir betrachten die kanonische Quotientenabbildung $\iota : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}/\mathcal{U}$ definiert durch $\iota(\psi) = \psi + \mathcal{U}$. Deren Einschränkung auf $\mathcal{U}^\perp$ ist trivialerweise bijektiv. Außerdem betrachten wir diejenige Projektion $\mathcal{P} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{U}$, für die $\operatorname{ran}\mathcal{P} = \mathcal{U}$ und $\ker\mathcal{P} = \mathcal{U}^\perp$ gilt. Dann ist für alle $\psi \in \mathcal{U}$ und alle $\varphi \in \mathcal{U}^\perp$ nach Satz 2.140

$$\|\psi + \varphi\| = \|\psi\| + \|\varphi\| \geqq \|\varphi\|,$$

und folglich auch

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &= \inf\{\, \|\varphi - \chi\| \mid \chi \in \mathcal{U} \,\} = \inf\{\, \|\varphi - \chi\| \mid \chi \in \operatorname{ran}\mathcal{P} \,\} \\ &= \inf\{\, \|\varphi + \chi\| \mid \chi \in \operatorname{ran}\mathcal{P} \,\} = \|\iota(\varphi)\|. \end{aligned}$$

Somit ist $\iota \restriction \mathcal{U}^\perp$ auch isometrisch. □

Ist $\mathcal{U}$ ein beliebiger Unterraum, kann man immerhin noch die nachstehenden Resultate zeigen.

2.145 Lemma: *Für jeden Unterraum $\mathcal{U}$ eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ gelten die folgenden Aussagen.*

(i) *$\mathcal{U}^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$ und damit selbst ein Hilbertraum,*

(ii) $\overline{\mathcal{U}}^\perp = \mathcal{U}^\perp$,

(iii) $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^{\perp\perp}$,

(iv) $\mathcal{U}$ ist genau dann dicht in $\mathcal{H}$, wenn $\mathcal{U}^\perp = \{0\}$.

Beweis: (i): f_ψ sei das in Corollar 2.143 definierte Funktional, dann ist $\mathcal{U}^\perp = \bigcap_{\psi \in \mathcal{U}} \ker f_\psi$. Nach Corollar 2.143 ist f_ψ stetig, also ist $\ker f_\psi$ abgeschlossen, und damit ist $\mathcal{U}^\perp$ als Durchschnitt abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen.

(ii): Es ist $\mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U}}$ und damit $\mathcal{U}^\perp \subset \overline{\mathcal{U}}^\perp$. Außerdem ist für alle $\psi \in \mathcal{U}^\perp$ nach Corollar 2.143 $\overline{\mathcal{U}} \subset \ker f_\psi$, also $\psi \in \overline{\mathcal{U}}^\perp$. Zusammen folgt daraus die Behauptung.

(iii): Nach Lemma 2.144 (i) gilt $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{U}} \oplus \overline{\mathcal{U}}^\perp = \overline{\mathcal{U}} \oplus \mathcal{U}^\perp = \mathcal{U}^\perp \oplus \mathcal{U}^{\perp\perp}$. Mit $\overline{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}^{\perp\perp}$ folgt daraus die Behauptung.

(iv), „$\Longrightarrow$“: Aus $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{H}$ folgt mit Lemma 2.144 (i) sofort $\mathcal{U}^\perp = \{0\}$.

„$\Longleftarrow$“: Aus $\mathcal{U}^\perp = \{0\}$ folgt mit Lemma 2.144 (i) und Aussage (iii) unmittelbar $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{H}$. □

Natürlich kann man die in Abschnitt 2.1.1.2 für allgemeine Vektorräume beschriebenen gewöhnlichen und direkten Summen insbesondere auch für unitäre Räume betrachten. Die gewöhnliche Summe aus Unterräumen bedarf keines weiteren Kommentars; für endlich viele Summanden läßt sich indes auch der Begriff der direkten Summe ohne Schwierigkeiten auf Hilberträume spezialisieren. Sind $\mathcal{V}_j$ für $j = 1, 2, \ldots, n$ unitäre Räume über demselben Körper, jeweils mit Skalarprodukt $(\ ,\ )_j$, dann erhält man auf $\bigoplus_{j=1}^n \mathcal{V}_j$ mit $(\psi, \varphi) = \sum_{j=1}^n (\psi_j, \varphi_j)_j$ für $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ und $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ wieder ein Skalarprodukt, und falls die $\mathcal{V}_j$ Hilberträume sind, ist $\bigoplus_{j=1}^n \mathcal{V}_j$ mit $(\ ,\ )$ ebenfalls ein Hilbertraum. Wieder definiert man eine kanonische lineare Abbildung $\Phi : \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}_i \longrightarrow \sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i$ mit

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n \tag{2.59}$$

die genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{0\}$ gilt für alle $i, j = 1, 2, \ldots, n$ mit $i \neq j$ [171].

Wir ergänzen einige Bemerkungen über unendliche direkte Summen unitärer Räume analog jenen für Banachräume in Abschnitt 2.2.3.2, da wenig überraschend auch hier wieder

[171] Man kann hier unter geeigneten Voraussetzungen noch mehr erreichen, wie wir in Abschnitt 4.4.2.6 sehen werden.

dieselben, bei endlichen Summen nicht auftretenden Details zu beachten sind. Γ sei eine unendliche Kardinalzahl und $(\mathcal{H}_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ eine Familie von Hilberträumen über demselben Körper. Für die algebraische direkte Summe

$$\bigoplus_{\gamma<\Gamma} \mathcal{H}_\gamma = \left\{ (\psi_\gamma)_{\gamma<\Gamma} \in \prod_{\gamma<\Gamma} \mathcal{H}_\gamma \;\middle|\; x_\gamma \neq 0 \text{ für höchstens endliche viele } \gamma < \Gamma \right\}$$

liefert $(\psi, \varphi) = \sum\limits_{\gamma<\Gamma} (\psi_\gamma, \varphi_\gamma)_\gamma$ zwar ein Skalarprodukt, $\bigoplus\limits_{\gamma<\Gamma} \mathcal{H}_\gamma$ ist jedoch im allgemeinen kein Hilbertraum. Wieder definieren wir stattdessen die topologische direkte Summe

$$\bigoplus_{\gamma<\Gamma}^{T} \mathcal{H}_\gamma = \left\{ (\psi_\gamma)_{\gamma<\Gamma} \in \prod_{\gamma<\Gamma} \;\middle|\; (\|\psi_\gamma\|)_{\gamma<\Gamma} \in \ell^2(\Gamma) \right\};$$

hierfür erhalten wir durch $(\psi, \varphi) = \sum\limits_{\gamma<\Gamma} (\psi_\gamma, \varphi_\gamma)_\gamma$ für $\psi = (\psi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ und $\varphi = (\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ ein Skalarprodukt, und mit diesem ist $\bigoplus\limits_{\gamma<\Gamma}^{T} \mathcal{H}_\gamma$ ein Hilbertraum. Auch hier ist die topologische direkte Summe die Vervollständigung der algebraischen in der durch $(\ ,\ )$ induzierten Norm.

Mit Hilfe von Norm und Skalarprodukt läßt sich ein Hilbertraum in üblicher Weise topologisieren. Jede Norm definiert eine Metrik d auf $\mathcal{H}$ durch $d[\psi, \varphi] := \|\, \psi - \varphi \,\|$. Konvergenz bezüglich der Norm beziehungsweise der zugehörigen Metrik bezeichnet man als *starke Konvergenz* im Hilbertraum $\mathcal{H}$: Eine Folge $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Vektoren aus $\mathcal{H}$ *konvergiert stark* gegen einen Vektor $\psi \in \mathcal{H}$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \|\, \psi_n - \psi \,\| = 0$$

gilt. Konvergenz bezüglich des Skalarproduktes bezeichnet man hingegen als *schwache Konvergenz*: Eine Folge $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Vektoren aus $\mathcal{H}$ *konvergiert schwach* gegen einen Vektor $\psi \in \mathcal{H}$, falls für alle $\varphi \in \mathcal{H}$

$$\lim_{n\to\infty} (\psi_n, \varphi) = (\psi, \varphi)$$

gilt. In unendlichdimensionalen Hilberträumen sind diese beiden Konvergenzbegriffe und die daraus folgenden Topologien nicht äquivalent. Denn hier folgt aus der starken Konvergenz einer Folge von Vektoren zwar deren schwache Konvergenz, das umgekehrte gilt jedoch nicht.

In Abschnitt 2.2.3.9 wurde in Gestalt der Sätze 2.92, 2.93 und 2.97 gezeigt, wie man für stetige lineare Funktionale Integraldarstellungen finden kann. Das funktioniert jedoch in der dort beschriebenen Form nur für $\mathscr{L}^p$-Räume; hier zeigt es sich nun, daß vergleichbare Darstellungen bei Hilberträumen *stets* möglich sind, egal um welches spezielle Exemplar es sich handelt.

2.146 Rieszscher Darstellungssatz:[172] *Für jeden Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist die Abbildung $\mathcal{T} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ mit*

$$\mathcal{T}(\psi)\, \varphi = (\varphi, \psi)$$

ein isometrischer Isomorphismus.

[172] Siehe Anmerkung 115 auf S. 131.

Beweis: Nach Definition 2.134 (i) ist $\mathcal{T}$ linear, und nach Corollar 2.143 ist das Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ stetig. Der restliche Beweis erfolgt in drei Schritten.

1. Ist f das Nullfunktional auf $\mathcal{H}$, dann gilt $f(\psi) = (\psi, 0)$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$. Ist $0 \neq f \in \mathcal{H}'$, dann ist $(\ker f\,)^{\perp} \neq \emptyset$. Nun sei $\psi \in (\ker f\,)^{\perp}$ und $\psi_0 := \psi/\|\psi\|$. Für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt dann $f(\,f(\psi_0)\,\varphi - f(\varphi)\,\psi_0\,) = 0$, also ist $f(\psi_0)\,\varphi - f(\varphi)\,\psi_0 \in \ker f$ und damit $(f(\psi_0)\,\varphi - f(\varphi)\,\psi_0, \psi_0) = 0$. Daraus folgt $f(\varphi) = (\varphi, f(\psi_0)\,\psi_0)$, und somit gilt für alle $\varphi \in \mathcal{H}$

$$\mathcal{T}^{-1}(f) = \frac{f(\psi)}{\|\psi\|^2}\,\psi,$$

das heißt, $\mathcal{T}$ ist surjektiv.

2. Gilt für ein weiteres $\chi \in \mathcal{H}$ ebenfalls $f(\varphi) = (\varphi, \chi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$, dann folgt $(\varphi, f(\psi_0)\,\psi_0 - \chi) = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$. Also ist $f(\psi_0)\,\psi_0 - \chi \in \mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$, das heißt $\chi = f(\psi_0)\,\psi_0$. Somit ist $\mathcal{T}$ injektiv.

3. Nach Ungleichung 2.142 gilt für alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$\|\,\mathcal{T}(\psi)\,\| = \sup_{\|\varphi\| \leqq 1} |\,\mathcal{T}(\psi)\,\varphi\,| = \sup_{\|\varphi\| \leqq 1} |(\varphi, \psi)| \leqq \sup_{\|\varphi\| \leqq 1} \|\varphi\|\,\|\psi\| = \|\psi\|,$$

also ist $\mathcal{T}$ isometrisch. □

Jeder Hilbertraum ist also zu seinem topologischen Dualraum isometrisch isomorph; genauer gesagt gibt es in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ zu jedem $f \in \mathcal{H}'$ ein eindeutig bestimmtes $\psi \in \mathcal{H}$, sodaß $f(\varphi) = (\varphi, \psi)$ gilt für alle $\varphi \in \mathcal{H}$; dabei gilt $\|f\| = \|\psi\|$. Stetige lineare Funktionale auf Hilberträumen lassen sich somit stets eindeutig und normerhaltend durch Skalarprodukte darstellen. Darüberhinaus läßt sich mit Hilfe von $\mathcal{T}$ ein Skalaprodukt $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{H}' \times \mathcal{H}' \longrightarrow \mathbb{C}$ definieren durch

$$\langle f, g\rangle := (\mathcal{T}^{-1}(f), \mathcal{T}^{-1}(g)) \quad \text{für } f, g \in \mathcal{H}',$$

und nach Satz 2.146 ist $\mathcal{H}'$ damit ebenfalls ein Hilbertraum. Hilberträume können daher elementweise mit ihren jeweiligen topologischen Dualräumen identifiziert werden[173]. Es gilt jedoch noch mehr, wie das nächste Resultat zeigt.

2.147 Corollar: *Jeder Hilbertraum ist reflexiv.*

Beweis: Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, dann liefert Anwendung von Satz 2.146 auf den Hilbertraum $\mathcal{H}'$, daß die Abbildung $\mathcal{S} : \mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{H}''$ mit

$$\mathcal{S}(g)f = (f, g)$$

ein isometrischer Isomorphismus ist. Folglich ist die Abbildung $j = \mathcal{S} \circ \mathcal{T}$ ein isometrischer Isomorphismus zwischen $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}''$. □

[173]Auch diese Eigenschaft wird sich aus Sicht der Quantenmechanik als besonders wichtig erweisen; sie ist außerdem die Grundlage der weitverbreiteten, mathematisch jedoch äußerst windigen Bra-Ket-Schreibweise. Wir kommen darauf zurück.

2.3.2 Wann sind Banachräume Hilberträume?

Wir haben uns bereits mit charakteristischen Eigenschaften beschäftigt, die einen normierten zu einem unitären Raum machen. Die zusätzliche Forderung, nicht nur unitär, sondern sogar vollständig zu sein, ist zwar stark, aber gewissermaßen gratis dabei, wenn man gleich von Banachräumen aus startet. In der Tat liefert etwa Satz 2.136 unmittelbar das folgende

2.148 Corollar: *Ein Banachraum ist genau dann isometrisch isomorph zu einem Hilbertraum, wenn in ihm die Parallelogrammgleichung gilt.*

Da die Polarisationsgleichung in diesem Fall ebenfalls nach Satz 2.136 zugleich die Definition des zugehörigen Skalarprodukts darstellt, ist Corollar 2.148 äquivalent zur Aussage, daß die Norm eines Banachraums genau dann von einem Skalarprodukt induziert wird, wenn die Parallelogrammgleichung gilt.

Die Parallelogrammgleichung ist die wichtigste, aber längst nicht die einzige solche Bedingung[174]. Eine davon betrachten wir nun genauer. Dazu beweisen wir zunächst ein weiteres Lemma.

2.149 Verallgemeinerte Parallelogrammgleichung: *Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum,* $(\mathsf{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ *ein Maßraum und $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Rademacher-Folge in* M. *Dann gilt für jede endliche Folge $(\psi_i)_{0\leqq i\leqq n}$ in $\mathcal{H}$*

$$\int_{\mathsf{M}} \left\| \sum_{i=0}^{n} r_i\,\psi_i \right\|^2 d\mu = \sum_{i=0}^{n} \|\psi_i\|^2. \tag{2.60}$$

Beweis: Direktes Nachrechnen liefert

$$\begin{aligned}\int_{\mathsf{M}} \left\| \sum_{i=0}^{n} r_i\,\psi_i \right\|^2 d\mu &= \int_{\mathsf{M}} \left(\sum_{i=0}^{n} r_i\,\psi_i, \sum_{j=0}^{n} r_j\,\psi_j \right) d\mu \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} (\psi_i, \psi_j) \int_{\mathsf{M}} r_i\,r_j\,d\mu = \sum_{i=0}^{n} (\psi_i, \psi_j)\,\delta_{ij} = \sum_{i=0}^{n} \|\psi_i\|^2. \qquad \square\end{aligned}$$

Mit der verallgemeinerten Parallelogrammgleichung können wir nun wie angekündigt ein entsprechend verallgemeinertes Kriterium für isometrische Banach- und Hilberträume angeben.

2.150 Satz: *Ein Banachraum $\mathcal{E}$ ist genau dann isometrisch isomorph zu einem Hilbertraum, wenn* $\operatorname{type}(\mathcal{E}) = \operatorname{cotype}(\mathcal{E}) = 2$ *gilt mit* $T_2(\mathcal{E}) = C_2(\mathcal{E}) = 1$.

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Folgt direkt aus Lemma 2.149.
„$\Longleftarrow$“: Es seien M ein meßbarer Raum, $p, q \in \mathsf{M}$ und $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Rademacher-Folge mit

$$r_1 \equiv 1, \qquad r_2(p) = 1, \qquad r_2(q) = -1.$$

[174] Es gibt mehrere hundert weiterer Kriterien dafür; eine ausführliche Zusammenstellung findet man bei [10]. Vergleiche auch [166].

Außerdem sei δ_x das Dirac-Maß auf M, das heißt, es gelte

$$\delta_x(\mathrm{A}) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \in \mathrm{A} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $x \in \mathrm{M}$ und alle $\mathrm{A} \subset \mathrm{M}$. Wir setzen $\mu = \frac{1}{2}\,(\,\delta_p + \delta_q\,)$. Nach Voraussetzug gilt in $\mathcal{E}$ die Relation (2.60). Wenden wir diese auf $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{E}$ an, erhalten wir

$$\int_{\mathrm{M}} (\, r_1\,\psi_1 + r_2\,\psi_2\,)\, d\mu = \frac{1}{2}\,(\,\|\,\psi_1 + \psi_2\,\|^2 + \|\,\psi_1 - \psi_2\,\|^2\,) = \|\psi_1\|^2 + \|\psi_2\|^2,$$

also die Parallelogrammgleichung. Mit Satz 2.136 folgt die Behauptung. □

Die beiden beschriebenen Kriterien zeigen, daß bei weitem nicht jeder Banachraum auch ein Hilbertraum ist, was wir später auch anhand konkreter Beispiele sehen werden. Häufig interessiert man sich daher für die Frage, ob es bei einem gegebenen Banachraum wenigstens eine zu dessen Norm *äquivalente* Norm gibt, die von einem Skalarprodukt gebildet wird. Dabei heißen zwei Normen $\|\ \|_1$ und $\|\ \|_2$ auf einem Vektorraum $\mathcal{V}$ äquivalent, wenn es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt mit

$$c_1\,\|\psi\|_2 \leqq \|\psi\|_1 \leqq c_2\,\|\psi\|_2$$

für alle $\psi \in \mathcal{V}$. Äquivalente Normen liefern dieselben Topologien, weswegen beispielsweise bezüglich einer gegebenen Norm konvergente Folgen auch in jeder dazu äquivalenten Norm konvergieren. Damit ist die erwähnte Frage gleichbedeutend mit derjenigen, ob ein Banachraum vielleicht nicht unbedingt isometrisch isomorph, aber immerhin isomorph zu einem Hilbertraum ist. Wie sich gleich zeigen wird, ist das sehr viel schwieriger zu beantworten.

Zunächst lassen wir die Eigenschaft der Vollständigkeit unberücksichtigt. Hierfür beschaffen wir uns einen Hilfssatz, der für sich allein bereits eine Erwähnung wert ist und eine Verallgemeinerung des Satzes von Hahn-Banach darstellt.

2.151 Satz:[175] V *sei ein* $\mathbb{R}$*-Vektorraum,* $\mathcal{U}$ *ein Unterraum von* $\mathcal{V}$*, außerdem seien* $g : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ein sublineares Funktional,* $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ein lineares Funktional und G eine abelsche Halbgruppe aus linearen Abbildungen von* $\mathcal{V}$ *nach* $\mathcal{V}$*, sodaß folgendes gilt:*

(i) $g(\mathcal{A}\,x) \leqq g(x)$ *für alle* $\mathcal{A} \in G$ *und alle* $x \in \mathcal{V}$*,*

(ii) $\mathcal{A}y \in \mathcal{U}$ *für alle* $\mathcal{A} \in G$ *und alle* $y \in \mathcal{U}$*,*

(iii) $f(\mathcal{A}y) = f(y)$ *für alle* $\mathcal{A} \in G$ *und alle* $y \in \mathcal{U}$*.*

Dann gibt es ein lineares Funktional F auf ganz $\mathcal{V}$ *mit* $F \restriction \mathcal{U} = f$ *sowie* $F(\mathcal{A}x) = F(x)$ *und* $F(x) \leqq g(x)$ *für alle* $\mathcal{A} \in G$ *und alle* $x \in \mathcal{V}$*.*

[175] Dieses Resultat stammt von Woodbury [390]. Vergleiche auch [320].

Beweis: $\mathfrak{F}$ sei die Menge aller endlichen Folgen aus G. Auf $\mathcal{V}$ sei das Funktional h definiert durch

$$h(x) = \frac{1}{n} \inf \left\{ g\Big(\sum_{j=0}^{n} \mathcal{A}_j x \Big) \;\Big|\; (\mathcal{A}_j)_{0 \leqq j \leqq n} \in \mathfrak{F},\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dann gilt $h(x) \leqq g(x)$ und $h(\lambda x) = \lambda h(x)$ für alle $x \in \mathcal{V}$ und alle $\lambda \geqq 0$. Für jedes x und jedes y aus $\mathcal{V}$ und jedes $\varepsilon > 0$ wählen wir nun $(\mathcal{A}_i)_{0 \leqq j \leqq n}, (\mathcal{B}_j)_{0 \leqq j \leqq m} \in \mathfrak{F}$ so, daß

$$\frac{1}{n}\, g\Big(\sum_{j=0}^{n} \mathcal{A}_j x \Big) < h(x) + \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{1}{m}\, g\Big(\sum_{j=0}^{m} \mathcal{B}_j y \Big) < h(y) + \varepsilon.$$

Aufgrund der Halbgruppeneigenschaft von G ist $(\mathcal{A}_i \mathcal{B}_j)_{\substack{0 \leqq i \leqq n \\ 0 \leqq j \leqq m}} \in \mathfrak{F}$, es folgt

$$\begin{aligned}
h(x+y) &\leqq \frac{1}{nm}\, g\Big(\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \mathcal{A}_i \mathcal{B}_j (x+y) \Big) = \frac{1}{nm}\, g\Big(\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (\mathcal{A}_i \mathcal{B}_j x + \mathcal{B}_j \mathcal{A}_i y) \Big) \\
&\leqq \frac{1}{nm} \left[g\Big(\sum_{j=0}^{m} \mathcal{B}_j \Big(\sum_{i=0}^{n} \mathcal{A}_i x \Big)\Big) + g\Big(\sum_{i=0}^{n} \mathcal{A}_i \Big(\sum_{j=0}^{m} \mathcal{B}_j y \Big)\Big) \right] \\
&\leqq \frac{1}{nm} \left[\sum_{j=0}^{m} g\Big(\mathcal{B}_j \Big(\sum_{i=0}^{n} \mathcal{A}_i x \Big)\Big) + \sum_{i=0}^{n} g\Big(\mathcal{A}_i \Big(\sum_{j=0}^{m} \mathcal{B}_j y \Big)\Big) \right] \\
&\leqq \frac{1}{nm} \left[\sum_{j=0}^{m} g\Big(\sum_{i=0}^{n} \mathcal{A}_i x \Big) + \sum_{i=0}^{n} g\Big(\sum_{j=0}^{m} \mathcal{B}_j y \Big) \right] \\
&\leqq \frac{1}{n}\, g\Big(\sum_{j=0}^{n} \mathcal{A}_j x \Big) + \frac{1}{m}\, g\Big(\sum_{j=0}^{m} \mathcal{B}_j y \Big) < h(x) + h(y) + 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

und damit

$$h(x+y) \leqq h(x) + h(y).$$

Außerdem ist nach Voraussetzung für alle $y \in \mathcal{U}$

$$f(y) = \frac{1}{n}\, f\Big(\sum_{j=0}^{n} \mathcal{A}_j y \Big) \leqq \frac{1}{n}\, g\Big(\sum_{j=0}^{n} \mathcal{A}_j y \Big)$$

und somit $f(y) \leqq h(y)$. Nach Satz 2.54 gibt es daher ein auf ganz $\mathcal{V}$ definiertes lineares Funktional F mit $F \restriction \mathcal{U} = f$ und $F(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ für alle $x \in \mathcal{V}$.

Nun gilt für alle $x \in \mathcal{V}$ und alle $\mathcal{A} \in G$

$$h(x - \mathcal{A}x) \leqq \frac{1}{n}\, g\Big(\sum_{j=0}^{n} \mathcal{A}^j (x - \mathcal{A}x) \Big),$$

und mit Hilfe der Summenformel für geometrische Reihen findet man weiter

$$h(x - \mathcal{A}x) = \frac{1}{n}\, g(x - \mathcal{A}^{n+1}x) = \frac{1}{n}\,[\,g(x) - g(\mathcal{A}^{n+1}x)\,] \leqq \frac{1}{n}\,[\,g(x) + g(-x)\,] = 0.$$

Das führt auf

$$F(x) - F(\mathcal{A}x) = F(x - \mathcal{A}x) \leqq h(x - \mathcal{A}x) \leqq 0$$

und damit auf $F(x) \leqq F(\mathcal{A}x)$ für alle $x \in \mathcal{V}$ und alle $\mathcal{A} \in G$. Folglich gilt auch $F(-x) \leqq F(\mathcal{A}(-x))$, also $F(x) \geqq F(\mathcal{A}x)$, und insgesamt erhalten wir $F(\mathcal{A}x) = F(x)$. □

Damit kommen wir zu einer ersten Isomorphieaussage; diese gilt für Vektorräume allgemein, nicht nur für vollständige Exemplare. Eine Möglichkeit, zu unitären Räumen isomorphe normierte Räume zu charakterisieren, erhält man durch Vergleich mit einem gegebenen Hilbertraum. Das ist Gegenstand von folgendem

2.152 Satz:[176] *Ein normierter Vektorraum $\mathcal{V}$ ist genau dann isomorph zu einem unitären Raum, wenn es eine Konstante $c \geqq 1$ und einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ gibt, so daß zu jedem endlichdimensionalen Unterraum $\mathcal{U}$ von $\mathcal{V}$ eine lineare Abbildung $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{H}$ existiert mit*

$$\frac{\|x\|_{\mathcal{V}}}{c} \leqq \|\, \mathfrak{T}_{\mathcal{U}}\, x \,\|_{\mathcal{H}} \leqq c\, \|x\|_{\mathcal{V}}$$

für alle $x \in \mathcal{U}$.

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Klar, denn in endlichdimensionalen Vektorräumen sind alle Normen paarweise äquivalent.

„$\Longleftarrow$“: Betrachte die Menge $\mathfrak{U}$ aller endlichdimensionaler Unterräume von $\mathcal{V}$; diese wird durch die $\subset$-Relation teilgeordnet, und jede Teilmenge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{U}$ besitzt in Gestalt von

$$\mathcal{A} := \sum_{\mathcal{X} \in \mathfrak{A}} \mathcal{X} = \operatorname{span}\left\{ \bigcup \mathfrak{A} \right\}$$

eine kleinste obere Schranke. $\mathrm{B}(\mathfrak{U})$ sei die Menge der beschränkten reellen Funktionen auf $\mathfrak{U}$; sie wird mit der Supremumsnorm $\|\ \|_\infty$ zu einem Banachraum. Jedes Element von $\mathrm{B}(\mathfrak{U})$ kann vermöge der Inklusions-Teilordnung als verallgemeinerte Folge betrachtet werden[177]; gibt es zu $f \in \mathrm{B}(\mathfrak{U})$ ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und dazu für alle $\varepsilon > 0$ ein $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$, sodaß für alle $\mathcal{A} \in \mathfrak{U}$ aus $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ stets $|\, f(\mathcal{A}) - \alpha\,| < \varepsilon$ gilt, dann konvergiert f gegen α in diesem verallgemeinerten Sinn. Der abgeschlossene Unterraum aller konvergenten Elemente von $\mathrm{B}(\mathfrak{U})$ sei $\mathrm{C}(\mathfrak{U})$. Auf diesem definieren wir durch $\varphi(f) := \lim\limits_{\mathcal{X} \in \mathfrak{A}} f(\mathcal{X})$ für $f \in \mathrm{C}(\mathfrak{U})$ ein beschränktes lineares Funktional φ und auf $\mathrm{B}(\mathfrak{U})$ für jedes $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$ durch $\mathfrak{G}_{\mathcal{U}} f(\mathcal{A}) := f(\operatorname{span}\{\mathcal{A} \cup \mathcal{U}\})$ für alle $f \in \mathrm{B}(\mathfrak{U})$ und alle $\mathcal{A} \in \mathfrak{U}$ einen beschränkten Endomorphismus $\mathfrak{G}_{\mathcal{U}}$. Die Menge $\mathscr{G} = \{\, \mathfrak{G}_{\mathcal{U}} \mid \mathcal{U} \in \mathfrak{U}\,\}$ ist eine abelsche Halbgruppe aus beschränkten linearen Abbildungen auf $\mathrm{B}(\mathfrak{U})$. Dabei ist $\varphi \circ \mathfrak{G}_{\mathcal{U}} = \varphi$ für alle $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$. Weiter seien $g(f) = \lim\limits_{\mathcal{A} \in \mathfrak{U}} [\sup\{\, f(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \supset \mathcal{U}\,\}]$

[176] Dieses Resultat wurde von Joichi bewiesen [179].

[177] Solche verallgemeinerte Folgen werden auch *Netze* genannt.

und $h(f) = \lim\limits_{\mathcal{A}\in\mathfrak{U}} [\inf\{ f(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \supset \mathcal{U}\}]$ für alle $f \in \mathrm{B}(\mathfrak{U})$. Hierfür gilt $g \circ \mathcal{G}_{\mathcal{U}} = g$ für alle $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$. Außerdem ist $\varphi \restriction \mathrm{C}(\mathfrak{U}) = g$, und folglich läßt sich φ gemäß Satz 2.151 auf eine lineare Abbildung Φ auf ganz $\mathrm{B}(\mathfrak{U})$ fortsetzen mit

$$h(f) \leqq \Phi(f) \leqq g(f) \tag{2.61}$$

für alle $f \in \mathrm{B}(\mathfrak{U})$.
Als nächstes definieren wir für alle $x \in \mathcal{V}$ und alle $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$ die Abbildungen f_x durch

$$f_x(\mathcal{U}) := \begin{cases} \| \mathcal{T}_{\mathcal{U}}\, x \|_{\mathcal{H}} & \text{für } x \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit die Abbildung $|||\ \ ||| : \mathcal{V} \longrightarrow [0, \infty)$ durch

$$||| x ||| := \sqrt{\Phi(f_x^2)}. \tag{2.62}$$

Wir zeigen zunächst die Gültigkeit der Parallelogrammgleichung für $|||\ \ |||$. Es seien $x, y \in \mathcal{V}$ und $\mathcal{A} = \mathrm{span}\{x, y\}$. Dann gilt für alle $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$ mit $\mathcal{U} \supseteqq \mathcal{A}$

$$f_x^2(\mathcal{U}) + f_y^2(\mathcal{U}) = \| \mathcal{T}_{\mathcal{U}}\, x \|_{\mathcal{H}}^2 + \| \mathcal{T}_{\mathcal{U}}\, y \|_{\mathcal{H}}^2,$$

und mit Hilfe der Parallelogrammgleichung in $\mathcal{H}$ folgt

$$\begin{aligned} 2\,[f_x^2(\mathcal{U}) + f_y^2(\mathcal{U})] &= \| \mathcal{T}_{\mathcal{U}}\, x + \mathcal{T}_{\mathcal{U}}\, y \|_{\mathcal{H}}^2 + \| \mathcal{T}_{\mathcal{U}}\, x - \mathcal{T}_{\mathcal{U}}\, y \|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \| \mathcal{T}_{\mathcal{U}}\,(x + y) \|_{\mathcal{H}}^2 + \| \mathcal{T}_{\mathcal{U}}\,(x - y) \|_{\mathcal{H}}^2 = f_{x+y}^2(\mathcal{U}) + f_{x-y}^2(\mathcal{U}). \end{aligned}$$

(2.62) liefert dann wunschgemäß

$$||| x + y |||^2 + ||| x - y |||^2 = 2\, ||| x |||^2 + 2\, ||| y |||^2$$

für alle $x, y \in \mathcal{V}$. Wenn $|||\ \ |||$ eine Norm ist, dann stammt sie somit von einem Skalaprodukt. Mit (2.61) und (2.62) gilt außerdem für alle $x \in \mathcal{V}$

$$\lim_{\mathcal{A}\in\mathfrak{U}} [\inf\{ f_x^2(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \supset \mathcal{U}\}] \leqq ||| x |||^2 \leqq \lim_{\mathcal{A}\in\mathfrak{U}} [\sup\{ f_x^2(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \supset \mathcal{U}\}$$

und nach Voraussetzung damit

$$\frac{\|x\|_{\mathcal{V}}}{c} \leqq ||| x ||| \leqq c\, \|x\|_{\mathcal{V}}, \tag{2.63}$$

das heißt, wenn $|||\ \ |||$ eine Norm ist, dann ist sie äquivalent zur Norm $\|\ \ \|_{\mathcal{V}}$.
Nun überprüfen wir die Gültigkeit der Normaxiome für $|||\ \ |||$.
1. (2.62) liefert direkt

$$||| \alpha\, x ||| = \sqrt{\Phi(f_{\alpha x}^2)} = \sqrt{\lim_{\mathcal{X}\in\mathfrak{U}} \| \mathcal{T}_{\mathcal{X}}\,(\alpha\, x) \|_{\mathcal{H}}^2} = \sqrt{\lim_{\mathcal{X}\in\mathfrak{U}} (|\alpha|^2\, \| \mathcal{T}_{\mathcal{X}}\, x \|_{\mathcal{H}}^2)}$$

$$= |\alpha| \sqrt{\lim_{\mathcal{X} \in \mathfrak{U}} \| \mathcal{T}_{\mathcal{X}} x \|_{\mathcal{H}}^2} = |\alpha| \sqrt{\Phi(f_x^2)} = |\alpha| \, ||| \, x \, |||$$

für alle $x \in \mathcal{E}$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$.

2. Zum Nachweis der Dreiecksungleichung für $||| \;\; |||$ ist zuerst eine kurze Vorüberlegung erforderlich. Während die Abbildungen f_x im allgemeinen nicht stetig sind, ist es dafür die Abbildung $||| \;\; |||$. Denn für $x, y \in \mathcal{V}$ und alle $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$ gilt

$$\begin{aligned} | f_{x+y}^2(\mathcal{U}) - f_x^2(\mathcal{U}) | &= \big| \| \mathcal{T}_{\mathcal{U}} (x + y) \|_{\mathcal{H}}^2 - \| \mathcal{T}_{\mathcal{U}} x \|_{\mathcal{H}}^2 \big| \\ &= \big| \| \mathcal{T}_{\mathcal{U}} (x + y) \|_{\mathcal{H}} - \| \mathcal{T}_{\mathcal{U}} x \|_{\mathcal{H}} \big| \big(\| \mathcal{T}_{\mathcal{U}} (x + y) \|_{\mathcal{H}} + \| \mathcal{T}_{\mathcal{U}} x \|_{\mathcal{H}} \big), \end{aligned}$$

nach Voraussetzung gibt es daher Konstanten $p, q > 0$, sodaß

$$\begin{aligned} | f_{x+y}^2(\mathcal{U}) - f_x^2(\mathcal{U}) | &\leqq p \, \| \mathcal{T}_{\mathcal{U}} \, y \, \|_{\mathcal{H}} (\| x + y \|_{\mathcal{V}} + \|x\|_{\mathcal{V}}) \\ &\leqq q \, \|y\|_{\mathcal{V}} (\| x + y \|_{\mathcal{V}} + \|x\|_{\mathcal{V}}), \end{aligned}$$

und weil die Abbildung Φ beschränkt ist, folgt daraus

$$|\Phi(f_{x+y}^2 - f_x^2)| = \big| \, ||| \, x + y \, ||| \; + \; ||| \, x \, ||| \, \big| \leqq q \, \|y\|_{\mathcal{V}} (\| x + y \|_{\mathcal{V}} + \|x\|_{\mathcal{V}}).$$

Daraus ergibt sich die Stetigkeit von $||| \;\; |||$.
Als nächstes zeigen wir, daß die Menge $\mathrm{B} = \{ x \in \mathcal{V} \mid ||| \, x \, ||| \;\leqq 1 \}$ konvex ist. Andernfalls gäbe es Vektoren $x, y \in \mathcal{V}$ mit $||| \, x \, ||| \; = \; ||| \, y \, ||| \; = 1$ und ein $\mu \in (0, 1)$, sodaß

$$||| \, \mu \, x + (1 - \mu) \, y \, ||| > 1.$$

Da die Abbildung $||| \;\; |||$ stetig ist, gilt das auch für die reelle Funktion F mit
$F(t) = ||| \, t \, x + (1 - t) \, y \, |||$, folglich gibt es nach dem Zwischenwertsatz $\mu_1, \mu_2 \in (0, 1)$ mit $\mu_1 < \mu < \mu_2$, sodaß

$$||| \, \mu_1 \, x + (1 - \mu_1) \, y \, ||| \; = \; ||| \, \mu_2 \, x + (1 - \mu_2) \, y \, ||| \; = 1$$

gilt und dazu

$$||| \, \lambda \, x + (1 - \lambda) \, y \, ||| \; > 1$$

für alle $\lambda \in (\mu_1, \mu_2)$. Dann folgt einerseits

$$2 \, ||| \, \mu_1 \, x + (1 - \mu_1) \, y \, |||^2 + 2 \, ||| \, \mu_2 \, x + (1 - \mu_2) \, y \, |||^2 = 4,$$

andererseits liefert die Parallelogrammgleichung

$$\begin{aligned} &2 \, ||| \, \mu_1 \, x + (1 - \mu_1) \, y \, |||^2 + 2 \, ||| \, \mu_2 \, x + (1 - \mu_2) \, y \, |||^2 \\ &= ||| \, \mu_1 \, x + (1 - \mu_1) \, y + \mu_2 \, x + (1 - \mu_2) \, y \, |||^2 + ||| \, (\mu_1 - \mu_2) (x - y) \, |||^2 \\ &\geqq ||| \, \mu_1 \, x + (1 - \mu_1) \, y + \mu_2 \, x + (1 - \mu_2) \, y \, |||^2 \end{aligned}$$

$$= 4 \left|\!\left|\!\left| \frac{1}{2} [\, \mu_1 x + (1-\mu_1)\, y + \mu_2 x + (1-\mu_2)\, y \,] \right|\!\right|\!\right|^2$$

$$= 4 \left|\!\left|\!\left| \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\, x + \left(1 - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right) y \right|\!\right|\!\right|^2 > 4$$

– ein Widerspruch. Somit ist B konvex.
Jetzt seien zu $x, y \in \mathcal{V}$ und $\varepsilon > 0$ die Zahlen ρ und σ so gewählt, daß $|||\, x\, ||| < \rho < |||\, x\, ||| + \varepsilon$ und $|||\, y\, ||| < \sigma < |||\, y\, ||| + \varepsilon$; dann sind $x/\rho, y/\sigma \in$ B, und es gilt

$$\left|\!\left|\!\left| \frac{x}{\rho} \right|\!\right|\!\right| \leqq \left|\!\left|\!\left| \frac{x+y}{\rho+\sigma} \right|\!\right|\!\right| \leqq \left|\!\left|\!\left| \frac{y}{\sigma} \right|\!\right|\!\right|.$$

B ist konvex, daher ist $\dfrac{x+y}{\rho+\sigma} \in$ B. Es folgt

$$|||\, x + y\, ||| \leqq \rho + \sigma \leqq |||\, x\, ||| + |||\, y\, ||| + \varepsilon,$$

und der Grenzübergang $\varepsilon \longrightarrow 0$ liefert die Dreiecksungleichung für $|||\ \ |||$.

3. Aus (2.63) folgt unmittelbar, daß $|||\, x\, ||| = 0$ genau dann gilt, wenn $x = 0$ ist.

Damit ist $|||\ \ |||$ eine zu $\|\ \ \|_{\mathcal{V}}$ äquivalente Norm, die von einem Skalarprodukt kommt, und der Satz ist bewiesen. □

Nun gilt es, das soeben bewiesene Kriterium durch eine stärkere Aussage über jeweils vollständige isomorphe Räume zu ersetzen. Wir brauchen hierfür die Begriffe aus Definition 2.123 sowie zwei Hilfssätze, die sich mit endlichen Unterräumen von im allgemeinen unendlichdimensionalen Banachräumen beschäftigen. Der erste liefert eine Abschätzung des Abstandskoeffizienten $d(\mathcal{U}, \mathbb{C}^n)$ [178] zwischen einem solchen Unterraum $\mathcal{U}$ und dem Hilbertraum $\mathbb{C}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt $(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, \overline{y}_j$.

2.153 Lemma: *$\mathcal{E}$ sei ein unendlichdimensionaler Banachraum. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jedem $\varepsilon > 0$ einen n-dimensionalen Unterraum $\mathcal{U}$ von $\mathcal{E}$, sodaß $d(\mathcal{U}, \mathbb{C}^n) \leqq 1 + \varepsilon$.*

Beweis: Das folgt unmittelbar aus dem *Satz von Dvoretzky*, wonach eine Konstante $c > 0$ existiert, sodaß es zu einem beliebigen n-dimensionalen normierten Raum $\mathcal{V}$ und $0 < \varepsilon < 1/3$ stets einen k-dimensionalen Unterraum $\mathcal{U}$ gibt, sodaß $d(\mathcal{U}, \mathbb{C}^k) \leqq 1 + \varepsilon$ [81][179]. □

Der zweite Hilfssatz beschreibt die endlichdimensionalen Unterräume von Banachräumen durch Bilder geeigneter Projektionen. Dazu verschaffen wir uns zunächst die folgenden beiden Begriffe.

[178] Siehe Abschnitt 2.2.3.4.

[179] Der Satz von Dvoretzky besagt anschaulich, daß hochdimensionale konvexe Körper mit dem Ursprung als Mittelpunkt stets niedrigerdimensionale zentrale Schnitte besitzen, die von euklidischen Kugeln kaum zu unterscheiden sind. Was „niedrigerdimensional" heißen soll, wurde später von Milman [255] und Gordon [112], [113] präzisiert; deren Resultate liefern die Abschätzung $k \leqq c\,\varepsilon^2 \ln n / |\ln \varepsilon|$. Vergleiche auch [4].

2.154 Definition: Es seien $\mathcal{E}$ ein Banachraum und $\mathcal{U}$ ein Unterraum.
(ii) $\lambda(\mathcal{U}) := \inf\{\,\|\mathcal{P}\| \mid \mathcal{P}$ Projektion von $\mathcal{E}$ auf $\mathcal{U}\,\}$ heißt *Projektionskonstante* von $\mathcal{U}$ [180].
$\lambda_f(\mathcal{E}) := \sup\{\,\lambda(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U}$ endlichdimensionaler Unterraum von $\mathcal{E}\,\}$ heißt *absolute Projektionskonstante* von $\mathcal{E}$.

Für nicht komplementierte Unterräume von $\mathcal{E}$ setzen wir $\lambda(\mathcal{U}) = \infty$. Damit formulieren wir das zweite oben erwähnte

2.155 Lemma: *Ist $\mathcal{E}$ ein Banachraum, dessen sämtliche Unterräume komplementiert sind, dann gibt es ein $1 \leqq \lambda < \infty$, sodaß jeder endlichdimensionale Unterraum von $\mathcal{E}$ Bild einer Projektion $\mathcal{P}$ ist mit $\|\mathcal{P}\| < \lambda$.*

Beweis: [181] Es seien $\mathcal{E}$ ein Banachraum mit $\lambda_f(\mathcal{E}) = \infty$ und $\mathcal{U}_1$ ein endlichdimensionaler Unterraum von $\mathcal{E}$ mit $\lambda(\mathcal{U}_1) \geqq 1$. Ist $\mathrm{K}_r(x)$ die offene Kugel mit Radius r um den Punkt x, dann gilt in $\mathcal{U}_1$

$$\overline{\mathrm{K}_1(0)} = \bigcap_{\substack{f\in\mathcal{U}'\\ \|f\|=1}} f^{-1}([-1,1])$$

und somit für $1 < q < 2$ und den abgeschlossenen und daher kompakten Kreisring $\mathrm{A} = \{\, x \in \mathcal{U}_1 \mid q \leqq \|x\| \leqq 2\,\}$

$$\bigcap_{\substack{f\in\mathcal{U}'\\ \|f\|=1}} [\, f^{-1}([-1,1]) \cap \mathrm{A}\,] = \emptyset.$$

Folglich gibt es eine Familie $(f_1, f_2, \dots, f_{n_1})$ von stetigen Funktionalen aus $\mathcal{U}_1'$ mit $\|f_j\| = 1$ für $j = 1, 2, \dots, n_1$ und

$$\bigcap_{j=1}^{n_1} [\, f_j^{-1}([-1,1]) \cap \mathrm{A}\,] = \mathrm{A} \cap \bigcap_{j=1}^{n_1} f_j^{-1}([-1,1]) = \emptyset.$$

Daraus ergibt sich

$$\mathrm{K}_1(0) \subset \bigcap_{j=1}^{n_1} f_j^{-1}([-1,1]) \subset \mathrm{K}_2(0).$$

$g_1, g_2, \dots, g_{n_1}$ seien die Erweiterungen der $f_1, f_2, \dots, f_{n_1}$ auf $\mathcal{E}'$. Deren Existenz ist nach Satz 2.54 beziehungsweise 2.55 garantiert, und für diese folgt

$$\mathrm{K}_1(0) \subset \bigcap_{j=1}^{n_1} g_j^{-1}([-1,1]) \cap \mathcal{U}_1 \subset \mathrm{K}_2(0).$$

[180] Dieser Begriff wurde von Murray eingeführt [263].
[181] Der Beweis stammt von Davis, Dean und Singer [62]; während Lemma 2.155 hier durch Nachweis der Kontraposition hergeleitet wird, ist diese im Original selbst die behauptete Aussage.

Weiter sei $\mathcal{A}_1 := \bigcap\limits_{j=1}^{n_1} g_j^{-1}(0)$; weil es zu jedem $x \in \mathcal{E}$ mit $x \neq 0$ ein j gibt mit $g_j(x) \neq 0$, gilt damit $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{A}_1 = \{0\}$. Für die Projektion $\mathcal{P}_1 : \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{U}_1$ mit $\mathcal{P}_1(\,x + y\,) = x$ für $x \in \mathcal{U}_1$ und $y \in \mathcal{A}_1$ erhält man dann $\|\mathcal{P}_1\| \leqq 2$.
Außerdem ist $\mathcal{A}_1$ ein endlicher Durchschnitt abgeschlossener Unterräume und damit selbst ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{E}$. Nun sei $\mathcal{B}$ ein endlichdimensionaler Unterraum von $\mathcal{A}_1$ mit $\dim \mathcal{A}_1/\mathcal{B} = N < \infty$. Damit gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine Projektion $\mathcal{Q}_\varepsilon : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{B}$, für die $\|\mathcal{Q}_\varepsilon\| < 2^N + \varepsilon$ gilt[182]. Für jede Projektion $\mathcal{P} : \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_1$ ist dann auch $\mathcal{Q}_\varepsilon \circ \mathcal{P} : \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{B}$ eine Projektion, woraus $\lambda(\mathcal{B}) \leqq 2^N \lambda(\mathcal{A}_1)$ folgt. Als nächstes betrachte man für $\varepsilon > 0$ eine Projektion $\mathcal{P}_\varepsilon : \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_1$ mit $\|\mathcal{P}_1\| \leqq 2^{\dim \mathcal{U}_1} + \varepsilon$ sowie einen beliebigen endlichdimensionalen Unterraum $\mathcal{A}$ von $\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{A}_1$. Dann gilt natürlich[183] $\mathcal{A} \subset (\,1 - \mathcal{P}_\varepsilon\,)\,(\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{A}_1) \oplus \mathcal{P}_\varepsilon\,\mathcal{A}$, und wegen $\dim \mathcal{P}_\varepsilon\,\mathcal{A} < \dim \mathcal{A} < \infty$ gibt es eine Projektion $\mathcal{Q} : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_\varepsilon\,\mathcal{A}$ mit $\|\mathcal{Q}\| < \lambda_f(\mathcal{A}) + \varepsilon$. Somit ist auch

$$(\,1 - \mathcal{P}_\varepsilon\,) + \mathcal{Q} \circ \mathcal{P}_\varepsilon : (\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{A}_1) \longrightarrow (\,1 - \mathcal{P}_\varepsilon\,)\,(\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{A}_1) \oplus \mathcal{P}_\varepsilon\,\mathcal{A},$$

eine Projektion, es gilt also

$$\lambda((\,1 - \mathcal{P}_\varepsilon\,)\,(\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{A}_1) \oplus \mathcal{P}_\varepsilon\,\mathcal{A}\,) \leqq 2^{\dim \mathcal{U}_1} + 1 + 2^{\dim \mathcal{U}_1}\,\lambda_f(\mathcal{A}_1),$$

wegen $\dim(\,1 - \mathcal{P}_\varepsilon\,)\,(\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{A}_1)/\mathcal{A} \leqq \dim \mathcal{U}_1$ weiter

$$\lambda(\mathcal{A}) \leqq 2^{\dim \mathcal{U}_1}\,\{\,1 + 2^{\dim \mathcal{U}_1}\,[\,1 + \lambda_f(\mathcal{U}_1)\,]\}$$

und daher $\lambda_f(\,\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{A}_1) < \infty$.
Folglich kann man einen endlichdimensionalen Unterraum $\mathcal{U}_2$ von $\mathcal{A}_1$ wählen mit $\lambda(\mathcal{U}_2) \geqq 2$. Die Situation ist damit analog zu derjenigen oben, es gibt also eine Familie $(g_{n_1+1}, g_{n_1+2}, \ldots, g_{n_2})$ von Funktionalen aus $\mathcal{E}'$ mit $\|g_j\| = 1$ für $j = n_1{+}1, n_1{+}2, \ldots, n_2$ und

$$\mathrm{K}_1(0) \subset \bigcap_{j=1}^{n_2} g_j^{-1}([-1,1]) \cap (\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2) \subset \mathrm{K}_2(0).$$

Für $\mathcal{A}_2 := \bigcap\limits_{j=1}^{n_2} g_j^{-1}(0)$ gilt dann $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$ und $\dim \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_1 \leqq n_2$, und für die Projektion $\mathcal{P}_2 : \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ mit $\mathcal{P}_1(\,x + y + z\,) = x + y$ für $x \in \mathcal{U}_1, y \in \mathcal{U}_2$ und $z \in \mathcal{A}_2$ findet man ebenfalls $\|\mathcal{P}_2\| \leqq 2$. Damit erhalten wir induktiv Folgen von Unterräumen $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lambda(\mathcal{U}_n) \geqq n$ und $\mathcal{A}_{n+1} \subset \mathcal{A}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodaß für die Projektionen $\mathcal{P}_n : \left(\bigoplus\limits_{j=1}^{n} \mathcal{U}_j\right) \oplus \mathcal{A}_n \longrightarrow \bigoplus\limits_{j=1}^{n} \mathcal{U}_j$ mit $\mathcal{P}_n\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_n + y\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_n$ für $x_j \in \mathcal{U}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ und $y \in \mathcal{A}_n$ jeweils $\|\mathcal{P}_j\| \leqq 2$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

[182] Einen Beweis hierfür findet man beispielsweise in [125].
[183] Wie üblich schreiben wir $\mathbf{1} + \mathcal{A} \equiv 1 + \mathcal{A}$.

Nun betrachten wir die direkte Summe $\mathcal{F} := \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{U}_j$ sowie die Projektionen $\mathcal{Q}_n : \mathcal{F} \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{U}_j$ mit $\mathcal{Q}_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_n$. Definitionsgemäß gibt es für jedes $x \in \mathcal{F}$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodaß $x \in \bigoplus_{j=1}^{N} \mathcal{U}_j \subset \bigoplus_{j=1}^{N} \mathcal{U}_j \oplus \mathcal{A}_N$, daher ist $\mathcal{Q}_n$ auch eine Projektion von $\bigoplus_{j=1}^{N} \mathcal{U}_j \oplus \mathcal{A}_N$ auf $\bigoplus_{j=1}^{N} \mathcal{U}_j$, und es gilt $\| \mathcal{Q}_n x \| \leqq 2 \|x\|$. Außerdem ist $\mathcal{F}$ natürlich dicht in seinem Abschluß $\overline{\mathcal{F}}$, folglich können die $\mathcal{Q}_n$ zu Projektionen $\overline{\mathcal{Q}}_n : \overline{\mathcal{F}} \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{U}_j$ mit $\|\overline{\mathcal{Q}}_n\| \leqq 2$ fortgesetzt werden.

Nun sei $\overline{\mathcal{F}}$ komplementiert. Für jede stetige Projektion $\mathcal{R} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ wird dann durch $(\,-\mathcal{P}_{n-1}\,)\,\mathcal{P}_n\,\mathcal{R}$ eine Projektion von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{U}_n$ definiert mit $\|\,(\,1 - \mathcal{P}_{n-1}\,)\,\mathcal{P}_n\,\mathcal{R}\,\| \leqq 6\,\|\mathcal{R}\|$, und es folgt $\lambda(\mathcal{U}_n) \leqq 6\,\|\mathcal{R}\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ – ein Widerspruch, denn nach Voraussetzung gilt $\lambda_f(\mathcal{E}) = \infty$. Somit ist $\overline{\mathcal{F}}$ ein nichtkomplementierter Unterraum von $\mathcal{E}$. Umgekehrt gilt dann für einen Banachraum $\mathcal{E}$, dessen sämtliche Unterräume komplementiert sind, $\lambda_f(\mathcal{E}) < \infty$. Daraus folgt die Behauptung. □

Wir sind nun mit allen Hilfsmitteln ausgerüstet, um das bereits angekündigte Kriterium für Isomorphie bei Banach- und Hilberträumen zu beweisen.

2.156 Satz von Lindenstrauss-Tzafriri:[184] *Ein Banachraum ist genau dann isomorph zu einem Hilbertraum, wenn alle seine abgeschlossenen Unterräume komplementiert sind.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Ist $\mathcal{U}$ ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums $\mathcal{H}$, dann sind $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}^{\perp}$ nach Lemma 2.144 algebraisch komplementär. Außerdem ist die Projektion $\mathcal{P} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{U}$ mit $\ker \mathcal{P} = \mathcal{U}^{\perp}$ orthogonal, damit gilt $\|\mathcal{P}\| = 1$, und folglich sind $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}^{\perp}$ auch topologisch komplementär. Ist $\mathcal{E}$ ein zu $\mathcal{H}$ isomorpher Banachraum, dann überträgt sich dieser Sachverhalt vermöge des Isomorphismus zwischen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{H}$ auch auf $\mathcal{E}$.

„$\Longleftarrow$“: $\mathcal{E}$ sei ein unendlichdimensionaler Banachraum (Für endlichdimensionale Räume ist der Satz trivialerweise richtig), dessen abgeschlossene Unterräume sämtlich komplementiert sind. Nach Lemma 2.155 gibt es dann ein $1 \leqq \lambda < \infty$, sodaß jeder endlichdimensionale Unterraum von $\mathcal{E}$ Bild einer Projektion $\mathcal{P}$ ist mit $\|\mathcal{P}\| < \lambda$. Ist $\mathcal{P}$ eine solche Projektion und $\mathcal{U}$ ein solcher Unterraum mit $\dim \mathcal{U} = n$, dann gibt es nach Lemma 2.153 einen Unterraum $\mathcal{A}$ von $(\,1 - \mathcal{P}\,)\,\mathcal{E}$ mit $\dim \mathcal{A} = n$ und $d(\mathcal{A}, \mathbb{C}^n) \leqq 2$. Damit ist $d(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \leqq 2\,d(\mathcal{U}, \mathbb{C}^n)$, und setzt man $d(\mathcal{U}, \mathbb{C}^n) := \alpha$, dann existiert ein Isomorphismus $\mathcal{T} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{A}$ mit

$$\frac{\|x\|}{2\,\alpha} \leqq \|\,\mathcal{T}\,x\,\| \leqq \|x\| \tag{2.64}$$

für alle $x \in \mathcal{U}$.

Nun seien $\mu = 2^6\,\lambda^2$ und $\mathcal{B} = \{\,x + \mu\,\mathcal{T}\,x \mid x \in \mathcal{U}\,\}$, und außerdem sei $\mathcal{Q}$ eine Projektion

[184] Die in diesem Satz beantwortete Frage ist als *Problem der komplementierten Unterräume* bekannt geworden und stellte jahrzehntelang eine Herausforderung dar, der die gesamte Funktionalanalytiker-Prominenz nicht gewachsen schien, bis Lindenstrauss und Tzafriri die hier beschriebene Lösung präsentierten [225].

von $\mathcal{U}$ auf $\mathcal{B}$ mit $\|\mathcal{Q}\| < \lambda$. Für jedes $y \in \mathcal{B}$ gibt es genau ein $x \in \mathcal{U}$ mit $y = x + \mu\,\mathcal{T}x$, denn aus $x + \mu\,\mathcal{T}x = 0$ folgt $x = -\mu\,\mathcal{T}x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{A} = \{0\}$. Damit gibt es eine Abbildung $\mathcal{S} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ mit

$$\mathcal{Q}\,\mathcal{T}x = \mathcal{S}x + \lambda\,\mathcal{T}\mathcal{S}x$$

für alle $x \in \mathcal{U}$; wegen $\mathcal{P}y = y$ für alle $y \in \mathcal{U}$ und $\mathcal{P}y = 0$ für alle $y \in \mathcal{A}$ erhält man

$$\mathcal{P}\,\mathcal{Q}\,\mathcal{T}x = \mathcal{S}x$$

und damit

$$\|\,\mathcal{S}x\,\| \leqq \lambda^2\,\|\,\mathcal{T}x\,\| \leqq \lambda^2\,\|x\| \tag{2.65}$$

für alle $x \in \mathcal{U}$. Außerdem gilt ebenfalls für alle $x \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}x &= \mathcal{Q}\,(\,x + \mu\,\mathcal{T}x\,) - \mu\,\mathcal{Q}\,\mathcal{T}x = x + \mu\,\mathcal{T}x - \mu\,(\,\mathcal{S}x + \lambda\,\mathcal{T}\mathcal{S}x\,)\\ &= x - \mu\,\mathcal{S}x + \mu\,(\,\mathcal{T}x - \lambda\,\mathcal{T}\mathcal{S}x\,) \in \mathcal{U} + \mathcal{A} = \operatorname{ran}\mathcal{P} + \ker\mathcal{P}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(\,1 - \mathcal{P}\,)\,\mathcal{Q}x = \mu\,(\,\mathcal{T}x - \lambda\,\mathcal{T}\mathcal{S}x\,), \tag{2.66}$$

und (2.64), (2.65) und (2.66) liefern zusammen

$$\begin{aligned}\|\,(\,1 - \mathcal{P}\,)\,\mathcal{Q}x\,\| &= \mu\,\|\,\mathcal{T}x - \lambda\,\mathcal{T}\mathcal{S}x\,\| \geqq \frac{\mu}{2\,\alpha}\,\|\,x - \lambda\,\mathcal{S}x\,\|\\ &\geqq \frac{\mu}{2\,\alpha}\,\big(\,\|x\| - \lambda\,\|\,\mathcal{S}x\,\|\,\big) \geqq \frac{\mu}{2\,\alpha}\,\big(\,\|x\| - \lambda\,\mu^2\,\|\,\mathcal{T}x\,\|\,\big).\end{aligned}$$

Aufgrund von $d(\mathcal{A}, \mathbb{C}^n) \leqq 2$ gibt es einen Isomorphismus $\mathcal{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ mit

$$\frac{\|x\|}{2} \leqq \|\,\mathcal{F}x\,\| \leqq \|x\|$$

für alle $x \in \mathcal{A}$. Dazu sei $\mathcal{G} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$ definiert durch

$$\mathcal{G}x := \left(\frac{\mathcal{F}\mathcal{T}x}{2}\,,\ \frac{\mathcal{F}\,(\,\mathbf{1} - \mathcal{P}\,)\,\mathcal{Q}x}{4\,\lambda^2}\right),$$

dann ist

$$\begin{aligned}\|\,\mathcal{G}x\,\| &\leqq \frac{\|\,\mathcal{F}\mathcal{T}x\,\|}{2} + \frac{\|\,\mathcal{F}\,(\,1 - \mathcal{P}\,)\,\mathcal{Q}x\,\|}{4\,\lambda^2}\\ &\leqq \frac{\|\mathcal{F}\|\,\|\mathcal{T}\|\,\|x\|}{2} + \frac{\|\mathcal{F}\|\,\|\,1 - \mathcal{P}\,\|\,\|\mathcal{Q}\|\,\|x\|}{4\,\lambda^2} \leqq \frac{\|x\|}{2} + \frac{\lambda\,(\,\lambda + 1\,)\,\|x\|}{4\,\lambda^2} \leqq \|x\|\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathcal{U}$. Gleichzeitig gilt für $\mathcal{F}$ die Abschätzung

$$\|\,\mathcal{F}x\,\| \geqq \max\left\{\frac{\|\,\mathcal{F}\mathcal{T}x\,\|}{2}\,,\ \frac{\|\,\mathcal{F}\,(\,1 - \mathcal{P}\,)\,\mathcal{Q}x\,\|}{4\,\lambda^2}\right\} \geqq \max\left\{\frac{\|\,\mathcal{T}x\,\|}{4}\,,\ \frac{\|\,(\,1 - \mathcal{P}\,)\,\mathcal{Q}x\,\|}{8\,\lambda^2}\right\}$$

$$\geqq \max \left\{ \frac{\| \mathcal{T} x \|}{4}, \frac{\mu}{16\,\alpha\,\lambda^2} \left(\|x\| - \mu\,\lambda^2 \| \mathcal{T} x \| \right) \right\}.$$

Ist nun einerseits $2^7 \lambda^4 \| \mathcal{T} x \| \geqq \|x\|$, dann gilt

$$\| \mathcal{F} x \| \geqq \frac{\| \mathcal{T} x \|}{4} \geqq \frac{\|x\|}{2^9 \lambda^4}.$$

Ist andererseits $2^7 \lambda^4 \| \mathcal{T} x \| < \|x\|$, dann folgt

$$\| \mathcal{F} x \| \geqq \frac{\mu}{16\,\alpha\,\lambda^2} \left(\|x\| - 2^6 \lambda^4 \| \mathcal{T} x \| \right) \geqq \frac{\mu}{2^5\,\alpha\,\lambda^2} \|x\| = \frac{2}{\alpha} \|x\|.$$

Damit gilt für alle $x \in \mathcal{U}$

$$\|x\| \geqq \| \mathcal{F} x \| \geqq \|x\| \min \left\{ \frac{1}{2^9 \lambda^4}, \frac{2}{\alpha} \right\},$$

das heißt, $\mathcal{F}$ ist ein Isomorphismus von $\mathcal{U}$ nach $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{2n}$. Die Definition von α liefert zusätzlich $\alpha \leqq 2^9 \lambda^4$, und daher gilt für alle $x \in \mathcal{U}$

$$\|x\| \geqq \| \mathcal{F} x \| \geqq \frac{\|x\|}{2^9 \lambda^4}.$$

Mit Satz 2.152 folgt unmittelbar die Behauptung. □

Wir bemerken ergänzend, daß man Satz 2.150 zu einer weiteren Aussage über isomorphe Banach- und Hilberträume verallgemeinern kann, und zwar ganz einfach, indem man die zusätzlichen Forderungen an die Typ- und Cotyp-Konstanten fallen läßt. Dadurch verzichtet man gleichzeitig darauf, die verallgemeinerte und folglich auch die eigentliche Parallelogrammgleichung herleiten zu können. Die Aussage ist dann die folgende: Ein Banachraum $\mathcal{E}$ ist genau dann isomorph zu einem Hilbertraum, wenn $\operatorname{type}(\mathcal{E}) = \operatorname{cotype}(\mathcal{E}) = 2$ gilt [209][185]. Wir verzichten hier auf den Beweis; für Details sei auf die Literatur verwiesen.

2.3.3 Vollständige Orthonormalsysteme

Der nächste Gegenstand unserer Betrachtung ist der Begriff der *Basis* für Hilberträume. Hierzu wurde bereits einiges gesagt; Hilberträume sind Vektorräume, und nach Satz 2.9 besitzt jeder Vektorraum eine Hamel-Basis. Man kann folglich in jedem Hilbertraum $\mathcal{H}$ eine Teilmenge B finden, so daß sich jeder Vektor $\psi \in \mathcal{H}$ eindeutig als endliche Summe

$$\psi = \sum_{j=1}^{n} c_j\, \varphi_j$$

darstellen läßt mit $\varphi_j \in$ B für $j = 1, 2, \ldots, n$. Alle Hilberträume sind Banachräume, daher gilt alles in Abschnitt 2.2.3.8 über Hamel-Basen gesagte unverändert – insbesondere auch diejenigen Aussagen, die zeigen, daß Hamel-Basen von unendlichdimensionalen Banachräumen

[185] Vergleiche auch [4] und [393].

zwar sehr interessante, aber auch äußerst unhandliche Objekte sind, für die man im allgemeinen auch keine konstruktiven Verfahren angeben kann, mit denen sie sich auffinden lassen. Im selben Abschnitt wurde auch beschrieben, wie man sich hier durch die Verwendung konventioneller oder langer Schauder-Basen behilft, dabei aber keinen vollwertigen Ersatz findet, unter anderem, weil nicht einmal jeder Banachraum überhaupt eine Schauder-Basis besitzt. Bei Hilberträumen dagegen sieht all das viel besser aus.

Ausgangspunkt unserer Betrachtung sind Definition 2.74 und die dort eingeführten Biorthogonalsysteme beziehungsweise gewöhnlichen und starken Markushevich-Basen. Der Umgang mit solchen Objekten erwies sich bei Banachräumen als recht anstrengend; etwas analoges findet sich hier jedoch dank der in Hilberträumen zusätzlich vorhandenen Strukturen mühelos in Gestalt folgender

2.157 Definition: Γ sei eine Ordinalzahl und $\mathcal{V}$ ein unitärer Raum. Eine Familie $\mathsf{F} = (\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ von Vektoren aus $\mathcal{V}$ mit $\varphi_\gamma \neq 0$ für $\gamma < \Gamma$ heißt

(i) *Orthogonalsystem*, falls $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = 0$ gilt für alle $\alpha, \beta < \Gamma$ mit $\alpha \neq \beta$,

(ii) *Orthonormalsystem*, falls $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ gilt für alle $\alpha, \beta < \Gamma$.

Natürlich ist jedes Orthonormalsystem auch ein Orthogonalsystem. – Die Bezeichnung „orthomormal“, die in Definition 2.74 noch eher unmotiviert daherkam, erhält damit eine unmittelbar anschauliche Bedeutung: Die Elemente eines Orthogonal- oder Orthonormalsystems sind im geometrischen Sinn paarweise zueinander senkrecht. – Das nächste Resultat deutet bereits an, daß die Bedeutung solcher Systeme über diesen geometrischen Aspekt weit hinausgeht.

2.158 Lemma: *Orthogonalsysteme sind linear unabhängig.*

Beweis: Es seien $\mathcal{V}$ ein unitärer Raum, $\mathsf{F} = (\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ ein Orthogonalsystem in $\mathcal{V}$ und außerdem $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in \mathsf{F}$ beliebig gewählt. Nun sei

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j = 0$$

mit geeigneten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Damit gilt für alle $\gamma < \Gamma$ einerseits

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j, \varphi_\gamma \right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\varphi_j, \varphi_\gamma) = \begin{cases} \lambda_\gamma \|\varphi_\gamma\|^2 & \text{für } \gamma = 1, 2, \ldots, n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

andererseits

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j, \varphi_\gamma \right) = (0, \varphi_\gamma) = 0,$$

und folglich ist $\lambda_j = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, n$. Alle endlichen Teilmengen von F sind somit linear unabhängig, also ist F selbst auch linear unabhängig. □

Ist $\mathcal{V}$ ein separabler unitärer Vektorraum, dann läßt sich Lemma 2.158 in gewissem Sinn umkehren. Denn dann kann man aus jeder linear unabhängigen Familie von Vektoren in $\mathcal{V}$ ein Orthonormalsystem konstruieren. Das leistet das *Orthonormalisierungsverfahren nach E. Schmidt* [330][186]: Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge linear unabhängiger Vektoren in $\mathcal{V}$. Man beginnt mit dem normierten Vektor $u_1 = \varphi_1/\|\varphi_1\|$, bildet sodann den Vektor $\chi_2 = \varphi_2 - (\varphi_2, u_1)\, u_1$, der offensichtlich orthogonal zu u_1 ist, und setzt $u_2 = \chi_2/\|\chi_2\|$. Analog erhält man mit $\chi_3 = \varphi_3 - (\varphi_3, u_1)\, u_1 - (\varphi_3, u_2)\, u_3$ einen zu u_1 und u_2 orthogonalen Vektor und wählt dann $u_3 = \chi_3/\|\chi_3\|$. So geht es nun weiter; den $(n+1)$-ten normierten Vektor erhält man über den Vektor

$$\chi_{n+1} = \varphi_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (\varphi_{n+1}, u_j)\, u_j,$$

der zu $u_1, u_2, \ldots, u_n$ orthogonal ist, durch

$$u_{n+1} = \chi_{n+1}/\|\chi_{n+1}\|.$$

Das wiederholt man immerfort und konstruiert so mit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{V}$. Darüberhinaus gilt $\operatorname{span}(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} = \operatorname{span}(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für nichtseparable Räume und überabzählbare linear unabhängige Familien von Vektoren läßt sich kein allgemeines konstruktives Verfahren zur Orthogonalisierung angeben, denn das wäre gleichbedeutend mit einem konstruktiven Beweis des Auswahlaxioms. Wir werden jedoch gleich sehen, daß es dennoch auch dort stets Orthonormalsysteme gibt.

Da in Definition 2.157 $|\Gamma| \leqq |\mathcal{V}|$ gilt, kann Γ je nach Hilbertraum beliebig groß und insbesondere überabzählbar sein. Somit sind bei Summenbildungen über Orthogonalsysteme die Bemerkungen zur Summierbarkeit überabzählbarer Mengen aus Abschnitt 2.2.3.8 zu beachten. Zu diesem Zweck leiten wir ein wichtiges Summierbarkeitskriterium für Orthogonalsysteme her.

2.159 Lemma: $\mathrm{F} = (\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ *sei ein Orthogonalsystem in einem unitären Raum* $\mathcal{V}$. *Dann gelten folgende Aussagen.*

(i) F *ist genau dann summierbar, wenn* $(\|\varphi_\gamma\|^2)_{\gamma<\Gamma}$ *in* $\mathbb{R}$ *summierbar ist.*

(ii) Ist F *summierbar, dann gilt* $\Big\| \sum\limits_{\gamma<\Gamma} \varphi_\gamma \Big\|^2 = \sum\limits_{\gamma<\Gamma} \|\varphi_\gamma\|^2$.

Beweis: (i), „$\Longrightarrow$“: Ist F summierbar, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Indexmenge $\mathrm{J}_\varepsilon \subset \Gamma$ gibt, sodaß $\Big\| \sum\limits_{j\in \mathrm{J}} \varphi_j \Big\| < \varepsilon$ gilt für alle endlichen Indexmengen $\mathrm{J} \subset \Gamma$, die zu J_ε disjunkt

[186] Schmidt schreibt in [330], daß dieselben Formeln wie in seinem Verfahren auch schon von J. P. Gram angegeben wurden [116]. In Wirklichkeit taucht das Orthonormalisierungsverfahren noch früher auf; ursprünglich entwickelt wurde es von Laplace, auch Cauchy verwendete es bereits.

sind. Für alle diese Indexmengen J ist folglich

$$\varepsilon^2 > \left\| \sum_{j \in J} \varphi_j \right\|^2 = \left(\sum_{i \in J} \varphi_i, \sum_{j \in J} \varphi_j \right) = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} (\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{j \in J} (\varphi_j, \varphi_j) = \sum_{j \in J} \|\varphi_j\|^2.$$

Damit ist $\left| \sum\limits_{j \in J} \|\varphi_j\|^2 \right| < \varepsilon^2$, also ist $(\|\varphi_\gamma\|^2)_{\gamma < \Gamma}$ summierbar.

„$\Longleftarrow$“: Ist $(\|\varphi_\gamma\|^2)_{\gamma < \Gamma}$ summierbar, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Indexmenge $J_\varepsilon \subset \Gamma$ gibt, sodaß $\left| \sum\limits_{j \in J} \|\varphi_j\|^2 \right| < \varepsilon^2$ gilt für alle endlichen Indexmengen $J \subset \Gamma$, die zu J_ε disjunkt sind. Analog zu oben folgt daraus die Summierbarkeit von F.

(ii): Folgt unmittelbar aus (i). □

Um nun zu einem Zusammenhang zwischen Orthonormalsystemen und Basen von Hilberträumen zu gelangen, betrachten wir mit Blick auf Lemma 2.158 analog zu den Überlegungen bei algebraischen Erzeugendensystemen maximale Orthonormalsysteme, also solche, die nicht mehr durch Hinzunahme weiterer Vektoren vergrößert werden können. Dazu formulieren wir die nächste

2.160 Definition: (i) Eine Familie F von Vektoren aus einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt *vollständiges Orthogonalsystem* von $\mathcal{H}$, wenn es in $\mathcal{H}$ keine Vektoren $\neq 0$ gibt, die zu allen Vektoren aus F orthogonal sind.

(ii) Ein vollständiges Orthogonalsystem aus normierten Vektoren heißt *vollständiges Orthomormalsystem*.

Außerdem ist die Beschaffung eines weiteren Hilfsresultats in Gestalt einer Ungleichung erforderlich, nämlich die

2.161 Besselsche Ungleichung: *Ist $F = (\varphi_\gamma)_{\gamma < \Gamma}$ ein Orthonormalsystem in einem unitären Raum $\mathcal{V}$, dann gilt für alle $\psi \in \mathcal{V}$*

$$\sum_{\gamma < \Gamma} |(\psi, \varphi_\gamma)|^2 \leqq \|\psi\|^2.$$

Beweis: Es seien $J \subset \Gamma$ eine endliche Indexmenge und $\psi \in \mathcal{V}$, dann gilt einerseits

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \in J} (\psi, \varphi_j)\, \varphi_j \right\|^2 &= \left(\sum_{i \in J} (\psi, \varphi_i)\, \varphi_i, \sum_{j \in J} (\psi, \varphi_j)\, \varphi_j \right) = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} (\psi, \varphi_i)\, (\varphi_j, \psi)\, \delta_{ij} \\ &= \sum_{j \in J} |(\varphi_j, \psi)|^2 = \sum_{j \in J} |(\varphi_j, \psi)|^2\, \|\varphi_j\|^2; \end{aligned} \tag{2.67}$$

nach Lemma 2.159 (i) ist somit $((\psi, \varphi_\gamma)\, \varphi_\gamma)_{\gamma < \Gamma}$ summierbar, und es gilt

$$\left\| \sum_{\gamma < \Gamma} (\psi, \varphi_\gamma)\, \varphi_\gamma \right\|^2 = \sum_{\gamma < \Gamma} |(\psi, \varphi_\gamma)|^2. \tag{2.68}$$

Andererseits ist

$$\left(\sum_{i\in J}(\psi,\varphi_i)\,\varphi_i,\psi-\sum_{j\in J}(\psi,\varphi_j)\,\varphi_j\right)=\left(\sum_{i\in J}(\psi,\varphi_i)\,\varphi_i,\sum_{j\in J}(\psi,\varphi_j)\,\varphi_j\right)$$
$$-\left(\sum_{i\in J}(\psi,\varphi_i)\,\varphi_i,\psi\right)$$
$$=\sum_{j\in J}|(\varphi_j,\psi)|^2-\sum_{j\in J}|(\varphi_j,\psi)|^2=0,$$

also gilt $\sum\limits_{i\in J}(\psi,\varphi_i)\,\varphi_i\perp\psi-\sum\limits_{j\in J}(\psi,\varphi_j)\,\varphi_j$ und nach Satz 2.140 daher

$$\left\|\sum_{j\in J}(\psi,\varphi_j)\,\varphi_j\right\|^2\leqq\left\|\sum_{j\in J}(\psi,\varphi_j)\,\varphi_j\right\|^2+\left\|\psi-\sum_{j\in J}(\psi,\varphi_j)\,\varphi_j\right\|^2=\|\psi\|^2. \tag{2.69}$$

Daraus ergibt sich

$$\left\|\sum_{\gamma<\Gamma}(\psi,\varphi_\gamma)\,\varphi_\gamma\right\|^2\leqq\|\psi\|^2. \tag{2.70}$$

Mit (2.68) und (2.70) folgt die Behauptung. □

Wir kommen nun zurück zu der für diesen Abschnitt zentralen Definition 2.160. Die Frage, wann ein Orthonormalsystem vollständig sei, erweist sich als identisch mit derjenigen, wann aus Ungleichung 2.161 eine Gleichung wird. Diese erinnert dann formal stark an die euklidische Norm eines Vektors in cartesischen Koordinatensystemen im $\mathbb{R}^n$, was gleichzeitig die Bedeutung der Skalarprodukte in der Summe auf der linken Seite als Entwicklungskoeffizienten und damit als Verallgemeinerung der Koordinaten eines Vektors in einem cartesischen Koordinatensystem erahnen läßt. Dieser Eindruck wird noch verstärkt durch den nächsten

2.162 Satz: $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ *sei ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum* $\mathcal{H}$*. Dann konvergiert für jedes* $\psi\in\mathcal{H}$ *die Reihe* $\sum\limits_{\gamma<\Gamma}(\psi,\varphi_\gamma)\,\varphi_\gamma$ *unbedingt.*

Beweis: $\pi:\Gamma\longrightarrow\Gamma$ sei eine beliebige Umordnung der Kardinalzahlen $\gamma<\Gamma$. Nach Satz 2.140 gilt für $n,m\in\mathbb{N}$ mit $n<m$

$$\left\|\sum_{\pi(\gamma)=n}^{m}(\psi,\varphi_{\pi(\gamma)})\,\varphi_{\pi(\gamma)}\right\|^2=\sum_{\pi(\gamma)=n}^{m}|(\psi,\varphi_{\pi(\gamma)})|^2,$$

und Ungleichung 2.161 liefert

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{\pi(\gamma)=n}^{m}(\psi,\varphi_{\pi(\gamma)})\,\varphi_{\pi(\gamma)}\right\|^2=\sum_{\pi(\gamma)=0}^{\infty}|(\psi,\varphi_{\pi(\gamma)})|^2-\sum_{\pi(\gamma)=0}^{\infty}|(\psi,\varphi_{\pi(\gamma)})|^2=0.$$

Damit ist $\left(\sum_{\pi(\gamma)=0}^{n} (\psi, \varphi_{\pi(\gamma)})\, \varphi_{\pi(\gamma)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, und da $\mathcal{H}$ vollständig ist, existiert der Grenzwert $\chi = \sum_{\pi(\gamma)=0}^{\infty} (\psi, \varphi_{\pi(\gamma)})\, \varphi_{\pi(\gamma)}$ in $\mathcal{H}$. Ist nun $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine beliebige Permutation, dann zeigt eine analoge Überlegung, daß auch jede beliebig umgeordnete Reihe $\chi_\sigma = \sum_{\sigma(\pi(\gamma))=0}^{\infty} (\psi, \varphi_{\sigma(\pi(\gamma))})\, \varphi_{\sigma(\pi(\gamma))}$ in $\mathcal{H}$ existiert. Nun sei $\xi \in \mathcal{H}$, dann ist

$$(\chi, \xi) = \sum_{\pi(\gamma)=0}^{\infty} (\psi, \varphi_{\pi(\gamma)})\, (\varphi_{\pi(\gamma)}, \xi);$$

diese Reihe konvergiert natürlich absolut und damit auch unbedingt, sodaß

$$(\chi, \xi) = \sum_{\sigma(\pi(\gamma))=0}^{\infty} (\psi, \varphi_{\sigma(\pi(\gamma))})\, \varphi_{\sigma(\pi(\gamma))} = (\chi_\sigma, \xi)$$

oder $(\chi - \chi_\sigma, \xi) = 0$ gilt. Folglich ist $\chi - \chi_\sigma \in \mathcal{H}^\perp = \{0\}$ und somit $\chi = \chi_\sigma$. □

Mit diesem Satz drängen sich die dabei betrachteten Reihen als Entwicklungen nach Orthonormalbasen geradezu auf. Und in der Tat gilt der folgende

2.163 Satz: *Für jedes Orthonormalsystem $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$*[187] *sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ *ist vollständig,*

(ii) span $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ *ist dicht in $\mathcal{H}$,*

(iii) Für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ gilt die Parsevalsche Gleichung[188]

$$\|\psi\|^2 = \sum_{\gamma<\Gamma} |(\psi, \varphi_\gamma)|^2,$$

(iv) Für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ gilt die Fourier-Entwicklung[189]

$$\psi = \sum_{\gamma<\Gamma} (\psi, \varphi_\gamma)\, \varphi_\gamma.$$

[187] Dieser Satz gilt auch schon für Prä-Hilberträume, das heißt, die Voraussetzung der Vollständigkeit des betrachteten unitären Raums ist für den Beweis nicht notwendig. Da man es in der Quantenmechanik jedoch wesentlich mit echten Hilberträumen zu tun hat, formulieren wir den Satz für letztere.

[188] Benannt nach M.-A. Parseval [281].

[189] Fourier-Entwicklungen waren bereits im 18. Jahrhundert bekannt; der erste, der vermutete, dies könne für alle Funktionen möglich sein (allerdings ohne das zu beweisen), war Fourier [104], was den Namen des Gegenstands erklärt. Dirichlet konnte kurz darauf beweisen, daß das für eine spezielle Klasse von Funktionen tatsächlich zutrifft [71]. Erst knapp 150 Jahr später bewies Lennart Carleson, daß die Fourier-Entwicklung für alle $\mathscr{L}^2$-Funktionen fast überall konvergiert [50], und Richard A. Hunt dehnte dieses Resultat auf alle $\mathscr{L}^p$-Funktionen für $1 < p < \infty$ aus [165].

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii): Folgt aus Lemma 2.145.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Zu jedem $\psi \in \mathcal{H}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge $\mathrm{J}_0 \subset \Gamma$ und ein $\chi \in \operatorname{span}(\varphi_j)_{j \in \mathrm{J}_0}$, sodaß $\|\, \psi - \chi \,\| < \varepsilon$. Nun sei J eine beliebige endliche Menge mit $\mathrm{J}_0 \subset \mathrm{J} \subset \Gamma$, dann gilt $\chi \in \operatorname{span}(\varphi)_{j \in \mathrm{J}_0} \subset \operatorname{span}(\varphi_j)_{j \in \mathrm{J}}$. Nach (2.67) und (2.68) ist für alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$\|\psi\|^2 = \sum_{j \in \mathrm{J}} |(\varphi_j, \psi)|^2 + \left\| \psi - \sum_{j \in \mathrm{J}} (\psi, \varphi_j)\, \varphi_j \right\|^2; \tag{2.71}$$

somit folgt einerseits

$$\|\psi\|^2 - \sum_{j \in \mathrm{J}} |(\varphi_j, \psi)|^2 \leqq 0$$

und andererseits nach Satz 2.140 für alle $\zeta \in \operatorname{span}(\varphi_j)_{j \in \mathrm{J}}$

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 - \sum_{j \in \mathrm{J}} |(\varphi_j, \psi)|^2 &= \left\| \psi - \sum_{j \in \mathrm{J}} (\psi, \varphi_j)\, \varphi_j \right\|^2 \\ \leqq \left\| \psi - \sum_{j \in \mathrm{J}} (\psi, \varphi_j)\, \varphi_j \right\|^2 + \|\zeta\|^2 &= \left\| \psi - \left[\sum_{j \in \mathrm{J}} (\psi, \varphi_j)\, \varphi_j - \zeta \right] \right\|^2 . \end{aligned}$$

Zusammen ergibt das

$$0 \leqq \|\psi\|^2 - \sum_{j \in \mathrm{J}} |(\varphi_j, \psi)|^2 \leqq \|\, \psi - \chi \,\|^2 < \varepsilon^2, \tag{2.72}$$

also (iii).
(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Nach (2.71) und (iii) gilt für alle $\psi \in \mathcal{H}$ und alle endlichen Mengen $\mathrm{J} \subset \Gamma$

$$\left\| \psi - \sum_{j \in \mathrm{J}} (\psi, \varphi_j)\, \varphi_j \right\|^2 = \|\psi\|^2 - \sum_{j \in \mathrm{J}} |(\varphi_j, \psi)|^2 = 0.$$

Daraus folgt (iv).
(iv) $\Longrightarrow$ (i): Für $\varphi \neq 0$ gelte $\|\varphi\| = 1$ und $\varphi \perp \varphi_\gamma$ für alle $\gamma < \Gamma$. Dann folgt nach (iv)

$$\varphi = \sum_{\gamma < \Gamma} (\varphi, \varphi_\gamma)\, \varphi_\gamma = 0,$$

ein Widerspruch. □

Wir notieren außerdem ein

2.164 Corollar: *Ist $(\varphi_\gamma)_{\gamma < \Gamma}$ ein vollständiges Orthonormalsystem des Hilbertraums $\mathcal{H}$, dann gilt für alle $\psi, \chi \in \mathcal{H}$*

$$(\psi, \chi) = \sum_{\gamma < \Gamma} (\psi, \varphi_\gamma)\, (\varphi_\gamma, \chi).$$

Beweis: Direktes Nachrechnen liefert

$$(\psi, \chi) = \left(\sum_{\gamma < \Gamma} (\psi, \varphi_\gamma)\, \varphi_\gamma, \sum_{\lambda < \Gamma} (\chi, \varphi_\lambda)\, \varphi_\lambda \right) = \sum_{\gamma < \Gamma} \sum_{\lambda < \Gamma} (\psi, \varphi_\gamma)\, (\varphi_\lambda, \chi)\, (\varphi_\gamma, \varphi_\lambda)$$

$$= \sum_{\gamma < \Gamma} \sum_{\lambda < \Gamma} (\psi, \varphi_\gamma)\, (\varphi_\lambda, \chi)\, \delta_{\gamma \lambda} = \sum_{\gamma < \Gamma} (\psi, \varphi_\gamma)\, (\varphi_\gamma, \chi). \qquad \square$$

Die Bedeutung dieses Resultats liegt abgesehen davon, daß es die Verallgemeinerung des Standard-Skalaprodukts im $\mathbb{C}^n$ darstellt, in seiner Fähigkeit, den Weg zu einem weiteren Kriterium für die Vollständigkeit von Orthonormalsystemen zu weisen, und zwar dem für Anwendungen bei weitem wichtigsten. Dazu greifen wir auf die in Corollar 2.143 definierten Funktionale f_ψ zurück; außerdem sei $\mathbf{1}$ die identische Abbildung auf dem betrachteten Raum. Das angesprochene Kriterium ist die

2.165 Vollständigkeitsrelation: *Ein Orthonormalsystem $(\varphi_\gamma)_{\gamma < \Gamma}$ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist genau dann vollständig, wenn*

$$\sum_{\gamma < \Gamma} \varphi_\gamma\, f_{\varphi_\gamma} = \mathbf{1}.$$

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Ist $(\varphi_\gamma)_{\gamma < \Gamma}$ vollständig, dann gilt nach Satz 2.163 für alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$\psi = \sum_{\gamma < \Gamma} (\psi, \varphi_\gamma)\, \varphi_\gamma = \sum_{\gamma < \Gamma} \varphi_\gamma\, f_{\varphi_\gamma} \psi.$$

„$\Longleftarrow$“: Aus $\sum_{\gamma < \Gamma} \varphi_\gamma\, f_{\varphi_\gamma} = \mathbf{1}$ folgt für alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$\psi = \sum_{\gamma < \Gamma} \varphi_\gamma\, f_{\varphi_\gamma} \psi = \sum_{\gamma < \Gamma} (\psi, \varphi_\gamma)\, \varphi_\gamma. \qquad \square$$

Mit Blick auf Satz 2.165 spricht man beim Übergang von der linken zur rechten Seite in Corollar 2.164 auch vom *Einschieben eines Einsoperators*.

Satz 2.163 beantwortet auf einen Schlag die wichtigsten Fragen, die sich im Zusammenhang mit Basen von Hilberträumen stellen. Insbesondere besagt er, daß jeder Vektor $\psi \in \mathcal{H}$ durch die Vektoren aus einem vollständigen Orthonormalsystem $\mathsf{F} = (\varphi_\gamma)_{\gamma < \Gamma}$ von $\mathcal{H}$ als konvergente Summe der Form

$$\psi = \sum_{\gamma < \Gamma} c_\gamma\, \varphi_\gamma \tag{2.73}$$

dargestellt werden kann. Deshalb nennt man F auch *Orthonormalbasis* des Hilbertraums $\mathcal{H}$. Dabei sind all die in Abschnitt 2.2.3.8 mühsam zusammengetragenen Eigenschaften der für Banachräume allgemein höchst unterschiedlichen Basis-Typen für Hilberträume stets gleichzeitig erfüllt: Eine Orthonormalbasis eines Hilbertraums ist eine gegebenenfalls lange Schauder-Basis, eine starke Markushevich-Basis und dazu auch eine Auerbach-Basis. Das Ganze ist darüberhinaus konstruktiv, denn die Koeffizienten der Entwicklung (2.73) eines

Vektors ψ können stets gemäß $c_\gamma = (\psi, \varphi_\gamma)$ berechnet werden. Der wichtigste Unterschied betrifft jedoch die Existenzfrage. Während es bekanntlich keineswegs für jeden Banachraum eine Schauder-Basis gibt, gilt der folgende fundamentale

2.166 Satz: *Jeder Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.*[190]

Beweis: Sei $\mathfrak{E}$ die Menge aller Orthonormalsysteme des Hilbertraumes $\mathcal{H}$ über dem Körper $\mathbb{K}$, eine Menge, die durch die Relation $\subset$ teilgeordnet wird. Jede linear geordnete Teilmenge $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{E}$ besitzt mit der Vereinigung über alle Elemente von $\mathfrak{E}$ eine obere Schranke in $\mathfrak{E}$, und da die $\mathfrak{L}$'s eine aufsteigende Familie von Inklusionen darstellen, ist diese Vereinigung selbst auch ein Orthonormalsystem. Nach dem Zornschen Lemma gibt es dann in $\mathfrak{E}$ ein maximales Element, also eine maximales Orthonormalsystem $\mathrm{B} \subset \mathcal{H}$. Nimmt man nun an, es gäbe ein $\psi \neq 0$ mit $(\psi, \varphi_\gamma) = 0$ für alle $\varphi_\alpha \in \mathrm{B}$, dann wäre

$$\mathrm{span}(\mathrm{B})^\perp \neq \{0\}$$

und damit

$$\mathrm{span}(\mathrm{B}) \neq \mathcal{H}.$$

Dann wäre aber $\mathrm{B} \cup \{\psi\}$ ein echt größeres Orthonormalsystem als B – ein Widerspruch. Damit ist B eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. □

Als Folgerung ergibt sich eine weitere Eigenschaft, die Schauder-Basen von Banachräumen nicht aufweisen. Für Orthonormalbasen liefert Satz 2.166 unmittelbar ein zu Satz 2.10 analoges Resultat.

2.167 Corollar: *Jedes Orthonormalsystem in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ läßt sich zu einer Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ erweitern.*

Damit erweisen sich Orthonormalbasen unendlichdimensionaler Hilberträume in sehr weitgehender Weise als Verallgemeinerungen ihrer endlichdimensionaler Verwandten aus der elementaren linearen Algebra. Die einzige Einschränkung wurde zu Beginn dieses Abschnitts bereits angedeutet. Im Gegensatz zum endlichdimensionalen Fall sind bei unendlichdimensionalen Hilberträumen Orthonormalbasen *keine* Hamel-Basen. Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und F ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem von $\mathcal{H}$, so ist die lineare Hülle von F zwar dicht in $\mathcal{H}$, aber nicht mit $\mathcal{H}$ identisch. Der Grund dafür ist die ausschließliche Verwendung endlicher Linearkombinationen in der linearen Hülle. Erst wenn wir unendliche Linearkombinationen verwenden, erhalten wir den gesamten Hilbertraum. Hamel-Basen von unendlichdimensionalen Hilberträumen sind sehr viel größer als deren Orthonormalbasen. Das läßt sich präzisieren, denn die Mächtigkeit vollständiger Orthonormalsysteme ist eine Invariante des betrachteten Raumes, wie das nächste Resultat zeigt.

2.168 Satz: *Alle Orthonormalbasen eines Hilbertraums haben dieselbe Mächtigkeit.*

[190]Dieses Resultat stammt von Löwig [230].

Beweis: Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und A und B zwei Orthonormalbasen in $\mathcal{H}$ mit $|A| = \kappa$ und $|B| = \lambda$. Zu jedem $\psi \in A$ gibt es ein $\varphi \in B$ mit $(\psi, \varphi) \neq 0$; andernfalls könnte man das eine System mit dem entsprechenden Element des anderen ergänzen und umgekehrt, und die beiden wären nicht vollständig. Nun konstruieren wir eine Menge $\mathfrak{A}$ von Teilmengen von A nach folgender Vorschrift: Zu einem beliebigen $\psi \in A$ wählen wir ein $\varphi \in B$ mit $(\psi, \varphi) \neq 0$, ergänzen ψ sodann durch alle weiteren Elemente von A, die nicht orthogonal zu φ sind und nennen die so entstehende, höchstens abzählbare Menge C'. Das ist eine echte Teilmenge von A, denn A ist überabzählbar; außerdem gilt $(\chi, \varphi) = 0$ für alle $\chi \in A \setminus C'$. Nun wählen wir zu einem beliebigen $\psi' \in A \setminus C'$ ein $\varphi' \in B$ mit $(\psi', \varphi') \neq 0$, wiederholen obige Prozedur und erhalten so eine zweite höchstens abzählbare Teilmenge C" von A. Dieser Vorgang wird in transfiniter Weise unbegrenzt wiederholt, und die dadurch entstehende Teilmenge von $\mathfrak{P}(A)$ sei die Menge $\mathfrak{A}$. Um die Mächtigkeit π von $\mathfrak{A}$ zu bestimmen, beachten wir, daß

(i) jedes $\psi \in A$ zu genau einem $C \in \mathfrak{A}$ gehört,

(ii) jedes $C \in \mathfrak{A}$ genau einem $\varphi \in B$ zugeordnet wird,

(iii) $C' \cap C'' = \emptyset$ gilt für alle $\varphi', \varphi'' \in B$ mit $\varphi' \neq \varphi''$, und

(iv) $1 \leqq |C| \leqq \aleph_0$ gilt für alle $C \in \mathfrak{A}$.

Aus der ersten dieser Eigenschaften folgt $\kappa = \pi$, falls $|C| = 1$, und $\kappa = \aleph_0\, \pi = \pi$, falls $|C| = \aleph_0$, und damit gilt aufgrund der vierten Eigenschaft in jedem Fall $\kappa = \pi$. Aus der zweiten und dritten Eigenschaft dagegen ergibt sich $\pi \leqq \lambda$ und damit auch $\kappa \leqq \lambda$. Jetzt wiederholen wir das Ganze mit vertauschten Mengen A und B, erhalten völlig analog $\lambda \leqq \kappa$ und damit $\kappa = \lambda$. □

Ist F eine Orthonormalbasis eines Hilbertraums $\mathcal{H}$, dann nennt man $|F|$ *Hilbertraum-Dimension* von $\mathcal{H}$. Da Orthonormalbasen Schauderbasen sind, ist die Hilbertraum-Dimension stets gleich der topologischen Dimension. Hat ein unendlichdimensionaler Hilbertraum $\mathcal{H}$ die algebraische Dimension λ und die Hilbertraum-Dimension σ, dann gilt nach Satz 2.78 folglich $\sigma^{\aleph_0} = \lambda = |\mathcal{H}|$. Gleichzeitig folgt daraus, daß eine Orthonormalbasis eines unendlichdimensionalen Hilbertraums niemals gleichzeitig eine Hamel-Basis ist.

Für Hilberträume mit gleicher Hilbertraum-Dimension gilt tatsächlich noch mehr; man kann sie in gewissem Sinn paarweise miteinander identifizieren. Das ist der Inhalt von folgendem

2.169 Satz: *Zwei Hilberträume haben genau dann dieselbe Hilbertraum-Dimension, wenn es einen isometrischen Isomorphismus zwischen ihnen gibt.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ seien zwei Hilberträume mit Orthonormalbasen F_1 und F_2. Wegen $|F_1| = |F_2|$ gibt es eine Bijektion $\iota : F_1 \longrightarrow F_2$ und damit eine bijektive lineare Abbildung $t : \operatorname{span} F_1 \longrightarrow \operatorname{span} F_2$, die offensichtlich auch isometrisch ist. Wegen $\overline{\operatorname{span} F_1} = \mathcal{H}_1$ und $\overline{\operatorname{span} F_2} = \mathcal{H}_2$ läßt sich t stetig zu einem isometrischen Isomorphismus $\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ erweitern.

„$\Longleftarrow$“: Ist $\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ ein isometrischer Isomorphismus, dann ist $\iota := \mathcal{T} \restriction \mathrm{F}_1$ eine Bijektion und $\operatorname{ran} \iota$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_2$. □

Wir werden später sehen, daß man ausgehend von der Hilbertraum-Dimension noch sehr viel weitergehende Isomorphie- und Isometrieaussagen treffen kann.

Der Schluß des vorliegenden Abschnitts beschäftigt sich mit einem Sonderfall, einem besonders wichtigen allerdings, nämlich demjenigen der separablen Hilberträume[191]. Die besonders übersichtliche Struktur solcher Räume überträgt sich auf deren Orthonormalbasen, wie das nächste Resultat zeigt.

2.170 Satz: *Für jeden unendlichdimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathcal{H}$ ist separabel.

(ii) $\mathcal{H}$ besitzt eine abzählbare Orthonormalbasis.

(iii) Alle Orthonormalsysteme in $\mathcal{H}$ sind abzählbar

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii): A sei eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathcal{H}$. Durch sukzessives Hinauswerfen aller Vektoren aus A, die Linearkombinationen der anderen Vektoren aus A sind, bis keine solchen mehr übrig sind, erhält man eine linear unabhängige Folge in $\mathcal{H}$, deren lineare Hülle dicht in $\mathcal{H}$ ist. Mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren ergibt sich eine bereits vollständige orthonormierte Folge B in $\mathcal{H}$. Denn für jeden Vektor $\psi \in \mathcal{H}$, der zu jedem Element aus A und damit auch zu jedem aus B orthogonal ist und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es aufgrund der Separabilität von $\mathcal{H}$ einen Vektor $\varphi \in \mathrm{A}$, so daß $\|\, \psi - \varphi \,\| < \varepsilon$ ist. Das kann dann jedoch nur der Nullvektor sein, denn für seine Norm folgt wegen $(\varphi, \psi) = 0$

$$\|\psi\|^2 = (\psi, \psi) = (\psi, \psi) - (\varphi, \psi) = (\, \psi - \varphi, \psi \,) \leqq \|\, \psi - \varphi \,\| \; \|\psi\| < \varepsilon \, \|\psi\|,$$

damit aber auch $\|\psi\| < \varepsilon$, und folglich muß $\psi = 0$ sein. B ist also ein vollständiges Orthonormalsystem und damit eine abzählbare Orthonormalbasis.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Nach Voraussetzung besitzt $\mathcal{H}$ eine abzählbare Orthonormalbasis $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Zusätzlich sei $(\chi_\gamma)_{\gamma < \Gamma}$ ein beliebiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Nach Ungleichung 2.161 gilt dann für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\gamma < \Gamma} |(\varphi_n, \chi_\gamma)|^2 \leqq \|\varphi_n\|^2,$$

das heißt, für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Familie $(|(\varphi_n, \chi_\gamma)|^2)_{\gamma < \Gamma}$ in $\mathbb{R}$ summierbar. Nach Lemma 2.72 ist daher die Menge $\mathrm{J}_n := \{\, \lambda < \Gamma \mid (\varphi_n, \chi_\lambda) \neq 0 \,\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit auch die Menge $\mathrm{J} := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{J}_n$ abzählbar; dabei gilt $|\mathrm{J}| < |\Gamma|$. Für alle $\gamma < \Gamma$ mit $\gamma \neq \mathrm{J}$ ist dann

$$\chi_\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} (\chi_\gamma, \varphi_n)\, \varphi_n = 0.$$

[191] Von Neumanns ursprüngliche Hilbertraum-Definition enthielt die Separabilität als Eigenschaft, was jedoch unnötig ist, wie Löwig [230], Rellich [312] und Riesz [302] alsbald feststellten.

Andererseits ist nach Voraussetzung $\|\chi_\gamma\| = 1$ für alle $\gamma < \Gamma$. Daraus folgt $|\Gamma| = \aleph_0$.
(iii) $\Longrightarrow$ (i): Nun sei $\mathsf{B} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ und damit nach Voraussetzung abzählbar. Wir notieren zunächst, daß jedes $\psi \in \mathcal{H}$ und jedes $\varepsilon > 0$ nach Satz 2.163 in der Form

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi, \varphi_n)\, \varphi_n$$

darstellbar ist und es damit ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$\left\| \psi - \sum_{j=0}^{n} (\psi, \varphi_n)\, \varphi_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Nun betrachten wir die Menge A aller endlicher Linearkombinationen in $\mathcal{H}$ mit Koeffizienten aus $\mathsf{Q} = \{\, \alpha + i\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \,\}$ betrachtet, die natürlich abzählbar ist. Sie ist aber auch dicht in $\mathcal{H}$. Denn mit geeigneten Koeffizienten $a_{j,n} \in \mathsf{Q}$ gilt auch

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} [\, (\psi, \varphi_j) - a_{j,n} \,]\, \varphi_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

weil Q in $\mathbb{C}$ dicht liegt. Folglich gibt es für jeden Vektor $\psi \in \mathcal{H}$ einen Vektor

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_{j,n}\, \varphi_j$$

in A mit

$$\| \psi - \varphi \| < \varepsilon,$$

also ist A dicht in $\mathcal{H}$, und $\mathcal{H}$ ist separabel. □

Aus Satz 2.170 folgt unmittelbar, daß jeder separable unendlichdimensionale Hilbertraum die Hilbertraum-Dimension $\aleph_0$ besitzt; Corollar 2.65 und Satz 2.78 liefern dann übereinstimmend für die algebraische Dimension separabler unendlichdimensionaler Hilberträume den Wert $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Aus Satz 2.169 ergibt sich damit, daß alle separablen unendlichdimensionalen Hilberträume paarweise isometrisch isomorph sind[192]. Das werden wir gleich präzisieren.

2.3.4 Einige Beispiele

In diesem Abschnitt greifen wir uns nur vemeintlich wahllos ein paar Beispiele für Hilberträume heraus; wie sich zeigen wird, erwischen wir damit gleichzeitig die Prototypen für alle Hilberträume, die es überhaupt gibt. Das sind nämlich gar nicht so viele, verglichen mit der unübersichtlichen Reichhaltigkeit unterschiedlicher Banachräume, von denen wir oben nur ganz wenige kennengelernt haben.

[192] Einen direkten Beweis hierfür findet man in [189].

Vorab sei kurz daran erinnert, daß für $n \in \mathbb{N}$ die Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j \quad \text{beziehungsweise} \quad (x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, \overline{y}_j$$

Hilberträume sind; davon wurde in Abschnitt 2.3.2 bereits Gebrauch gemacht. Viel interessanter sind natürlich unendlichdimensionale Hilberträume, und einige ihrer prominentesten Vertreter schauen wir uns nun genauer an.

2.3.4.1 $\mathscr{L}^2$-Räume

Zunächst betrachten wir die in Abschnitt 2.2.3.9 ausführlich vorgestellten $\mathscr{L}^p$-Räume für den speziellen Fall $p = 2$, der sich wieder als sehr eigenwillig erweisen wird[193]. Mit den dortigen Bezeichnungen gilt nämlich

2.171 Satz: *$\mathscr{L}^2(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ ist ein Hilbertraum.*

Beweis: Nach Satz 2.82 ist $\mathscr{L}^2(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ vollständig. Wir definieren auf $\mathscr{L}^2(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ ein Skalarprodukt durch

$$(f, g) := \int_{\mathsf{M}} f\, \overline{g}\, d\mu \tag{2.74}$$

für $f, g \in \mathscr{L}^2(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ und überzeugen uns direkt davon, daß es sich hierbei auch tatsächlich um ein solches handelt. Zunächst gilt für alle $f \in \mathscr{L}^2(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ auch $\overline{f} \in \mathscr{L}^2(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$, außerdem ist nach Ungleichung 2.80 für alle $f, g \in \mathscr{L}^2(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ stets $f\,\overline{g} \in \mathscr{L}^1(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$, und damit ist (2.74) wohldefiniert. Die Skalarprodukteigenschaften lassen sich unmittelbar nachprüfen. Für alle $f, g, h \in \mathscr{L}^2(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad (\alpha f + \beta g, h) &= \int_{\mathsf{M}} (\alpha f + \beta g)\, \overline{h}\, d\mu \\
&= \alpha \int_{\mathsf{M}} f\, \overline{h}\, d\mu + \beta \int_{\mathsf{M}} g\, \overline{h}\, d\mu = \alpha\, (f, h) + \beta\, (g, h);
\end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad \overline{(f, g)} = \overline{\int_{\mathsf{M}} f\, \overline{g}\, d\mu} = \int_{\mathsf{M}} \overline{f}\, \overline{\overline{g}}\, d\mu = \int_{\mathsf{M}} g\, \overline{f}\, d\mu = (g, f);$$

$$\text{(iii)} \quad (f, f) = \int_{\mathsf{M}} f\, \overline{f}\, d\mu = \int_{\mathsf{M}} |f|^2\, d\mu > 0 \quad \text{für } f \neq 0.$$

Schließlich erhält man die $\|\ \|_2$-Norm aus dem Skalarprodukt (2.74) gemäß

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_{\mathsf{M}} |f|^2\, d\mu \right)^{1/2}. \qquad \square$$

[193] Dabei ist die Verwendung von Lebesgueschen Integralen anstelle von Riemannschen ganz wesentlich, denn der Raum $\mathscr{L}^2$ der Lebesgue-quadratintegrablen Funktionen ist, wie wir gesehen haben, vollständig, der Raum $\mathscr{R}^2$ der Riemann-quadratintegrablen Funktionen dagegen nicht [160].

Nach Satz 2.136 läßt sich jeder Hilbertraum mit seinem topologischen Dualraum identifizieren. Für $\mathscr{L}^2$ folgt dies auch schon aus Satz 2.92, was einmal mehr die Sonderrolle von $p = 2$ bei $\mathscr{L}^p$-Räumen unterstreicht. Denn aus $1/p + 1/q = 1$ und $p = 2$ folgt $q = 2$ und damit $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^q = \mathscr{L}^2$.

Die Elemente von $\mathscr{L}^2$-Räumen nennt man *quadratintegrable Funktionen*. Diese Räume sind das wichtigste Beispiel überhaupt für Zustrandsräume in der Quantenmechanik; wir werden in Band 2 ausgiebig mit ihnen zu tun haben. Dabei werden wir insbesondere auch einige Beispiele für Orthonormalbasen in Räumen quadratintegrabler Funktionen kennenlernen.

2.3.4.2 ℓ^2-Räume

Es liegt nun nahe, parallel zu den Abschnitten 2.2.3.9 und 2.2.3.10 vorzugehen; die Annahme, daß die ℓ^2-Räume spezielle $\mathscr{L}^2$-Räume sind, bleibt aus der dortigen Perspektive natürlich richtig, und so folgt aus Satz 2.171, daß $\ell^2(\mathrm{M})$ für beliebige Mengen ein Hilbertraum ist. Corollar 2.108 liefert dann für jede abzählbare Menge A mit $\ell^2(\mathrm{A})$ ein Beispiel für einen separablen und für jede überabzählbare Menge M mit $\ell^2(\mathrm{M})$ ein Beispiel für einen überseparablen Hilbertraum.

Aus einer anderen Blickrichtung dreht sich die Sache jedoch gewissermaßen gerade um, denn wie sich gleich zeigen wird, sind die Räume $\ell^2(\mathrm{M})$ Prototypen für alle Hilberträume, die es überhaupt gibt[194]. Es gilt nämlich der folgende fundamentale

2.172 Satz: *Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertaum,* F *eine beliebige Orthononormalbasis in $\mathcal{H}$ und* M *eine beliebige Menge mit $|\mathrm{M}| = |\mathrm{F}|$, dann sind $\mathcal{H}$ und $\ell^2(\mathrm{M})$ isometrisch isomorph.*

Beweis: Γ sei eine Ordinalzahl mit $|\Gamma| = |\mathrm{F}| = |\mathrm{M}|$ und $(\varphi_\gamma)_{\gamma \leqq \Gamma}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Die Menge M ist dann darstellbar als $\mathrm{M} = \{\, a_\gamma \mid \gamma \leqq \Gamma \,\}$. Wir definieren eine Abbildung $\mathcal{T}$ auf $\mathcal{H}$ durch

$$\mathcal{T}\,\psi = f_\psi(a_\gamma) = (\psi, \varphi_\gamma)$$

für alle $\psi \in \mathcal{H}$ und alle $a_\gamma \in \mathrm{M}$. Nach Satz 2.163 gibt es für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$\psi = \sum_{\gamma \leqq \Gamma} (\psi, \varphi_\gamma)\, \varphi_\gamma \tag{2.75}$$

mit

$$\|\psi\|^2 = \sum_{\gamma \leqq \Gamma} |(\psi, \varphi_\gamma)|^2, \tag{2.76}$$

wobei jeweils nur höchstens abzählbar viele der Summanden nicht verschwinden. (2.76) garantiert $\operatorname{ran}\mathcal{T} \subseteqq \ell^2(\mathrm{M})$ sowie $\|\psi\| = \|\,\mathcal{T}\,\psi\,\|$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$, und dank (2.75) ist $\mathcal{T}$ injektiv. Ist nun $f \in \ell^2(\mathrm{M})$ beliebig, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{\gamma \leqq \Gamma} |f(a_\gamma)|^2$. Folglich ist $\{|f(a_\gamma)|^2\}_{\gamma \leqq \Gamma}$ und damit auch $\{\|\, f(a_\gamma)\, \varphi_\gamma \,\|^2\}_{\gamma \leqq \Gamma}$ summierbar. Nach Lemma 2.159 ist

[194] Heuser spricht in diesem Zusammenhang sehr treffend von den *kanonischen Hilbertraummodellen* [148].

dann auch $\{ f(a_\gamma)\,\varphi_\gamma \}_{\gamma \leqq \Gamma}$ summierbar, es existiert demnach ein $\psi \in \mathcal{H}$ mit

$$\psi = \sum_{\gamma \leqq \Gamma} f(a_\gamma)\,\varphi_\gamma,$$

und für dieses gilt $\mathcal{T}\psi = f$. Damit ist $\mathcal{T}$ surjektiv, insgesamt also ein isometrischer Isomorphismus. □

Jeder Hilbertraum kann folglich mit einem Raum $\ell^2(\mathsf{M})$ mit irgendeiner passenden Menge M identifiziert werden. Beispielsweise gilt $\mathscr{L}^2(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E}) \approxeq \ell^2(\Gamma)$ mit $|\Gamma| = |\mathsf{F}|$ für eine beliebige Orthonormal-Basis F von $\mathscr{L}^2(\mathsf{M}, \mu, \mathcal{E})$. Außerdem erhalten wir für die algebraische Dimension von $\ell^2(\mathsf{M})$ den Wert $|\ell^2(\mathsf{M})|$ und für die topologische Dimension den Wert $|\mathsf{M}|$.

Einen ganz besonders wichtigen Spezialfall liefert $\ell^2(\mathsf{A})$ mit abzählbarer Menge A, denn wie man sofort sieht, handelt es sich hierbei um separable Hilberträume. Setzt man $\mathsf{A} = \mathbb{N}$, erhält man den Folgenraum ℓ^2 und damit den

2.173 Satz von Riesz-Fischer:[195] *Jeder unendlichdimensionale separable Hilbertraum ist isometrisch isomorph zu* ℓ^2.

Wählt man also etwa zu M ein σ-finites Maß μ und eine endlich erzeugte σ-Algebra, dann ist nach Satz 2.89 der Raum $\mathscr{L}^2(\mathsf{M}, \mu)$ separabel, also isometrisch isomorph zu ℓ^2. Daraus folgt, daß insbesondere auch solche Räume wie $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n, \lambda)$ und $\mathscr{L}^2(\Omega, \lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß und Ω irgendeine beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, eigentlich nur besondere Erscheinungsformen von ℓ^2 sind[196]. Aus mathematischer Sicht ist das zwar nicht mehr als ein einfaches Beispiel für die Sätze 2.172 und 2.173, aus quantenmechanischer Sicht erlangt es jedoch große Bedeutung. Unter anderem findet man hierin die mathematische Begründung für die Äquivalenz der Matrizenmechanik und der Wellenmechanik.

2.3.4.3 Fastperiodische Funktionen

Wir beschäftigen uns noch kurz mit einem weiteren Beispiel eines überseparablen Hilbertraumes, bei dem diese Eigenschaft direkt erkennbar wird[197]. Dazu betrachten wir zunächst die Menge der Funktionen der Form $f(t) = e^{i\lambda t}$ mit $-\infty < t < \infty$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ als beliebigem Parameter. Nun bilden wir die linearer Hülle $\mathcal{P}$ dieser Menge, also die Gesamtheit aller Polynome der Form

$$p(t) = \sum_k A_k\, e^{i\lambda_k t}.$$

$\mathcal{P}$ ist natürlich bereits ein Vektorraum. Als nächstes ergänzen wir diesen, indem wir die Grenzwerte aller Folgen von Funktionen aus $\mathcal{P}$ hinzunehmen, die auf der ganzen reellen Achse gleichmäßig konvergieren. Dadurch erhalten wir eine Menge $\mathcal{F}$, die Menge der *fastperiodischen Funktionen*. Eine Funktion f heißt fastperiodisch, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein l_ε gibt,

[195] Siehe Anmerkung 110 auf S. 120.
[196] Vergleiche auch hierzu Anmerkung 110 auf S. 120.
[197] Ausführlich dazu [2].

so daß es in jedem Intervall der Länge l_ε mindestens eine Zahl τ gibt, für die

$$|\, f(t+\tau) - f(t)\,| < \varepsilon \quad \text{für} \quad -\infty < t < \infty$$

gilt.

Auf dem linearen Raum $\mathcal{F}$ kann man ein Skalarprodukt und damit auch eine Metrik definieren, und zwar wie folgt: Für zwei Polynome $f(t) = \sum_{q=1}^{m} A_q\, e^{i\lambda_p t}$ und $g(t) = \sum_{r=1}^{n} B_r\, e^{i\mu_r t}$ sei das Skalarprodukt erklärt durch die Formel

$$\begin{aligned}
(f,g) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \sum_{q=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} A_q\,\overline{B_r}\, \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{it(\lambda_q-\mu_r)}\,dt = \sum_{q=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} \delta_{\lambda_q\mu_r}\, A_r\,\overline{B_s},
\end{aligned}$$

mit einem kontinuierlichen Kronecker-Symbol[198]

$$\delta_{\lambda_q\mu_r} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \lambda_r = \mu_s, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieses Skalarprodukt läßt sich dank der gleichmäßigen Konvergenz stetig auf ganz $\mathcal{F}$ fortsetzen. Die Metrik ist dann wie üblich definiert durch

$$\|f\|^2 = (f,f).$$

Wenn wir nun diesen Raum $\mathcal{F}$ in der durch das Skalarprodukt erzeugten Metrik durch Hinzunahme aller Grenzwerte von Cauchy-Folgen vervollständigen, erhalten wir den Hilbertraum $\mathscr{F}^2$ der fastperiodischen Funktionen. In $\mathscr{F}^2$ bildet die Menge

$$\mathrm{B} = \{\, e_\lambda(t) = e^{i\lambda t} \mid -\infty < \lambda < \infty \,\}$$

eine Orthonormalbasis. Denn erstens gilt

$$(e_\lambda, e_\mu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{it(\lambda-\mu)}\,dt = \delta_{\lambda\mu},$$

das heißt, die e_λ sind orthonormiert, und zweitens ist mit den Bezeichnungen von Corollar 2.143

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{R}} e_\lambda\, f_{e_\lambda} e_\mu = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} (e_\lambda, e_\mu)\, e_\lambda = e_\mu,$$

also

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{R}} e_\lambda\, f_{e_\lambda} = \mathbf{1},$$

und nach Satz 2.165 ist B vollständig. Natürlich ist $|\mathrm{B}| = \mathfrak{c}$, der Raum $\mathscr{F}^2$ besitzt somit eine überabzählbare Orthonormalbasis und ist folglich nicht separabel.

[198] Das ist *keine* Delta-Funktion.

Kapitel 3

Operatoren auf Hilberträumen

In Abschnitt 2.2.3.4 haben wir uns bereits mit linearen Abbildungen auf Banachräumen beschäftigt. Da einerseits im speziellen Fall von Hilberträumen wesentliche zusätzliche Aspekte in den Vordergrund treten und andererseits in der Quantenmechanik insbesondere lineare Abbildungen auf Hilberträumen von zentraler Bedeutung sind, lohnt es sich, das Thema nicht nur erneut aufzugreifen, sondern ihm in diesem Zusammenhang gleich ein ganzes Kapitel zu widmen.

3.1 Einige Grundbegriffe

Wir beginnen mit etwas Terminologie. $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ seien Hilberträume über $\mathbb{C}$. Ein Operator $\widehat{A}$ ist eine Abbildung von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{G}$. Wie allgemein üblich bezeichnen wir auch hier mit $\operatorname{dom}\widehat{A} \subseteqq \mathcal{H}$ die *Definitionsmenge* von $\widehat{A}$ und mit $\operatorname{ran}\widehat{A} = \{\varphi \in \mathcal{G} \mid \exists\, \psi \in \mathcal{H} \;\; \varphi = \widehat{A}\psi\} \subseteqq \mathcal{G}$ dessen *Wertemenge*. Die Menge $\ker\widehat{A} \subseteqq \mathcal{H}$ aller Elemente von $\mathcal{H}$, die von $\hat{A}$ auf 0 abgebildet werden, bezeichnet man als *Kern* des Operators $\hat{A}$. Ist für einen Operator $\widehat{A}$ auf $\mathcal{H}$ dessen Definitionsmenge eine dichte Teilmenge von $\mathcal{H}$, sagt man auch, $\widehat{A}$ sei in $\mathcal{H}$ *dicht definiert*.

Das war jetzt nichts neues; die zusätzliche Struktur, die Hilberträume bieten, erlaubt jedoch die Definition weiterer Begriffe. Dabei geht es in den meisten hier interessierenden Fällen um Endomorphismen auf Hilberträumem, das heißt, es ist $\mathcal{H} = \mathcal{G}$. Daher betrachten wir von nun an generell, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, Operatoren von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$.

Den Ausdruck $(\varphi, \widehat{A}\psi) \in \mathbb{C}$ bezeichnet man als *Matrixelement* von $\widehat{A}$ zwischen φ und ψ. Einen Operator $\widehat{A}$ nennt man *positiv definit*, wenn

$$(\widehat{A}\psi, \psi) \geqq 0 \quad \text{für alle } \; \psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$$

und *negativ definit*, wenn

$$(\widehat{A}\psi, \psi) \leqq 0 \quad \text{für alle } \; \psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$$

gilt; ansonsten heißt $\widehat{A}$ *indefinit*.

Wir definieren zusätzlich ein Operatorprodukt durch Hintereinanderausführen:

$$\widehat{A}\,\widehat{B}\,\psi := \widehat{A}(\widehat{B}\,\psi) \quad \text{für } \psi \in \operatorname{dom}\widehat{A} \cap \operatorname{dom}\widehat{B}.$$

Dieses Operatorprodukt ist *nicht kommutativ*, das heißt, im allgemeinen gilt $\widehat{A}\,\widehat{B}\,\psi \neq \widehat{B}\,\widehat{A}\,\psi$. Entsprechend definiert man den sogenannten *Kommutator* von zwei Operatoren durch

$$[\widehat{A}, \widehat{B}] := \widehat{A}\,\widehat{B} - \widehat{B}\,\widehat{A}$$

als neuen Operator auf

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}[\widehat{A}, \widehat{B}] &= \operatorname{dom}(\widehat{A}\,\widehat{B}) \cap \operatorname{dom}(\widehat{B}\,\widehat{A}) \\ &= \{\,\psi \in \operatorname{dom}\widehat{B} \mid \widehat{B}\,\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}\,\} \cap \{\,\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A} \mid \widehat{A}\,\psi \in \operatorname{dom}\widehat{B}\,\},\end{aligned}$$

und dieser ist im allgemeinen von Null verschieden[1]. Gilt jedoch $[\widehat{A}, \widehat{B}] = 0$, so heißen die beiden Operatoren *vertauschbar*. Dabei ist jedoch Vorsicht angebracht, denn diese Definition ist nur für beschränkte Operatoren problemlos anwendbar. Gilt für zwei unbeschränkte Operatoren $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ etwa $\operatorname{dom}\widehat{A} \cap \operatorname{ran}\widehat{B} = \{0\}$, dann ist $\widehat{A}\,\widehat{B}$ nur für den Nullvektor definiert, und entsprechendes gilt im Fall von $\operatorname{dom}\widehat{B} \cap \operatorname{ran}\widehat{A} = \{0\}$ für $\widehat{B}\,\widehat{A}$. Generell ist für zwei vertauschbare Operatoren $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ nur dann $\widehat{A}\,\widehat{B} = \widehat{B}\,\widehat{A}$, wenn $\operatorname{dom}\widehat{A} = \operatorname{dom}\widehat{B}$ gilt, also insbesondere auch für $\operatorname{dom}\widehat{A} = \operatorname{dom}\widehat{B} = \mathcal{H}$; im allgemeinen folgt aus der Vertauschbarkeit zweier Operatoren $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ nur $\widehat{A}\,\widehat{B} \subseteqq \widehat{B}\,\widehat{A}$. Wir werden in Abschnitt 4.4.3 und in Band 2 leistungsfähigere Vertauschbarkeitsbegriffe einführen.

Gibt es zu einem Operator $\widehat{A}$ einen Operator $\widehat{B}$ mit

$$\widehat{A}\,\widehat{B} = \widehat{B}\,\widehat{A} = \mathbf{1},$$

dann bezeichnet man $\widehat{B}$ als den zu $\widehat{A}$ inversen Operator und schreibt dafür $\widehat{B} = \widehat{A}^{-1}$. Dabei gibt es keineswegs zu jedem Operator einen inversen; existiert der inverse Operator, dann folgt aus $\widehat{A}\,\psi = \varphi$ automatisch $\widehat{A}^{-1}\varphi = \psi$, und die Definitionsmenge von $\widehat{A}$ ist die Wertemenge von $\widehat{A}^{-1}$ und umgekehrt. Sind die Operatoren $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ jeweils invertierbar, so gilt auf $\operatorname{dom}(\widehat{A}\,\widehat{B})^{-1}$

$$(\widehat{A}\,\widehat{B}\,)^{-1} = \widehat{B}^{-1}\,\widehat{A}^{-1}.$$

Natürlich lassen sich Operatoren auch in komplizierterer Weise kombinieren; man kann ganz allgemein *Funktionen* auf der Menge der Operatoren definieren. Dies geschieht im einfachsten Fall mit Hilfe von Potenzreihen. Dazu notieren wir zunächst, daß eine Folge $(\widehat{A}_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ von Operatoren genau dann zu einer absolut konvergenten Reihe $\widehat{A} = \sum\limits_{\gamma<\Gamma} \widehat{A}_\gamma$ zusammengebaut werden kann, wenn es eine Folge $(\alpha_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ positiver reeller Zahlen gibt mit $\|\widehat{A}_\gamma\| \leqq \alpha_\gamma$

[1] Der Banachraum $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ bildet mit dem Operatorprodukt eine *Banachalgebra* und mit der $*$-Abildung, die jedem Operator dessen adjungierten Operator zuordnet, eine *C^*-Algebra*.

für alle $\gamma < \Gamma$, die ihrerseits eine konvergente Reihe $\sum_{\gamma<\Gamma} \alpha_\gamma$ bilden; in diesem Fall gilt $\| \widehat{A} \| \leqq \sum_{\gamma<\Gamma} \alpha_\gamma$. Ist folglich

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, z^n$$

eine Potenzreihenentwicklung der komplexwertigen Funktion F, so kann man daraus eine operatorwertige Funktion konstruieren gemäß

$$F(\widehat{A}\,) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, \widehat{A}^n. \tag{3.1}$$

Das Standardbeispiel hierzu liefert die Exponentialfunktion, mit der man zu jedem beschränkten Operator $\widehat{A}$ einen Operator

$$e^{\widehat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \widehat{A}^n = \mathbf{1} + \widehat{A} + \frac{1}{2!} \widehat{A}^{\,2} + \frac{1}{3!} \widehat{A}^{\,3} + \cdots . \tag{3.2}$$

definieren kann. Für Potenzreihen von Operatoren gilt stets $[\widehat{A}, F(\widehat{A}\,)] = 0$. Unproblematisch verläuft die Definition solcher operatorwertiger Funktionen natürlich nur bei analytischen Funktionen (die Potenzreihe für F sollte schon konvergieren) und beschränkten Operatoren. Bei nicht-analytischen Funktionen und unbeschränkten Operatoren kann man jedoch auch einen anderen Weg wählen. Wir kommen in Kapitel 4 darauf zurück.

3.2 Lineare Operatoren

Wie im vorigen Kapitel betrachten wir auch hier in erster Linie *lineare Operatoren*, da sie sowohl aus mathematischer Sicht als auch aus derjenigen der Quantenmechanik von besonderer Bedeutung sind. Es sei daran erinnert, daß ein Operator $\widehat{A}$ linear heißt, wenn für alle $\psi_1, \psi_2 \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ und alle $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}$

$$\widehat{A}\,(\,c_1\,\psi_1 + c_2\,\psi_2\,) = c_1\,\widehat{A}\,\psi_1 + c_2\,\widehat{A}\,\psi_2$$

gilt. Man kann sich lineare Operatoren auf Hilberträumen anschaulich als eine Verallgemeinerung von Drehstreckungen vorstellen.

Auf der Menge der linearen Operatoren über einem Vektorraum definieren wir wieder die *Operatornorm* durch

$$\| \widehat{A} \| := \sup_{\substack{\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A} \\ \psi \neq 0}} \frac{\| \widehat{A}\,\psi \|}{\|\psi\|}.$$

Dabei gelten die Abschätzungen

$$\| \widehat{A}\,\psi \| \leqq \| \widehat{A} \| \, \|\psi\|$$

sowie
$$\|\widehat{A}\widehat{B}\| \leqq \|\widehat{A}\|\,\|\widehat{B}\|.$$
Wir betonen erneut ausdrücklich, daß die Norm eines Operators unendlich sein kann.

Ein weiterer Begriff, der aufgefrischt werden sollte, ist derjenige des *abgschlossenen Operators*. Ein linearer Operator $\widehat{A}$ heißt abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus dom $\widehat{A}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n = \psi$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{A}\psi_n = \varphi$ auch $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$ und $\widehat{A}\psi = \varphi$ gilt, wenn sich also das Konvergenzverhalten von Folgen auf die Folgen der Bilder überträgt und die Grenzwerte der Bilder auch die Bilder der Grenzwerte sind. Gilt für zwei lineare Operatoren $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$
$$\operatorname{dom}\widehat{B} \supset \operatorname{dom}\widehat{A} \quad \text{und} \quad \widehat{B}\psi = \widehat{A}\psi \quad \text{für } \psi \in \operatorname{dom}\widehat{A},$$
so nennen wir $\widehat{B}$ eine *Erweiterung* von $\widehat{A}$ und $\widehat{A}$ eine *Einschränkung* von $\widehat{B}$; wir schreiben dafür $\widehat{B} \supset \widehat{A}$ oder $\widehat{A} \subset \widehat{B}$. Ein Operator $\widehat{A}$ heißt *abschließbar*, wenn es einen abgeschlossenen Operator $\widehat{B}$ mit $\widehat{B} \supset \widehat{A}$ gibt. Ist $\widehat{A}$ abgeschlossen, so gibt es eine eindeutig bestimmte minimale abgeschlossene Erweiterung $\overline{\widehat{A}}$ von $\widehat{A}$. Das heißt: $\overline{\widehat{A}} \supset \widehat{A}$, außerdem ist $\overline{\widehat{A}}$ abgeschlossen, und jede abgeschlossene Erweiterung von $\widehat{A}$ ist auch eine Erweiterung von $\overline{\widehat{A}}$. Der Operator $\overline{\widehat{A}}$ heißt *Abschluß* des Operators $\widehat{A}$. Anschaulich bedeutet die Konstruktion des Abschlusses $\overline{\widehat{A}}$ eines Operators $\widehat{A}$, daß man die Grenzwerte sämtlicher Folgen aus Elementen von dom $\widehat{A}$, soweit sie nicht sowieso schon darin enthalten sind, zu dom $\widehat{A}$ dazunimmt und dann die Wirkung des Abschlusses von $\widehat{A}$ jeweils gemäß
$$\overline{\widehat{A}}\lim_{n\to\infty}\psi_n := \lim_{n\to\infty}\widehat{A}\psi_n$$
definiert.

Wir haben in Abschnitt 2.2.3.4 gesehen, welche Bedeutung der Unterteilung der linearen Abbildungen in beschränkte und unbeschränkte Exemplare in der Funktionalanalysis ganz allgemein zukommt. Kurz gesagt zeigt sich dabei, daß bei beschränkten Operatoren alles relativ einfach, bei unbeschränkten Operatoren dagegen alles wesentlich komplizierter ist. Natürlich behält das für Operatoren auf Hilberträumen uneingeschränkt seine Wichtigkeit, weswegen wir uns hier erneut damit befassen. Zur Erinnerung: Ein linearer Operator $\widehat{A}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$
$$\|\widehat{A}\psi\| \leqq c\,\|\psi\|$$
gilt, andernfalls heißt er *unbeschränkt*. Mit Hilfe der Operatornorm läßt sich das auch wie folgt formulieren: Gilt $\|\widehat{A}\| < \infty$, so ist $\widehat{A}$ beschränkt, gilt dagegen $\|\widehat{A}\| = \infty$, so ist $\widehat{A}$ unbeschränkt. Stetigkeit und Beschränktheit sind bei linearen Operatoren äquivalente Begriffe. Darüberhinaus gibt es für jeden beschränkten linearen Operator $\widehat{A}$ eine lineare Erweiterung, die auf ganz $\mathcal{H}$ definiert ist, sodaß man ohne Beschränkung der Allgemeinheit jeden beschränkten linearen Operator stets als überall in $\mathcal{H}$ definiert betrachten kann.

Betrachten wir *unbeschränkte Operatoren*, so sieht alles ganz anders aus. Unbeschränkte Operatoren sind unstetig in jedem Punkt ihrer Definitionsbereiche. Darüberhinaus sind es

gerade ihre Definitionsbereiche, mit denen besonders sorgfältig umgegangen werden muß, insbesondere bei *abgeschlossenen unbeschränkten Operatoren*. Zwar ist jeder beschränkte Operator $\widehat{A}$ mit abgeschlossener Definitionsmenge abgeschlossen. Denn ist $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in dom $\widehat{A}$, dann ist aufgrund der Stetigkeit $\widehat{A}\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n = \lim\limits_{n\to\infty}\widehat{A}\varphi_n$ und aufgrund der Abgeschlossenheit $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n \in \operatorname{dom}\widehat{A}$. Umgekehrt gilt jedoch nach Corollar 2.38 und 2.39: Nur abgeschlossene Operatoren, für die zusätzlich $\operatorname{dom}\widehat{A} = \mathcal{H}$ gilt, sind auch beschränkt, und abgeschlossene, unbeschränkte Operatoren können nicht auf dem ganzen Hilbertraum $\mathcal{H}$ definiert sein. Sie lassen sich auch nicht linear auf ganz $\mathcal{H}$ erweitern; ihre Definitionsmengen sind daher stets echte Teilräume von $\mathcal{H}$. Dabei kann $\psi \in \mathcal{H}\setminus\operatorname{dom}\widehat{A}$ einerseits bedeuten, daß der Ausdruck $\widehat{A}\psi$ nicht definiert ist, aber auch, daß $\widehat{A}\psi$ zwar wohldefiniert ist, nicht aber Element von $\mathcal{H}$. Damit sind beim Umgang mit unbeschränkten Operatoren stets auch sorgfältige Definitionsmengenbetrachtungen erforderlich. Das wurde im vorigen Abschnitt am Beispiel des Kommutators zweier Operatoren bereits angedeutet; ein weiteres, besonders drastisches Beispiel ist das folgende: Gilt für einen unbeschränkten Operator
$\widehat{A}(\operatorname{dom}\widehat{A}) \cap \operatorname{dom}\widehat{A} = \{0\}$, dann folgt daraus, daß der Operator $\widehat{A}^2$ überall undefiniert ist mit Ausnahme des Nullvektors. Entsprechende Vorsicht ist bei der Bildung von Operator-Polynomen geboten. Diese sind nur auf der Schnittmenge der Definitionsmengen aller beteiligter Operatoren und der in den betrachteten Polynomem auftretenden Potenzen dieser Operatoren definiert, und damit stellt sich weiter die oft schwierige Frage, ob, wie und wo es durch deren Werte auf so einer gemeinsamen Definitionsmenge definierte Erweiterungen solcher Opereratorpolynome gibt[2].

Wie wir bereits in Abschnitt 2.2.3.4 gesehen haben, existieren in unendlichdimensionalen Hilberträumen stets unbeschränkte Operatoren. Insbesondere sind wesentliche in der Quantenmechanik auftauchende Operatoren unbeschränkt. Die in den folgenden Abschnitten betrachteten linearen Hilbertraum-Operatoren mit speziellen Eigenschaften sind daher stets als unbeschränkt vorauszusetzen, soweit nicht ausdrücklich anderes gesagt wird.

3.2.1 Symmetrische Operatoren

Wir beginnen zwar nicht mit der für die Quantenmechanik wichtigsten Eigenschaft linearer Operatoren überhaupt – diese folgt umgehend im nächsten Abschnitt –, aber wenigstens mit einem Spezialfall derselben. Dazu formulieren wir im vorliegenden Kapitel eine erste

3.1 Definition: Ein linearer Operator $\widehat{A}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt *symmetrisch* oder *hermitesch*[3], wenn für alle $\varphi, \psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$

$$(\widehat{A}\varphi, \psi) = (\varphi, \widehat{A}\psi)$$

gilt und dom $\widehat{A}$ ein dichter Teilraum von $\mathcal{H}$ ist.

[2]Diese Schwierigkeiten entfalten ihre volle Tragweite vor alllen Dingen in der Quantenfeldtheorie.

[3]Der erste der beiden Begriffe tritt üblicherweise in der mathematischen Literatur auf, während der zweite in der physikalischen verwendet wird.

Symmetrische Operatoren weisen die folgende spezielle Eigenschaft auf.

3.2 Satz: *Ein im Hilbertraum $\mathcal{H}$ dicht definierter Operator $\widehat{A}$ ist genau dann symmetrisch, wenn das Skalarprodukt $(\widehat{A}\psi, \psi)$ für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$ reell ist.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Ist $\widehat{A}$ symmetrisch, dann gilt für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$

$$(\widehat{A}\psi, \psi) = (\psi, \widehat{A}\psi) = \overline{(\widehat{A}\psi, \psi)}.$$

„$\Longleftarrow$“: Ist $(\widehat{A}\psi, \psi)$ für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$ reell, so folgt für alle $\varphi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$ aus

$$\big(\widehat{A}(\varphi + \psi), \varphi + \psi\big) = (\widehat{A}\varphi, \varphi) + (\widehat{A}\varphi, \psi) + (\widehat{A}\psi, \varphi) + (\widehat{A}\psi, \psi)$$

durch Vergleich von Real- und Imaginärteil auf der linken und der rechten Seite einerseits

$$\mathfrak{Im}\,(\widehat{A}\varphi, \psi) = -\mathfrak{Im}\,(\widehat{A}\psi, \varphi) = \mathfrak{Im}\,(\varphi, \widehat{A}\psi)$$

und andererseits

$$\mathfrak{Re}\,(\widehat{A}\varphi, \psi) = \mathfrak{Im}\,\big(\widehat{A}(i\varphi), \psi\big) = \mathfrak{Im}\,(i\varphi, \widehat{A}\psi) = \mathfrak{Re}\,(\varphi, \widehat{A}\psi).$$

Da komplexe Zahlen mit identischen Real- und Imaginärteilen auch selbst identisch sind, folgt damit

$$(\widehat{A}\varphi, \psi) = (\varphi, \widehat{A}\psi).$$

□

Hieraus ergibt sich eine

3.3 Verallgemeinerte Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: *Für jeden symmetrischen Operator $\widehat{A}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ gilt $|(\widehat{A}\psi, \varphi)|^2 \leqq (\widehat{A}\psi, \psi)\,(\widehat{A}\varphi, \varphi)$.*

Beweis: Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\big(\widehat{A}(\psi - \alpha\,(\widehat{A}\psi, \varphi)\,\varphi), \psi - \alpha\,(\widehat{A}\psi, \varphi)\,\varphi\big) &= (\widehat{A}\psi, \psi) - 2\,\alpha\,|(\widehat{A}\psi, \varphi)|^2 \\ &\quad + \alpha^2\,|(\widehat{A}\psi, \varphi)|^2\,(\widehat{A}\varphi, \varphi) \geqq 0,\end{aligned}$$

also mit Satz 3.2 für $\alpha = 1/(\widehat{A}\varphi, \varphi)$

$$(\widehat{A}\psi, \psi) \geqq \frac{|(\widehat{A}\psi, \varphi)|^2}{(\widehat{A}\varphi, \varphi)}.$$

Daraus folgt sofort die Behauptung. □

Unter geeigneten Voraussetzungen bleibt die Eigenschaft von Operatoren, symmetrisch zu sein, auch bei den Grenzwerten von Operatorfolgen erhalten; genauere Informationen hierüber liefert der nächste

3.4 Satz:[4] *Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, dann konvergiert jede Folge $(\widehat{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ symmetrischer Operatoren auf $\mathcal{H}$, für welche die Folge $(\|\widehat{A}_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt ist, stark gegen einen symmetrischen Operator auf $\mathcal{H}$.*

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $(\|\widehat{A}_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ ist dann $\| \widehat{A}_m - \widehat{A}_n \| \geqq 0$. Nach Ungleichung 2.142 gilt für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$|(\widehat{A}_n\psi, \varphi)| \leqq \|\widehat{A}_n\psi\| \, \|\varphi\| \leqq \|\widehat{A}_n\| \, \|\psi\| \, \|\varphi\|.$$

Nach Ungleichung 3.3 folgt daraus für alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \| (\widehat{A}_m - \widehat{A}_n) \psi \|^4 &= \big((\widehat{A}_m - \widehat{A}_n) \psi, (\widehat{A}_m - \widehat{A}_n) \psi \big)^2 \\ &\leqq \big((\widehat{A}_m - \widehat{A}_n) \psi, \psi \big) \big((\widehat{A}_m - \widehat{A}_n)^2 \psi, (\widehat{A}_m - \widehat{A}_n) \psi \big) \\ &\leqq \big[(\widehat{A}_m\psi, \psi) - (\widehat{A}_n\psi, \psi) \big] \, \| \widehat{A}_m - \widehat{A}_n \|^4 \, \|\psi\|^2 \\ &\leqq \big[(\widehat{A}_m\psi, \psi) - (\widehat{A}_n\psi, \psi) \big] \, \|\psi\|^2 \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\widehat{A}_n\| \right)^4. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Da $\big((\widehat{A}_n\psi, \psi)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung und Satz 3.2 für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ eine konvergente reelle Folge ist, gilt $\lim\limits_{n,m\to\infty} \big[(\widehat{A}_m\psi, \psi) - (\widehat{A}_n\psi, \psi) \big] = 0$, und (3.3) liefert $\lim\limits_{n,m\to\infty} \| \widehat{A}_m - \widehat{A}_n \| = 0$. Somit ist $(\widehat{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathscr{L}(\mathcal{H})$, also nach Satz 2.30 konvergent. Für den Operator $\widehat{A} = \lim\limits_{n\to\infty} \widehat{A}_n$ und alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ gilt nach Voraussetzung und Corollar 2.143

$$(\widehat{A}\psi, \varphi) = \lim_{n\to\infty} (\widehat{A}_n\psi, \varphi) = \lim_{n\to\infty} (\psi, \widehat{A}_n\varphi) = (\psi, \widehat{A}\varphi),$$

und damit folgt die Behauptung. □

Nach Corollar 2.38 und 2.39 sind abgeschlossene Abbildungen, die auf einem ganzen Banachraum definiert sind, automatisch beschränkt und umgekehrt unbeschränkte abgeschlossene Abbildungen stets nur auf echten Teilmengen des betrachteten Banachraums definiert. Ein vergleichbares Resultat gilt auch für symmetrische Operatoren auf Hilberträumen.

3.5 Satz von Hellinger und Toeplitz:[5] *Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\widehat{A}$ ein auf ganz $\mathcal{H}$ definierter symmetrischer Operator, dann ist $\widehat{A}$ beschränkt.*

Beweis: Wäre $\widehat{A}$ nicht beschränkt, dann gäbe es wegen $\| \widehat{A} \| = \infty$ eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ mit $\| \widehat{A}\varphi_n \| / \|\varphi_n\| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\| \widehat{A}\varphi_n \| / \|\varphi_n\| \big) = \infty$. Wir definieren eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionalen auf $\mathcal{H}$ durch

$$f_n(\psi) := \left(\frac{\widehat{A}\varphi_n}{\|\varphi_n\|}, \psi \right).$$

[4] Dieses Resultat stammt von Vigier [381].

[5] Der Satz wurde von seinen Namensgebern für unendliche symmetrische Matrizen formuliert [144].

Jedes f_n ist nach Konstruktion linear und auf ganz $\mathcal{H}$ definiert; nach Ungleichung 2.142 gilt außerdem

$$|f_n(\psi)| := \left| \left(\frac{\widehat{A}\varphi_n}{\|\varphi_n\|}, \psi \right) \right| \leqq \left\| \frac{\widehat{A}\varphi_n}{\|\varphi_n\|} \right\| \|\psi\|,$$

das heißt, jedes f_n ist beschränkt. Da $\widehat{A}$ symmetrisch ist, gilt

$$|f_n(\psi)| = \left| \left(\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}, \widehat{A}\psi \right) \right| \leqq \left\| \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} \right\| \|\, \widehat{A}\psi \,\| = \|\, \widehat{A}\psi \,\|,$$

und nach Satz 2.40 gibt es dann eine Konstante c mit $\|f_n\| \leqq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Andererseits ist jedoch $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \big(\|\, \widehat{A}\varphi_n \,\| \,/\, \|\varphi_n\| \big) = \infty$ – ein Widerspruch. □

Genaugenommen sind wir gar nicht in erster Linie an der im soeben bewiesenen Satz beschriebenen Situation interessiert, sondern gerade an deren Gegenteil, also insbesondere an *unbeschränkten* symmetrischen Operatoren. Offensichtlich können diese generell nicht auf dem ganzen betrachteten Hilbertraum definiert sein, weswegen für sie stets detaillierte Aussagen über ihre Definitionsmengen erforderlich sind. Dabei zeigt sich, daß der Begriff der Symmetrie im obigen Sinne für die hier verfolgten Zwecke nicht ausreicht, weswegen wir im folgenden Abschnitt eine stärkere Version desselben sowie eine Verallgemeinerung dieser stärkeren Version betrachten werden.

3.2.2 Normale und selbstadjungierte Operatoren

Dazu müssen wir zunächst etwas Vorarbeit leisten. Wir formulieren hierzu eine vorbereitende

3.6 Definition: (i) $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ seien zwei Hilberträume und $\widehat{A} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ und $\widehat{A}' : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ zwei lineare Operatoren. $\widehat{A}$ und $\widehat{A}'$ heißen *zueinander adjungiert*, wenn

$$(\varphi, \widehat{A}\psi) = (\widehat{A}'\varphi, \psi)$$

gilt für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ und alle $\varphi \in \operatorname{dom} \widehat{A}'$.
(ii) Ist $\widehat{A}^*$ ein linearer Operator auf $\mathcal{G}$, sodaß jeder Operator $\widehat{A}'$, der zu $\widehat{A}$ adjungiert ist, eine Einschränkung von $\widehat{A}^*$ ist, dann heißt $\widehat{A}^*$ der zu $\widehat{A}$ *adjungierte Operator*.

Adjungierte Operatoren sind Hilbertraum-Sonderfälle der dualen Abbildungen auf Banachräumen[6]; den Zusammenhang liefert Satz 2.146. Daß der Begriff des adjungierten Operators (und damit auch derjenige des dualen) außerdem auch eine sinnvolle Verallgemeinerung seines Namensvetters aus der elementaren linearer Algebra darstellt, auch für unbeschränkte Operatoren, garantiert der erste Hilfssatz dieses Abschnitts.

3.7 Lemma: *$\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ seien Hilberträume und $\widehat{A}$ ein dicht definierter Operator von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{G}$. Dann gilt*

[6] Siehe Abschnitt 2.2.3.5.

(i) *Für jedes* $\varphi \in \operatorname{dom} \widehat{A}^*$ *gibt es genau ein* $\widehat{A}^*\varphi \in \mathcal{H}$ *mit* $(\varphi, \widehat{A}\psi) = (\widehat{A}^*\varphi, \psi)$ *für alle* $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$.

(ii) $\widehat{A}^*$ *ist ein linearer Operator auf* $\mathcal{G}$.

Beweis: (i) Da $\operatorname{dom} \widehat{A}$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt, ist $\widehat{A}^*\varphi$ eindeutig bestimmt. Für alle $\varphi \in \operatorname{dom} \widehat{A}^*$ ist das durch $A_\varphi(\psi) = (\widehat{A}\psi, \varphi)$ definierte lineare Funktional A_φ nach Corollar 2.143 stetig und damit nach Lemma 2.27 sogar gleichmäßig stetig. Folglich gibt es zu jedem $\chi \in \mathcal{H}$ eine Folge $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\operatorname{dom} \widehat{A}$ mit $\lim_{n\to\infty} \chi_n = \chi \in \mathcal{H}$, sodaß $(a_\varphi(\chi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ ist. Daher existiert $\lim_{n\to\infty} a_\varphi(\chi_n) =: A_\varphi(\chi)$ in $\mathbb{C}$. Für jede weitere Folge $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\operatorname{dom} \widehat{A}$ mit $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \chi$ gilt $\lim_{n\to\infty} \| \chi_n - \xi_n \| = 0$ und daher auch $\lim_{n\to\infty} | a_\varphi(\chi_n) - a_\varphi(\xi_n) | = 0$. Somit ist der Wert von $A_\varphi(\chi)$ unabhängig von der speziellen Wahl der Folge $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Da die a_φ stetig sind, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodaß $\| a_\varphi(\alpha) - a_\varphi(\beta) \| < \varepsilon$ gilt für alle $\alpha, \beta \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ mit $\| \alpha - \beta \| < \delta$. Für beliebige $\zeta, \vartheta \in \mathcal{H}$ sowie Folgen $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\vartheta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\operatorname{dom} \widehat{A}$ mit $\lim_{n\to\infty} \zeta_n = \zeta$ und $\lim_{n\to\infty} \vartheta_n = \vartheta$ ist $A_\varphi(\zeta) = \lim_{n\to\infty} a_\varphi(\zeta_n)$ und $A_\varphi(\vartheta) = \lim_{n\to\infty} a_\varphi(\vartheta_n)$. Wählt man ζ und ϑ so, daß $\| \zeta - \vartheta \| < \delta$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $n > N$ einerseits

$$\| \zeta_n - \vartheta_n \| \leqq \| \zeta_n - \zeta \| + \| \zeta - \vartheta \| + \| \vartheta - \vartheta_n \| < \delta$$

und damit $\| a_\varphi(\zeta_n) - a_\varphi(\vartheta_n) \| < \varepsilon/3$ sowie andererseits $\| A_\varphi(\zeta) - a_\varphi(\zeta_n) \| < \varepsilon/3$ und $\| A_\varphi(\vartheta) - a_\varphi(\vartheta_n) \| < \varepsilon/3$ gilt. Daraus folgt

$$\| A_\varphi(\zeta) - A_\varphi(\vartheta) \| \leqq \| A_\varphi(\zeta) - a_\varphi(\zeta_n) \| + \| a_\varphi(\zeta_n) - a_\varphi(\vartheta_n) \| + \| a_\varphi(\vartheta_n) - A_\varphi(\vartheta) \| < \varepsilon,$$

das heißt, für jedes $\varphi \in \operatorname{dom} \widehat{A}^*$ besitzt das Funktional a_φ in Gestalt von A_φ eine eindeutige, lineare, gleichmäßig stetige Fortsetzung auf ganz $\mathcal{H}$. Daher gibt es nach Satz 2.146 zu jedem $\varphi \in \operatorname{dom} \widehat{A}^*$ ein $\tau \in \mathcal{H}$ mit $A_\varphi(\psi) = (\tau, \psi)$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$. Setzt man $\tau = \widehat{A}^*\psi$, so erhält man die Behauptung.
(ii) $\operatorname{dom} \widehat{A}^*$ enthält genau diejenigen Elemente von $\mathcal{G}$, für welche das Funktional A_φ stetig auf $\operatorname{dom} \widehat{A}$ ist. Somit ist $\operatorname{dom} \widehat{A}^*$ ein Unterraum von $\mathcal{G}$. Mit (i) folgt die Behauptung. □

Als unmittelbare Konsequenz aus Lemma 3.7 erhält man eine nützliche Aussage über die Definitionsmengen adjungierter Operatoren.

3.8 Corollar: $\widehat{A}$ *und* $\widehat{B}$ *seien zwei Operatoren mit* $\widehat{A} \subset \widehat{B}$. *Dann gilt* $\widehat{B}^* \subset \widehat{A}^*$.

Für jeden linearen Operator $\widehat{A}$ von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{G}$ und jedes $c \in \mathbb{C}$ ist die Relation $(c\,\widehat{A})^* = \overline{c}\,\widehat{A}^*$ sofort ersichtlich; etwas weniger offensichtlich ist folgendes.

3.9 Satz: *$\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ seien Hilberträume und $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ Operatoren von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{G}$. Dann gilt*

(i) Ist $\widehat{A}+\widehat{B}$ dicht definiert, dann ist $\widehat{A}^* + \widehat{B}^* \subset (\widehat{A}+\widehat{B})^*$;

(ii) Sind $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ und $\widehat{A}\,\widehat{B}$ dicht definiert, dann ist $\widehat{A}^*\,\widehat{B}^* \subset (\widehat{B}\,\widehat{A})^*$.

Beweis: (i) Zunächst sind wegen $\operatorname{dom}(\widehat{A}+\widehat{B}) = \operatorname{dom}\widehat{A} \cap \operatorname{dom}\widehat{B}$ auch $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ dicht definiert. Nun gilt für alle $\psi \in \operatorname{dom}(\widehat{A}+\widehat{B})$ und alle $\varphi \in \operatorname{dom}(\widehat{A}^*+\widehat{B}^*)$

$$((\widehat{A}^*+\widehat{B}^*)\,\varphi,\psi) = (\widehat{A}^*\varphi,\psi) + (\widehat{B}^*\varphi,\psi) = (\varphi,\widehat{A}\,\psi) + (\varphi,\widehat{B}\,\psi) = (\varphi,(\widehat{A}+\widehat{B})\,\psi),$$

und nach Lemma 3.7 (i) folgt daraus $\varphi \in \operatorname{dom}(\widehat{A}+\widehat{B})^*$ und $(\widehat{A}^*+\widehat{B}^*)\,\varphi = (\widehat{A}+\widehat{B})^*\varphi$.
(ii) Ist $\psi \in \operatorname{dom}(\widehat{A}\,\widehat{B})$, dann ist auch $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{B}$ und $\widehat{B}\,\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$; analog ist mit $\varphi \in \operatorname{dom}(\widehat{B}^*\,\widehat{A}^*)$ auch $\varphi \in \operatorname{dom}\widehat{A}^*$ und $\widehat{A}^*\varphi \in \operatorname{dom}\widehat{B}^*$. Damit gilt

$$((\widehat{B}^*\,\widehat{A}^*)\,\varphi,\psi) = (\widehat{A}^*\varphi,\widehat{B}\,\psi) = (\varphi,\widehat{A}\,\widehat{B}\,\psi).$$

Nach Lemma 3.7 (i) folgt $\varphi \in \operatorname{dom}(\widehat{A}\,\widehat{B})^*$ und $(\widehat{B}^*\,\widehat{A}^*)\,\varphi = (\widehat{A}\,\widehat{B})^*\varphi$. □

Die Aussagen von Satz 3.9 sind die verallgemeinerten, das heißt, auch für unbeschränkte Operatoren gültigen Versionen zweier populärer Resultate der elementaren linearen Algebra, die tatsächlich nur Sonderfälle darstellen. Diese sind Gegenstand von nachstehendem

3.10 Corollar: *$\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ seien Hilberträume, außerdem sei $\widehat{A}$ ein dicht definierter und $\widehat{B}$ ein beschränkter Operator von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{G}$. Dann gilt*

(i) $(\widehat{A}+\widehat{B})^* = \widehat{A}^* + \widehat{B}^*$;

(ii) $\widehat{A}^*\,\widehat{B}^* = (\widehat{B}\,\widehat{A})^*$.

Beweis: (i) Nach Voraussetzung gilt $\operatorname{dom}\widehat{A} = \operatorname{dom}(\widehat{A}+\widehat{B})$ und $\operatorname{dom}\widehat{A}^* = \operatorname{dom}(\widehat{A}^*+\widehat{B}^*)$, und für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$ und alle $\varphi \in \operatorname{dom}(\widehat{A}+\widehat{B})^*$ gilt daher

$$\begin{aligned}(\widehat{A}\,\psi,\varphi) &= ((\widehat{A}+\widehat{B})\,\psi,\varphi) - (\widehat{B}\,\psi,\varphi)\\ &= (\psi,(\widehat{A}+\widehat{B})^*\varphi) - (\psi,\widehat{B}^*\varphi) = (\psi,((\widehat{A}+\widehat{B})^* - \widehat{B}^*)\,\varphi).\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.7 (i) folgt $\varphi \in \operatorname{dom}(\widehat{A}^*+\widehat{B}^*)$, also $(\widehat{A}+\widehat{B})^* \subset \widehat{A}^*+\widehat{B}^*$, sowie $(\widehat{A}^*+\widehat{B}^*)\,\varphi = (\widehat{A}+\widehat{B})^*\varphi$, und damit liefert Satz 3.9 (i) die Behauptung.
(ii) Nach Voraussetzung gilt $\operatorname{dom}\widehat{A} = \operatorname{dom}\widehat{A}\,\widehat{B}$, und für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$ und alle $\varphi \in \operatorname{dom}(\widehat{B}\,\widehat{A})^*$ gilt daher

$$(\widehat{A}\,\psi,\widehat{B}^*\varphi) = (\widehat{B}\,\widehat{A}\,\psi,\varphi) = (\psi,(\widehat{B}\,\widehat{A})^*\varphi).$$

Nach Lemma 3.7 (i) folgt $\widehat{B}^*\varphi \in \operatorname{dom}(\widehat{B}\,\widehat{A})^*$, also $\operatorname{dom}(\widehat{B}\,\widehat{A})^* \subset \operatorname{dom}\widehat{A}^*\,\widehat{B}^*$, sowie $\widehat{A}^*\,\widehat{B}^*\varphi = (\widehat{B}\,\widehat{A})^*\varphi$, und damit liefert Satz 3.9 (ii) die Behauptung. □

Auch die im nächsten Satz aufgelisteten Eigenschaften des adjungierten Operators gelten nur unter speziellen Voraussetzungen.

3.11 Satz: *$\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ seien Hilberträume und $\widehat{A}$ ein Operator von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{G}$. Dann gilt folgendes.*

(i) Ist $\widehat{A}$ dicht definiert sowie $\widehat{A}^{-1}$ linear und dicht definiert, dann ist $(\widehat{A}^{-1})^* = (\widehat{A}^*)^{-1}$.

(ii) Ist $\widehat{A}$ beschränkt, dann ist $\|\widehat{A}\| = \|\widehat{A}^*\|$ und $\|\widehat{A}^*\widehat{A}\| = \|\widehat{A}\|^2$.

Beweis: (i) Für alle $\psi \in \operatorname{dom}(\widehat{A}^{-1})^*$ und alle $\varphi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$ gilt

$$(\psi, \varphi) = (\psi, \widehat{A}^{-1}\widehat{A}\varphi) = ((\widehat{A}^{-1})^*\psi, \widehat{A}\varphi) = (\widehat{A}^*(\widehat{A}^{-1})^*\psi, \varphi),$$

folglich ist $\widehat{A}^*(\widehat{A}^{-1})^* = \mathbf{1}$ auf $\operatorname{dom}(\widehat{A}^{-1})^*$. Entsprechend gilt für alle $\psi \in \operatorname{dom}(\widehat{A})^*$ und alle $\varphi \in \operatorname{dom}\widehat{A}^{-1}$

$$(\psi, \varphi) = (\psi, \widehat{A}\widehat{A}^{-1}\varphi) = (\widehat{A}^*\psi, \widehat{A}^{-1}\varphi) = ((\widehat{A}^{-1})^*\widehat{A}^*\psi, \varphi),$$

und es folgt $(\widehat{A}^{-1})^*\widehat{A}^* = \mathbf{1}$ auf $\operatorname{dom}(\widehat{A}^{-1})^*$.
(ii) Für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ sei f_φ das in Corollar 2.143 definierte Funktional; dann ist für alle $\widehat{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$

$$\sup_{\|\psi\|, \|\varphi\| \leqq 1} |(\widehat{A}\psi, \varphi)| = \sup_{\|\psi\|, \|\varphi\| \leqq 1} |f_\varphi(\widehat{A}\psi)| = \sup_{\|\varphi\| \leqq 1} \|f_\varphi\| \, \|\widehat{A}\| = \|\widehat{A}\|.$$

Damit gilt einerseits

$$\|\widehat{A}\| = \sup_{\|\psi\|, \|\varphi\| \leqq 1} |(\psi, \widehat{A}^*\varphi)| = \sup_{\|\psi\|, \|\varphi\| \leqq 1} |(\widehat{A}^*\psi, \varphi)| = \|\widehat{A}^*\|$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \|\widehat{A}\|^2 &= \sup_{\|\psi\| \leqq 1} \|\widehat{A}\psi\|^2 = \sup_{\|\psi\| \leqq 1} (\widehat{A}\psi, \widehat{A}\psi) \\ &= \sup_{\|\psi\| \leqq 1} (\psi, \widehat{A}^*\widehat{A}\psi) \leqq \|\widehat{A}^*\widehat{A}\| \leqq \|\widehat{A}^*\| \, \|\widehat{A}\| = \|\widehat{A}\|^2. \end{aligned}$$ □

Eine weitere Eigenschaften adjungierter Operatoren lehrt, daß man sich über deren Abschlüsse keine Gedanken machen muß, denn es gilt der folgende

3.12 Satz: *Jeder adjungierte Operator ist abgeschlossen.*

Beweis: $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ seien Hilberträume, außerdem sei $\widehat{A}$ ein linearer Operator von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{G}$ und $\widehat{A}^*$ der zugehörige adjungierte Operator. Ist $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\operatorname{dom}\widehat{A}^*$ mit $\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$ und $\lim_{n\to\infty} \widehat{A}^*\psi_n = \varphi$, dann gilt einerseits für jedes $\chi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$

$$\lim_{n\to\infty} (\chi, \widehat{A}^*\psi_n) = \lim_{n\to\infty} (\widehat{A}\chi, \psi_n) = (\widehat{A}\chi, \psi);$$

anderseits ist aber auch

$$\lim_{n\to\infty} (\chi, \widehat{A}^*\psi_n) = (\chi, \varphi).$$

Daraus folgt für alle $\chi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$

$$(\widehat{A}\chi, \psi_n) = (\chi, \widehat{A}^*\psi_n) = (\chi, \varphi)$$

und damit $\varphi \in \operatorname{dom} \widehat{A}^*$ und $\widehat{A}^*\psi = \varphi$. $\square$

Wir notieren ein wichtiges

3.13 Corollar: *Ist $\widehat{A}$ ein dicht definierter Operator von einem Hilbertraum auf einen zweiten, dann gilt $\widehat{A}^{**} = \overline{\widehat{A}}$.*

Hieraus folgt, daß die scheinbar naheliegende Relation $\widehat{A}^{**} = \widehat{A}$ nur für beschränkte Operatoren richtig ist.

Mit der Definition des adjungierten Operators können wir nun die beiden speziellen Klassen linearer Operatoren definieren, die namensgebend für diesen Abschnitt sind. Die zweite der beiden stellt dabei gleichzeitig auch einen der wichtigsten Begriffe des gesamten vorliegenden Buchs dar, weswegen wir anschließend einige zusätzliche Worte darüber verlieren werden. Für den Rest dieses Abschnitts sei jeweils $\mathcal{H} = \mathcal{G}$.

3.14 Definition: $\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum.

(i) Ein Operator $\widehat{N}$ auf $\mathcal{H}$ heißt *normal* [7], wenn $\widehat{N}\,\widehat{N}^* = \widehat{N}^*\widehat{N}$.

(ii) Ein Operator auf $\mathcal{H}$ heißt *maximal symmetrisch*, wenn er keine echte symmetrische Erweiterung besitzt.

(iii) Ein Operator $\widehat{A}$ auf $\mathcal{H}$ heißt *hypermaximal symmetrisch* oder *selbstadjungiert*, wenn $\widehat{A} = \widehat{A}^*$.

Jeder selbstadjungierte Operator ist damit auch normal und symmetrisch; das umgekehrte gilt natürlich jeweils nicht. Sowohl für normale als auch für selbstadjungierte Operatoren beinhaltet das Gleichheitszeichen in der Definition $\operatorname{dom} \widehat{N} = \operatorname{dom} \widehat{N}^*$ beziehungsweise $\operatorname{dom} \widehat{A} = \operatorname{dom} \widehat{A}^*$. Das zusätzliche Attribut *maximal* ist nur für symmetrische Operatoren sinnvoll, denn sind $\widehat{N}$ und $\widehat{T}$ normal und gilt $\widehat{T} \subset \widehat{N}$, dann folgt nach Corollar 3.8 $\operatorname{dom} \widehat{N} = \operatorname{dom} \widehat{T}$ und damit $\widehat{N} = \widehat{T}$. Es gilt darüberhinaus der folgende

3.15 Satz: *Jeder normale Operator ist abgeschlossen.*

Beweis: Es seien $\widehat{N}$ ein normaler Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $\mathscr{H} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$; die Elemente von $\mathscr{H}$ seien mit $\{\psi, \varphi\}$ bezeichnet. Mit dem Skalarprodukt

$$\langle\{\psi, \chi\}, \{\varphi, \xi\}\rangle = (\psi, \varphi) + (\chi, \xi)$$

[7] Diese Bezeichnung wurde von Toeplitz geprägt [371].

ist $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum. Da $\widehat{N}^*$ nach Satz 3.12 abgeschlossen ist, ist auch dessen Graph $\Gamma(\widehat{N}^*)$ abgeschlossen, das heißt, dieser ist als Unterraum von $\mathscr{H}$ vollständig. Nun gilt für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{N}^*$

$$\begin{aligned}\|\{\psi, \widehat{N}^*\psi\}\|^2 &= \langle\{\psi, \widehat{N}^*\psi\}, \{\psi, \widehat{N}^*\psi\}\rangle = (\psi, \psi) + (\widehat{N}^*\psi, \widehat{N}^*\psi) \\ &= (\psi, \psi) + (\widehat{N}\,\widehat{N}^*\psi, \psi) = (\psi, \psi) + (\widehat{N}^*\widehat{N}\,\psi, \psi) \\ &= (\psi, \psi) + (\widehat{N}\,\psi, \widehat{N}\,\psi)\langle\{\psi, \widehat{N}\,\psi\}, \{\psi, \widehat{N}\,\psi\}\rangle = \|\{\psi, \widehat{N}\,\psi\}\|^2,\end{aligned}$$

daher ist auch $\Gamma(\widehat{N})$ als Unterraum von $\mathscr{H}$ vollständig, also ebenfalls abgeschlossen. Folglich ist $\widehat{N}$ abgeschlossen. □

Natürlich sind damit auch selbstadjungierte Operatoren stets abgeschlossen. Das folgt auch direkt aus Satz 3.12. – Der nächste Satz liefert eine weitere wichtige Eigenschaft normaler Operatoren.

3.16 Satz: *Ein Operator $\widehat{N}$ ist genau dann normal, wenn $\operatorname{dom} \widehat{N} = \operatorname{dom} \widehat{N}^*$ und $\|\widehat{N}\,\psi\| = \|\widehat{N}^*\psi\|$ für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{N}$.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: $\widehat{N}$ sei normal. Dann gilt für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{N} = \operatorname{dom} \widehat{N}^*$

$$\|\widehat{N}\,\psi\|^2 = (\widehat{N}\,\psi, \widehat{N}\,\psi) = (\widehat{N}^*\widehat{N}\,\psi, \psi) = (\widehat{N}\,\widehat{N}^*\psi, \psi) = (\widehat{N}^*\psi, \widehat{N}^*\psi) = \|\widehat{N}^*\psi\|.$$

„$\Longleftarrow$“: Aus $\|\widehat{N}\,\psi\| = \|\widehat{N}^*\psi\|$ für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{N}$ folgt $(\widehat{N}\,\psi, \widehat{N}\,\psi) = (\widehat{N}^*\psi, \widehat{N}^*\psi)$, wegen $\operatorname{dom} \widehat{N} = \operatorname{dom} \widehat{N}^*$ weiter $(\widehat{N}^*\widehat{N}\,\psi, \psi) = (\widehat{N}\,\widehat{N}^*\psi, \psi)$ und damit $((\widehat{N}^*\widehat{N} - \widehat{N}\,\widehat{N}^*)\,\psi, \psi) = 0$. Das liefert $\widehat{N}\,\widehat{N}^* = \widehat{N}^*\widehat{N}$. □

Aus Satz 3.11 (i) folgt außerdem, daß für normale beziehungsweise selbstadjungierte Operatoren auch deren Inverse, sofern sie existieren sowie linear und dicht definiert sind, normal beziehungsweise selbstadjungiert sind. Sind $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ zwei normale Operatoren, dann sind $\widehat{A} + \widehat{B}$ und $\widehat{A}\,\widehat{B}$ im allgemeinen nicht ebenfalls normal. Es gilt immerhin der folgende

3.17 Satz:[8] *Ist $\widehat{N}$ ein normaler Operator, dann ist für jedes $\zeta \in \mathbb{C}$ auch der Operator $\widehat{N} + \zeta$ normal.*

Beweis: Nach Corollar 3.10 gilt $(\widehat{N} + \zeta)^* = \widehat{N}^* + \overline{\zeta}$ und damit

$$\operatorname{dom}(\widehat{N} + \zeta)^* = \operatorname{dom}(\widehat{N}^* + \overline{\zeta}) = \operatorname{dom} \widehat{N}^* = \operatorname{dom} \widehat{N} = \operatorname{dom}(\widehat{N} + \zeta).$$

Für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{N}$ gilt außerdem

$$\begin{aligned}\|(\widehat{N} + \zeta)\,\psi\|^2 &= ((\widehat{N} + \zeta)\,\psi, (\widehat{N} + \zeta)\,\psi) \\ &= \|\widehat{N}\,\psi\|^2 + |\zeta|^2\,\|\psi\|^2 + (\widehat{N}\,\psi, \zeta\,\psi) + (\zeta\,\psi, \widehat{N}\,\psi)\end{aligned}$$

[8] Wir schreiben hier wie auch im folgenden stets abkürzend $\widehat{A} + \zeta\,\mathbf{1} = \widehat{A} + \zeta$.

$$= \|\widehat{N}\psi\|^2 + |\zeta|^2\,\|\psi\|^2 + (\overline{\zeta}\,\psi, \widehat{N}^*\psi) + (\widehat{N}^*\psi, \overline{\zeta}\,\psi)$$
$$= ((\,\widehat{N}^* + \overline{\zeta}\,)\,\psi, (\,\widehat{N}^* + \overline{\zeta}\,)\,\psi)$$
$$= ((\,\widehat{N} + \zeta\,)^*\psi, (\,\widehat{N} + \zeta\,)^*\psi) = \|\,(\,\widehat{N} + \zeta\,)^*\psi\,\|^2.$$

Mit Satz 3.16 folgt die Behauptung. □

Satz 3.9 zeigt, daß für zwei selbstadjungierte Operatoren $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ zwar $\widehat{A} + \widehat{B}$ stets symmetrisch, aber nicht notwendigerweise wieder selbstadjungiert ist. Das ist jedoch sicher dann der Fall, wenn $\widehat{B}$ zusätzlich beschränkt ist. Sind $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ selbstadjungiert und vertauschbar, so ist $\widehat{A}\,\widehat{B}$ symmetrisch, aber auch dann nicht notwendigerweise selbstadjungiert. Wieder trifft letzteres sicher dann zu, wenn $\widehat{B}$ auch beschränkt ist.

Bevor wir uns den wirklich spannenden Aspekten des vorliegenden Abschnitts zuwenden, notieren wir zunächst ein Resultat, das speziell für beschränkte Operatoren eine nichttriviale Aussage darstellt.

3.18 Satz: *Ist $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum, dann gilt*

$$\|\,\widehat{A}\,\| = \sup_{\|\psi\| = 1} |(\widehat{A}\,\psi, \psi)|.$$

Beweis: Einerseits gilt nach Ungleichung 2.142

$$\sup_{\|\psi\| = 1} |(\widehat{A}\,\psi, \psi)| \leqq \sup_{\|\psi\| = 1} \|\widehat{A}\,\psi\|\,\|\psi\| = \|\,\widehat{A}\,\|.$$

Andererseits ist für alle $\varphi, \chi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$

$$\begin{aligned}(\widehat{A}\,(\,\varphi + \chi\,), (\,\varphi + \chi\,)) &= (\widehat{A}\varphi, \varphi) + (\widehat{A}\varphi, \chi) + (\widehat{A}\chi, \varphi) + (\widehat{A}\chi, \chi)\\ &= (\widehat{A}\varphi, \varphi) + (\widehat{A}\varphi, \chi) + \overline{(\widehat{A}\varphi, \chi)} + (\widehat{A}\chi, \chi)\\ &= (\widehat{A}\varphi, \varphi) + 2\,\mathfrak{Re}\,(\widehat{A}\varphi, \chi) + (\widehat{A}\chi, \chi)\end{aligned}$$

und analog

$$(\widehat{A}\,(\,\varphi - \chi\,), (\,\varphi - \chi\,)) = (\widehat{A}\varphi, \varphi) - 2\,\mathfrak{Re}\,(\widehat{A}\varphi, \chi) + (\widehat{A}\chi, \chi).$$

Mit Satz 2.136 liefert das

$$\mathfrak{Re}\,(\widehat{A}\varphi, \varphi) = \frac{1}{4}\,[\,(\widehat{A}\,(\,\varphi + \chi\,), (\,\varphi + \chi\,)) - (\widehat{A}\,(\,\varphi - \chi\,), (\,\varphi - \chi\,))\,]$$

und damit weiter

$$|\,\mathfrak{Re}\,(\widehat{A}\varphi, \varphi)| = \frac{1}{4}\,|\,(\widehat{A}\,(\,\varphi + \chi\,), (\,\varphi + \chi\,)) - (\widehat{A}\,(\,\varphi - \chi\,), (\,\varphi - \chi\,))\,|$$

$$= \frac{1}{4} \left| \left(\widehat{A} \frac{\varphi + \chi}{\| \varphi + \chi \|}, \frac{\varphi + \chi}{\| \varphi + \chi \|} \right) \| \varphi + \chi \|^2 - \left(\widehat{A} \frac{\varphi - \chi}{\| \varphi - \chi \|}, \frac{\varphi - \chi}{\| \varphi - \chi \|} \right) \| \varphi - \chi \|^2 \right|$$

$$\leqq \frac{1}{4} \left[\left| \left(\widehat{A} \frac{\varphi + \chi}{\| \varphi + \chi \|}, \frac{\varphi + \chi}{\| \varphi + \chi \|} \right) \right| \| \varphi + \chi \|^2 + \left| \left(\widehat{A} \frac{\varphi - \chi}{\| \varphi - \chi \|}, \frac{\varphi - \chi}{\| \varphi - \chi \|} \right) \right| \| \varphi - \chi \|^2 \right]$$

$$\leqq \frac{1}{4} \sup_{\|\psi\|=1} |(\widehat{A} \psi, \psi)| \, (\| \varphi + \chi \|^2 + \| \varphi - \chi \|^2) = \frac{1}{2} \sup_{\|\psi\|=1} |(\widehat{A} \psi, \psi)| \, (\|\varphi\|^2 + \|\chi\|^2).$$

Für alle $\psi, \varphi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ mit $\|\varphi\|, \|\chi\| \leqq 1$ gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \leqq 1$, sodaß

$$|(\widehat{A} \varphi, \chi)| = \mathfrak{Re} \, (\widehat{A} \varphi, \lambda \chi)$$

gilt; hieraus folgt

$$|(\widehat{A} \varphi, \chi)| \leqq \frac{1}{2} \sup_{\|\psi\|=1} |(\widehat{A} \psi, \psi)| \, (\|\varphi\|^2 + \|\lambda \chi\|^2) \leqq \sup_{\|\psi\|=1} |(\widehat{A} \psi, \psi)|.$$

Außerdem gilt wiederum wegen Ungleichung 2.142

$$\|\widehat{A} \varphi\| = \sup_{\|\psi\|=1} |(\widehat{A} \varphi, \psi)|,$$

und das liefert

$$\| \widehat{A} \| = \sup_{\|\varphi\|=1} \|\widehat{A} \varphi\| \leqq \sup_{\|\psi\|=1} |(\widehat{A} \psi, \psi)|. \qquad \square$$

Sehr häufig wird in Lehrbüchern zur Quantenmechanik nicht zwischen symmetrischen und selbstadjungierten Operatoren unterschieden[9]. In endlichdimensionalen Hilberträumen ist dies auch uneingeschränkt dasselbe. In unendlichdimensionalen Hilberträumen jedoch – und mit solchen haben wir es hier zu tun – ist diese Gleichsetzung nur für beschränkte Operatoren richtig; ist $\widehat{A}$ beschränkt und symmetrisch, so auch selbstadjungiert. Nach Satz 3.5 gilt für jeden symmetrischen Operator $\widehat{A}$: Ist $\operatorname{dom} \widehat{A} = \mathcal{H}$, so ist $\widehat{A}$ selbstadjungiert und beschränkt. Es gibt aber sehr wohl selbstadjungierte unbeschränkte Operatoren, wie wir später ausgiebig sehen werden. Für unbeschränkte Operatoren folgt aus der Symmetrie im allgemeinen nicht Selbstadjungiertheit. Außerdem ist für einen symmetrischen Operator $\widehat{A}$ der Operator $\widehat{A}^*$ im allgemeinen nicht mehr symmetrisch[10]. Die Relation $\widehat{A} = \widehat{A}^*$ bedeutet ausführlich formulert:

[9] Im Bereich der Standardliteratur der Quantenmechanik bilden hier die Aufgabensammlung von Grau [117] sowie die Lehrbücher von Grawert [119] und Müller [262] rühmliche Ausnahmen. Bei eher mathematisch orientierten Abhandlungen über Quantenmechanik und in der mathematischen Literatur wird generell mehr Sorgfalt im Umgang mit diesen Begriffen gezeigt.

[10] Die notwendige Unterscheidung symmetrischer von selbstadjungierten Operatoren ist einer der Sachverhalte, welche die weitverbreitete Diracsche Bra-Ket-Schreibweise für unbeschränkte Operatoren problematisch machen. Das gilt beispielsweise bei Matrixelementen wie $\langle \varphi | \widehat{A} | \psi \rangle$. Denn der Ausdruck $\langle \varphi | \widehat{A} | \psi \rangle$ kann sowohl $(\varphi, \widehat{A} \psi)$ als auch $(\widehat{A}^* \varphi, \psi)$ bedeuten. Das ist nur für beschränkte Operatoren dasselbe. Für unbeschränkte Operatoren dagegen sind es zwei unterschiedliche Ausdrücke, denn nun kommt es auf die Definitionsmengen an: die eine der beiden Möglichkeiten ist definiert für $\varphi \in \mathcal{H}$ und $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$, die andere für $\varphi \in \operatorname{dom} \widehat{A}^*$

Ein Operator $\widehat{A}$ ist selbstadjungiert, wenn $\widehat{A}^*\psi = \widehat{A}\psi$ gilt für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}^*$ und zusätzlich $\operatorname{dom}\widehat{A}^* = \operatorname{dom}\widehat{A}$ ist. Bei Symmetrie ist jedoch nur $\operatorname{dom}\widehat{A} \subset \operatorname{dom}\widehat{A}^*$ garantiert. Man muß also bei unbeschränkten Operatoren sehr genau auf die zugehörigen Definitionsmengen achten. Insbesondere sind nach Satz 3.5 unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren nie auf dem ganzen Hilbertraum definiert, ihre Definitionsmengen sind also stets *echte Teilmengen* von $\mathcal{H}$. Daher sind selbstadjungierte Operatoren stets symmetrisch, aber symmetrische Operatoren sind nicht notwendig selbstadjungiert. Zusammenfassend können wir dies folgendermaßen formulieren: Ein Operator $\widehat{A}$ ist symmetrisch, wenn $\widehat{A} \subset \widehat{A}^*$, und selbstadjungiert, wenn $\widehat{A} = \widehat{A}^*$.

Die meisten der in Quantenmechanik auftretenden Operatoren sollten aus Gründen, die wir noch diskutieren werden, selbstadjungiert sein; sie sind es in der Realität aber häufig nicht. Dieses Problem kann man umgehen, indem man eine etwas abgeschwächte Form der Selbstadjungiertheit einführt und solche Opertatoren sodann geeignet auf selbstadjungierte Operatoren erweitert. Damit bekommt man auch typischerweise widerborstige quantenmechanische Operatoren in den Griff, das heißt, man kann sie durch geeignet gewählte selbstadjungierte Operatoren ersetzen[11]. Genaueres beinhaltet die folgende

3.19 Definition: Ein symmetrischer Operator $\widehat{A}$ heißt *wesentlich selbstadjungiert*, wenn er eine und damit alle der fünf folgenden zueinander äquivalenten Eigenschaften erfüllt:

(i) $\widehat{A}$ hat eine eindeutige selbstadjungierte Erweiterung,

(ii) Der Abschluß $\overline{\widehat{A}}$ ist selbstadjungiert,

(iii) $\widehat{A}^* = \widehat{A}^{**}$, das heißt, $\widehat{A}^*$ ist selbstadjungiert,

(iv) $\widehat{A}^{**} = \widehat{A}^{***} = \widehat{A}^*$, das heißt, $\widehat{A}^{**}$ ist selbstadjungiert,

(v) $\widehat{A}^*$ ist symmetrisch.

Wir überzeugen uns kurz davon, daß diese Eigenschaften tatsächlich äquivalent sind.
(i) $\Longrightarrow$ (ii): Folgt aus Satz 3.12.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Folgt aus Corollar 3.13.

und $\psi \in \mathcal{H}$, und die beiden Definitionsmengen sind jeweils echte Teilräume von $\mathcal{H}$, also insbesondere im allgemeinen nicht identisch. Als Beispiel betrachte man zu einem unbeschränkten selbstadjungierten Operator $\widehat{A}$ den Operator $\widehat{A}^2$. Im allgemeinen ist hierbei von $\operatorname{dom}\widehat{A} \neq \widehat{A}\operatorname{dom}\widehat{A} \neq \operatorname{dom}\widehat{A}^2$ auszugehen. Der Bra-Ket-Ausdruck $\langle\varphi|\,\widehat{A}^2\,|\psi\rangle$ kann $(\varphi, \widehat{A}^2\psi)$ genauso wie $(\widehat{A}^2\varphi, \psi)$ oder auch $(\widehat{A}\varphi, \widehat{A}\psi)$ bedeuten; der erste dieser drei Ausdrücke ist nur für $\varphi \in \mathcal{H}$ und $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}^2$, der zweite nur für $\varphi \in \operatorname{dom}\widehat{A}^2$ und $\psi \in \mathcal{H}$ und der dritte nur für $\varphi, \psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$ definiert. Ignoriert man das, stößt man gelegentlich auf merkürdige oder sogar widersprüchliche Rechenergebnisse. Konkrete Beispiele stehen in [117], weitere Details dazu findet man bei [109]. Die oben beschriebenen Schwierigkeiten dürften einem Großteil ihrer Benutzer kaum bewußt sein; Versuche, den Bra-Ket-Formalismus wasserdicht zu machen, wie man sie etwa in [38] - [42], [86] und [87] oder [315] und [316] finden kann, sind mathematisch sehr aufwendig und nur bedingt als erfolgreich zu bezeichnen.

[11] Wovon man natürlich bei der praktischen Arbeit, das heißt bei konkreten Berechnungen nichts merkt, weswegen typischerweise in Quantenmechanik-Lehrbüchern keine Rede davon ist.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Klar
(iv) $\Longrightarrow$ (v): Klar
(v) $\Longrightarrow$ (i): Nach Voraussetzung und Corollar 3.13 gilt $\operatorname{dom}\widehat{A} \subset \operatorname{dom}\widehat{A}^* \subset \operatorname{dom}\widehat{A}^{**} = \operatorname{dom}\overline{\widehat{A}}$; da $\widehat{A}^*$ abgeschlossen ist, folgt die Behauptung.

Man kann meist zeigen, daß die in der Quantenmechanik auftretenden nicht selbstadjungierten Opераroren wenigstens wesentlich selbstadjungiert sind, sodaß man sie jeweils durch ihre Abschlüsse ersetzen kann und so wieder selbstadjungierte Operatoren vorliegen hat.

Mit Hilfe des Begriffs der Operatorerweiterung können wir nun den vorhergenden und den vorliegenden Abschnitt zusammenfassen, indem wir so etwas wie eine *Hierarchie symmetrischer linearer Operatoren* aufstellen: Wir haben

für symmetrische Operatoren	$\widehat{A} \subset \widehat{A}^{**} \subset \widehat{A}^*$,
für abgeschlossene symmetrische Operatoren	$\widehat{A} = \widehat{A}^{**} \subset \widehat{A}^*$,
für wesentlich selbstadjungierte Operatoren	$\widehat{A} \subset \widehat{A}^{**} = \widehat{A}^*$
und für selbstadjungierte Operatoren	$\widehat{A} = \widehat{A}^{**} = \widehat{A}^*$.

Der Vorgang des Adjungierens eines Operators hat also um so weniger Wirkung, je weiter man sich in dieser Hierarchie nach oben bewegt.

Der Nachweis, daß ein vorgegebener Operator $\widehat{A}$ selbstadjungiert ist, erweist sich meist als ungleich schwieriger als der Nachweis, daß er nur symmetrisch ist. Bei einem unbeschränkten Operator $\widehat{A}$ ist es hier eben nicht damit getan, den adjungierten Operator $\widehat{A}^*$ zu bestimmen und dessen Wirkung mit derjenigen von $\widehat{A}$ zu vergleichen. Es gibt eine ganze Reihe von Kriterien zur Unterscheidung von symmetrischen und selbstadjungierten Operatoren. Wir betrachten im folgenden ein erstes Beispiel für ein solches Kriterium, weitere folgen.

3.20 Satz: *Ist $\widehat{A}$ ein symmetrischer Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann sind folgende drei Aussagen äquivalent:*

(i) *$\widehat{A}$ ist selbstadjungiert,*

(ii) *$\widehat{A}$ ist abgeschlossen und* $\ker(\widehat{A}^* \pm i) = \{0\}$,

(iii) $\operatorname{ran}(\widehat{A} \pm i) = \mathcal{H}$.

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii): $\widehat{A}$ sei selbstadjungiert; daraus folgt die Abgeschlossenheit. Außerdem sei $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A} = \operatorname{dom}\widehat{A}^*$ ein Vektor mit der zusätzlichen Eigenschaft $(\widehat{A}^* + i)\psi = 0$, also $\widehat{A}^*\psi = i\psi$. Damit gilt auch $\widehat{A}\psi = i\psi$, und da $(\psi, \widehat{A}\psi)$ nach Satz 3.2 reell ist, folgt $\psi = 0$. Aus dem selben Grund ist auch die Relation $(\widehat{A}^* - i)\psi = 0$ nur möglich für $\psi = 0$. Es folgt $\ker(\widehat{A}^* \pm i) = \{0\}$.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Wir notieren zunächst, daß $\varphi \in \mathcal{H}$ genau dann orthogonal zu $\operatorname{ran}(\widehat{A} \pm i)$ ist, wenn für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$

$$(\varphi, \widehat{A}\psi \pm i\psi) = 0$$

oder

$$(\psi, \widehat{A}^* \varphi) = \pm(\psi, i\,\varphi)$$

gilt, das heißt wenn $\varphi \in \operatorname{dom} \widehat{A}^*$ ist und die Gleichungen

$$\widehat{A}^* \varphi = \pm i\,\varphi$$

erfüllt sind. Aus $\ker(\widehat{A}^* \pm i) = \{0\}$ folgt damit zumindest schon, daß $\operatorname{ran}(\widehat{A} \pm i)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist. Nun sei $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\operatorname{dom} \widehat{A}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} (\widehat{A} \pm i)\,\psi_n = \varphi$. Für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ gilt

$$\|(\widehat{A} \pm i)\,\psi\|^2 = \|\widehat{A}\,\psi\|^2 + \|\psi\|^2,$$

und daher sind auch $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\widehat{A}\,\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Schreibt man etwa $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = \varphi_0$, so gilt $\varphi_0 \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ und $(\widehat{A} \pm i)\,\varphi_0 = \varphi$. Damit ist $\operatorname{ran}(\widehat{A} \pm i)$ abgeschlossen, und es folgt $\operatorname{ran}(\widehat{A} \pm i) = \mathcal{H}$.
(iii) $\Longrightarrow$ (i): Wegen $\operatorname{ran}(\widehat{A} - i) = \mathcal{H}$ gibt es zu jedem $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}^*$ ein $\chi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$, so daß

$$(\widehat{A} - i)\,\chi = (\widehat{A}^* - i)\,\psi.$$

$\widehat{A}$ ist nach Voraussetzung symmetrisch, es gilt also $\operatorname{dom} \widehat{A} \subset \operatorname{dom} \widehat{A}^*$ und folglich auch $\psi - \chi \in \operatorname{dom} \widehat{A}^*$ sowie $(\widehat{A} - i)\,\varphi = (\widehat{A}^* - i)\,\varphi$ für alle $\varphi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$. Daraus folgt

$$(\widehat{A}^* - i)(\psi - \chi) = 0. \tag{3.4}$$

Nach Voraussetzung ist $\operatorname{ran}(\widehat{A} + i) = \mathcal{H}$, wie oben gezeigt wurde, ist dann auch $\ker(\widehat{A}^* - i) = \{0\}$, und (3.4) kann daher nur richtig sein für $\chi = \psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$. Damit folgt $\operatorname{dom} \widehat{A} = \operatorname{dom} \widehat{A}^*$, und $\widehat{A}$ ist selbstadjungiert. □

Häufig ist folgende Verallgemeinerung der Aussage (iii) $\Longrightarrow$ (i) von Satz 3.20 nützlich:

3.21 Satz: *Gibt es für einen symmetrischen Operator $\widehat{A}$ eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ mit*

$$\operatorname{ran}(\widehat{A} - \lambda) = \operatorname{ran}(\widehat{A} - \overline{\lambda}) = \mathcal{H},$$

dann ist $\widehat{A}$ selbstadjungiert.

Beweis: $\widehat{A}$ ist nach Voraussetzung symmetrisch, es gilt also $\operatorname{dom} \widehat{A} \subset \operatorname{dom} \widehat{A}^*$, und folglich genügt es zu zeigen, daß auch $\operatorname{dom} \widehat{A}^* \subset \operatorname{dom} \widehat{A}$ gilt. Für jedes $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}^*$ und jedes $\varphi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ findet man

$$((\widehat{A} - \lambda)\,\varphi, \psi) = (\widehat{A}\varphi, \psi) - \lambda\,(\varphi, \psi) = (\varphi, \widehat{A}^*\psi) - (\varphi, \overline{\lambda}\,\psi) = (\varphi, (\widehat{A}^* - \overline{\lambda})\,\psi).$$

Außerdem gibt es wegen $\operatorname{ran}(\widehat{A} - \overline{\lambda}) = \mathcal{H}$ ein $\chi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ mit

$$(\widehat{A} - \overline{\lambda})\,\chi = (\widehat{A}^* - \overline{\lambda})\,\psi;$$

beides zusammen liefert

$$((\widehat{A}-\lambda)\,\varphi,\psi) = (\varphi,(\widehat{A}-\overline{\lambda})\,\chi) = ((\widehat{A}-\lambda)\,\varphi,\chi)$$

und damit

$$((\widehat{A}-\lambda)\,\varphi,\psi-\chi) = 0.$$

Es ist aber auch $\operatorname{ran}(\widehat{A}-\lambda) = \mathcal{H}$, also gilt für jedes $\xi \in \mathcal{H}$

$$(\xi,\psi-\chi) = 0.$$

Damit ist $\psi = \chi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$ und folglich $\operatorname{dom}\widehat{A}^* \subset \operatorname{dom}\widehat{A}$. □

Eine modifizierte Formulierung des grundlegenden Kriteriums für Selbstadjungiertheit aus Satz 3.20 sollte nicht unerwähnt bleiben, da sie gelegentlich leichter handhabbar ist. Dazu ist ein Hilfssatz erforderlich in Gestalt von folgendem

3.22 Lemma: *Für jeden abgeschlossenen symmetrischen Operator $\widehat{A}$ ist die Definitionsmenge des dazu adjungierten Operators $\widehat{A}^*$ darstellbar als direkte Summe der Form*

$$\operatorname{dom}\widehat{A}^* = \operatorname{dom}\widehat{A} \oplus \operatorname{ran}(\widehat{A}+i)^\perp \oplus \operatorname{ran}(\widehat{A}-i)^\perp.$$

Beweis: 1. Wir charakterisieren zunächst die Elemente von $\operatorname{ran}(\widehat{A}\pm i)^\perp$; das sind genau diejenigen $\psi \in \mathcal{H}$, für welche $((\widehat{A}\pm i)\,\varphi,\psi) = 0$ und damit $(\varphi,\widehat{A}^*\psi) = \pm(\varphi, i\,\psi)$ gilt für alle $\varphi \in \operatorname{ran}\widehat{A}$. Folglich gilt $\psi \in \operatorname{ran}(\widehat{A}\pm i)^\perp$ genau dann, wenn $\widehat{A}^*\psi = \pm i\,\psi$.

2. Nun zeigen wir, daß jedes Element ψ von $\operatorname{dom}\widehat{A}^*$ in der beschriebenen Weise zerlegt werden kann. Wegen $\mathcal{H} = \operatorname{ran}(\widehat{A}-i) + \operatorname{ran}(\widehat{A}-i)^\perp$ gibt es zu jedem $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}^*$ Elemente $\varphi,\chi \in \mathcal{H}$ mit

$$(\widehat{A}^*-i)\,\psi = (\widehat{A}-i)\,\varphi + 2\,i\,\chi \tag{3.5}$$

und

$$\widehat{A}^*\chi = -i\,\chi. \tag{3.6}$$

Aus (3.5) und $\widehat{A}\,\psi = \widehat{A}^*\psi$ folgt

$$\widehat{A}^*(\psi-\varphi) = i\,(\psi-\varphi) + 2\,i\,\chi,$$

und mit (3.6) und 1. erhält man weiter

$$\begin{aligned}\widehat{A}^*(\psi-\varphi+\chi) &= i\,(\psi-\varphi) + 2\,i\,\chi + \widehat{A}^*\chi\\ &= i\,(\psi-\varphi) + i\,\chi = i\,(\psi-\varphi+\chi).\end{aligned}$$

Nach 1. ist damit

$$\psi-\varphi+\chi := \xi \in \operatorname{ran}(\widehat{A}+i)^\perp$$

und

$$\psi = \varphi-\chi+\xi \in \operatorname{dom}\widehat{A} + \operatorname{ran}(\widehat{A}+i)^\perp + \operatorname{ran}(\widehat{A}-i)^\perp.$$

3. Schließlich zeigen wir, daß diese Zerlegung eindeutig ist. Dazu sei $\psi = \widetilde{\varphi} - \widetilde{\chi} + \widetilde{\xi}$ eine weitere Zerlegung von ψ; daraus folgt

$$\varphi - \widetilde{\varphi} + \chi - \widetilde{\chi} + \xi - \widetilde{\xi} = 0 \tag{3.7}$$

und nach 1. weiter

$$\widehat{A}(\varphi - \widetilde{\varphi}) - i(\chi - \widetilde{\chi}) - i(\xi - \widetilde{\xi}) = 0. \tag{3.8}$$

Multipliziert man (3.7) mit i und subtrahiert (3.8), erhält man

$$\widehat{A}(\varphi - \widetilde{\varphi}) - i(\varphi - \widetilde{\varphi}) - 2i(\xi - \widetilde{\xi}) = 0,$$

und wegen $[\widehat{A}(\varphi - \widetilde{\varphi}) - i(\varphi - \widetilde{\varphi})] \perp (\xi - \widetilde{\xi})$ folgt $\xi = \widetilde{\xi}$. Analog erhält man durch multiplizieren von (3.7) mit $-i$ und Subtrahieren von (3.8) $\chi = \widetilde{\chi}$ und damit auch $\varphi = \widetilde{\varphi}$. Folglich ist $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A} \oplus \operatorname{ran}(\widehat{A} + i)^{\perp} \oplus \operatorname{ran}(\widehat{A} - i)^{\perp}$. □

Lemma 3.22 gibt Anlaß zur Einführung eines neuen Begriffs.

3.23 Definition: Die Größen $m_+ = \dim \operatorname{ran}(\widehat{A} + i)^{\perp}$ und $m_- = \dim \operatorname{ran}(\widehat{A} - i)^{\perp}$ heißen die *Defektindizes* des Operators $\widehat{A}$.

Mit den Defektindizes kann man obige Resultate besonders kompakt formulieren.

3.24 Corollar: *(i) Ein abgeschlossener symmetrischer Operator $\widehat{A}$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn $m_+ = m_- = 0$.*
(ii) Für $\widehat{A}$ gibt es genau dann eine selbstadjungierte Erweiterung, wenn $m_+ = m_-$.

Ist der betrachtete Operator positiv definit, genügt ein leicht modifiziertes Kriterium. Dazu beweisen wir zunächst ein weiteres

3.25 Lemma: *Für jeden dicht definierten linearen Operator $\widehat{A}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist* $\ker \widehat{A}^* \oplus \overline{\operatorname{ran} \widehat{A}} = \mathcal{H}$.

Beweis: Ist einerseits $\psi \in \operatorname{ran} \widehat{A}$ und $\varphi \in \ker \widehat{A}^*$, dann gibt es ein $\chi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ mit $\psi = \widehat{A}\chi$, und es gilt

$$(\psi, \varphi) = (\widehat{A}\chi, \varphi) = (\chi, \widehat{A}^*\varphi) = 0;$$

also ist $\ker \widehat{A}^* \subset (\operatorname{ran} \widehat{A})^{\perp}$. Ist anderseits $\xi \in (\operatorname{ran} \widehat{A})^{\perp}$, dann gilt für alle $\psi \in \operatorname{ran} \widehat{A}$ mit $\psi = \widehat{A}\chi$ ebenso

$$(\psi, \xi) = (\widehat{A}\chi, \xi) = (\chi, \widehat{A}^*\xi) = 0,$$

das heißt, es gilt $\widehat{A}^*\xi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$. Nach Voraussetzung ist $\operatorname{dom} \widehat{A}$ dicht in $\mathcal{H}$, es folgt

$$(\operatorname{dom} \widehat{A})^* = \left(\overline{\operatorname{dom} \widehat{A}}\right)^* = \mathcal{H}^* = \{0\}$$

und damit $\widehat{A}^*\xi = 0$. Das bedeutet $\ker \widehat{A}^* \supset (\operatorname{ran} \widehat{A})^{\perp}$ und insgesamt $\ker \widehat{A}^* = (\operatorname{ran} \widehat{A})^{\perp}$. Hieraus ergibt sich die Behauptung. □

Nun gilt der folgende:

3.26 Satz: *Gibt es zu einem abgeschlossenen positiv definiten symmetrischen Operator* $\widehat{A}$ *ein* $\alpha > 0$ *so daß* $\ker(\widehat{A}^* + \alpha) = \{0\}$ *gilt, dann ist* $\widehat{A}$ *selbstadjungiert*[12].

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\alpha = 1$. Nach Voraussetzung ist $\widehat{A}$ symmetrisch und folglich $\mathrm{dom}\,\widehat{A} \subset \mathrm{dom}\,\widehat{A}^*$, daher genügt es zu zeigen, daß $\mathrm{dom}\,\widehat{A}^* \subset \mathrm{dom}\,\widehat{A}$ gilt. Dies erfolgt in zwei Schritten.
1. $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien zwei Folgen aus $\mathrm{ran}(\widehat{A} + 1)$ beziehungsweise aus $\mathrm{dom}\,\widehat{A}$; erstere sei konvergent mit Grenzwert ψ, außerdem gelte $\psi_n = (\widehat{A} + 1)\varphi_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen zunächst, daß $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Für die Folge der Skalarprodukte aus den beiden Folgen gilt

$$(\varphi_n, \psi_n) = (\varphi_n, \widehat{A}\varphi_n) + \|\varphi_n\|^2 \geqq \|\varphi_n\|^2$$

und das liefert nach Ungleichung 2.142

$$\|\varphi_n\| \leqq \|\psi_n\|.$$

Wegen $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\psi_n\| < \infty$ folgt daraus weiter $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\| < \infty$. Weil $\widehat{A}$ positiv definit und $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, findet man damit und wieder mit Ungleichung 2.142 für jedes $\varepsilon > 0$ geeignete natürliche Zahlen m, n und eine Konstante $c > 0$, so daß

$$\begin{aligned}\|\varphi_m - \varphi_n\|^2 &\leqq ((\varphi_m - \varphi_n), (\widehat{A} + 1)(\varphi_m - \varphi_n)) = ((\varphi_m - \varphi_n), (\psi_m - \psi_n)) \\ &\leqq \|\varphi_m - \varphi_n\|\,\|\psi_m - \psi_n\| \leqq (\|\varphi_m\| + \|\varphi_n\|)\,\|\psi_m - \psi_n\| \\ &\leqq c\,\|\psi_m - \psi_n\| \leqq \varepsilon.\end{aligned}$$

$\widehat{A}$ ist abgeschlossen, folglich existiert der Grenzwert $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n \in \mathrm{dom}\,\widehat{A}$ und es gilt $(\widehat{A} + 1)\varphi = \psi$. Damit ist $\mathrm{ran}(\widehat{A} + 1)$ abgeschlossen. Nach Voraussetzung ist $\ker(\widehat{A}^* + 1) = \{0\}$, und nach Lemma 3.25 folgt $\mathrm{ran}(\widehat{A} + 1) = \mathcal{H}$.
2. Sei nun $\varphi \in \mathrm{dom}\,\widehat{A}^*$. Wie gesehen gilt $\mathrm{ran}(\widehat{A} + 1) = \mathcal{H}$ und außerdem $\mathrm{dom}\,\widehat{A} \subset \mathrm{dom}\,\widehat{A}^*$, weil $\widehat{A}$ nach Voraussetzung symmetrisch ist, infolgedessen gibt es dann ein $\chi \in \mathrm{dom}\,\widehat{A}$ so daß

$$(\widehat{A} + 1)\chi = (\widehat{A}^* + 1)\chi = (\widehat{A}^* + 1)\varphi.$$

Dies läßt sich umformen zu

$$(\widehat{A}^* + 1)(\varphi - \chi) = 0,$$

und wegen $\ker(\widehat{A}^* + 1) = \{0\}$ geht das nur für $\varphi = \chi$. Damit ist $\mathrm{dom}\,\widehat{A}^* \subset \mathrm{dom}\,\widehat{A}$, insgesamt also $\mathrm{dom}\,\widehat{A}^* = \mathrm{dom}\,\widehat{A}$, und $\widehat{A}$ ist selbstadjungiert. □

[12] Wie in Abschnitt 4.3.4 gezeigt wird, gilt auch die Umkehrung dieses Satzes.

Aufgrund ihrer Bedeutung für die Quantenmechanik beschreiben wir zwei weitere Kriterien für Selbstadjungiertheit, die exemplarisch sogenannte *störungstheoretische Verfahren* repräsentieren; dabei wird von einem bereits als selbstadjungiert nachgewiesenen Operator $\widehat{A}$ ausgegangen und gezeigt, daß dann unter gewissen von einem weiteren Operator $\widehat{B}$ zu fordernden Voraussetzungen der Operator $\widehat{A}+\widehat{B}$ ebenfalls selbstadjungiert oder zumindest wesentlich selbstadjungiert ist[13]. $\widehat{B}$ wird dabei als Störung von $\widehat{A}$ betrachtet, weil es in einem gewissen, gleich genauer zu definierenden Sinn klein gegen $\widehat{A}$ ist. Das wichtigste Kriterium dieser Art ist das

3.27 Kato-Rellich-Theorem[14]. *$\widehat{A}$ sei ein selbstadjungierter und $\widehat{B}$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator mit* $\operatorname{dom}\widehat{\mathrm{B}} \supset \operatorname{dom}\widehat{\mathrm{A}}$. *Außerdem gebe es Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\alpha < 1$, sodaß*

$$\|\,\widehat{B}\,\psi\,\| \leqq \alpha\,\|\,\widehat{A}\,\psi\,\| + \beta\,\|\psi\| \quad \textit{für alle } \psi \in \textit{dom}\,\widehat{A} \tag{3.9}$$

gilt[15]. *Dann ist der Operator $\widehat{A}+\widehat{B}$ selbstadjungiert, und es gilt* $\operatorname{dom}(\widehat{\mathrm{A}}+\widehat{\mathrm{B}}) = \operatorname{dom}\widehat{\mathrm{A}}$. *Ist $\widehat{A}$ auf einem Unterraum $\mathcal{U} \subset$* $\operatorname{dom}\widehat{\mathrm{A}}$ *wesentlich selbstadjungiert, dann ist auch $\widehat{A}+\widehat{B}$ auf $\mathcal{U}$ wesentlich selbstadjungiert.*

Beweis:[16] $\widehat{A}+\widehat{B}$ ist klarerweise symmetrisch. Ist $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\operatorname{dom}\widehat{A}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n = \psi \in \operatorname{dom}(\,\widehat{A}+\widehat{B}\,) = \operatorname{dom}\widehat{A}$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(\,\widehat{A}+\widehat{B}\,)\,\psi_n = \varphi$, dann gilt für $m, n \in \mathbb{N}$ aufgrund von Ungleichung 2.81 und (3.9)

$$\begin{aligned}
\|\,\widehat{A}\,\psi_m - \widehat{A}\,\psi_n\,\| &\leqq \|\,(\,\widehat{A}+\widehat{B}\,)\,\psi_m - (\,\widehat{A}+\widehat{B}\,)\,\psi_n\,\| - \|\,\widehat{B}\,\psi_m - \widehat{B}\,\psi_n\,\| \\
&\leqq \|\,(\,\widehat{A}+\widehat{B}\,)\,(\,\psi_m - \psi_n\,)\,\| - \alpha\,\|\,\widehat{A}\,(\,\psi_m - \psi_n\,)\,\| - \beta\,\|\,\psi_m - \psi_n\,\| \\
&\leqq \|\,\widehat{A}+\widehat{B}\,\|\,\|\,\psi_m - \psi_n\,\| - \|\,\alpha\,\widehat{A}\,\|\,\|\,\psi_m - \psi_n\,\| - \beta\,\|\,\psi_m - \psi\,\| \\
&\leqq \|\,(\,1-\alpha\,)\,\widehat{A}+\widehat{B}+\beta\,\|\,\|\,\psi_m - \psi_n\,\|;
\end{aligned}$$

es gilt also $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|\,\widehat{A}\,\psi_m - \widehat{A}\,\psi_n\,\| = 0$, das heißt, $(\widehat{A}\,\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge. $\widehat{A}$ ist als selbstadjungierter Operator abgeschlossen, folglich ist $\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{A}\,\psi_n = \widehat{A}\,\psi$. Wegen (3.9) ist $(\widehat{B}\,\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent, und da nach Voraussetzung auch $\widehat{B}$ abgeschlossen ist, gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{B}\,\psi_n = \widehat{B}\,\psi$. Die Linearität der Operatoren liefert $\lim\limits_{n\to\infty}(\,\widehat{A}+\widehat{B}\,)\,\psi_n = (\,\widehat{A}+\widehat{B}\,)\,\psi$, und somit ist $\widehat{A}+\widehat{B}$ abgeschlossen.

[13]Ausführliches dazu steht in [196].

[14]Erstmals veröffentlicht wurde dieses Resultat von Franz Rellich in der Arbeit [303]. Später wurde es von Tosio Kato verallgemeinert, der auch als erster die sehr weitgehende Anwendbarkeit des Satzes demonstrierte, insbesondere auch mit Blick auf quantenmechanische Sachverhalte [196].

[15]Man sagt auch, $\widehat{B}$ sei $\widehat{A}$-*beschränkt*; α heißt *relative Schranke* von $\widehat{B}$ bezüglich $\widehat{A}$.

[16]Der hier vorgeführte, im Gegensatz zu den üblicherweise anzutreffenden Versionen ohne Neumann-Reihen und Spektraltheorie auskommende Beweis stammt von Hislop und Segal [161].

Für den Nachweis der Selbstadjungiertheit betrachten wir $\ker(\widehat{A}+\widehat{B}-i\lambda)$ für beliebiges $\lambda > 0$. Durch Ausmultiplizieren erhalten wir zunächst für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$

$$\|(\widehat{A}+\widehat{B}\pm i\lambda)\psi\|^2 = \|(\widehat{A}+\widehat{B})\psi\|^2 + \lambda^2\|\psi\|^2$$
$$\pm 2\lambda\,\mathfrak{Re}\{i[((\widehat{A}+\widehat{B})\psi,\psi)-(\psi,(\widehat{A}+\widehat{B})\psi)]\}$$

und daraus, weil der dritte Summand rechts aufgrund der Symmetrie von $\widehat{A}+\widehat{B}$ verschwindet,

$$\|(\widehat{A}+\widehat{B}\pm i\lambda)\psi\|^2 = \|(\widehat{A}+\widehat{B})\psi\|^2 + \lambda^2\|\psi\|^2.$$

Interpretiert man hier die linke Seite als Quadrat der Hypotenuse und die rechte Seite als Summe der Quadrate der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, so folgt

$$2\|(\widehat{A}+\widehat{B}\pm i\lambda)\psi\| \geqq \|(\widehat{A}+\widehat{B})\psi\| + \lambda\|\psi\|;$$

Anwendung der Deiecksungleichung sowie von Relation (3.9) liefert weiter für $\lambda > \beta$

$$2\|(\widehat{A}+\widehat{B}\pm i\lambda)\psi\| \geqq \|\widehat{A}\psi\| - \|\widehat{B}\psi\| + \lambda\|\psi\|$$
$$\geqq (1-\alpha)\|\widehat{A}\psi\| + (\lambda-\beta)\|\psi\|,$$

und durch beidseitiges Quadrieren finden wir

$$4\|(\widehat{A}+\widehat{B}\pm i\lambda)\psi\|^2 \geqq (1-\alpha)^2\|\widehat{A}\psi\|^2 + (\lambda-\beta)^2\|\psi\|^2$$
$$\geqq (1-\alpha)^2\left[\|\widehat{A}\psi\|^2 + \left(\frac{\lambda-\beta}{1-\alpha}\right)^2\|\psi\|^2\right] \geqq (1-\alpha)^2\|(\widehat{A}-i\gamma)\psi\|^2,$$

wobei die Abkürzung $\gamma := (\lambda-\beta)/(1-\alpha)$ verwendet wurde. Aus $(\widehat{A}+\widehat{B}-i\lambda)\psi = 0$ folgt daher $(\widehat{A}-i\gamma)\psi = 0$, und da $\widehat{A}$ selbstadjungiert ist, also der Relation $\ker(\widehat{A}\pm i\gamma) = \{0\}$ genügt, gilt $\psi = 0$. Es ist also $\ker(\widehat{A}+\widehat{B}-i\lambda) = \{0\}$, und somit ist $\widehat{A}+\widehat{B}$ selbstadjungiert. Die wesentliche Selbstadjungiertheit von $\widehat{A}+\widehat{B}$ auf jedem Unterraum $\mathcal{U}$, auf dem das $\widehat{A}$ auch ist, folgt aus $\operatorname{dom}\overline{((\widehat{A}+\widehat{B})\restriction\mathcal{U})} \supset \operatorname{dom}\overline{(\widehat{A}\restriction\mathcal{U})}$. □

Wir bemerken zusätzlich, daß die Ungleichung (3.9) durch folgende äquivalente Aussage ersetzt werden kann: Es gibt Zahlen $a, b \in \mathbb{R}^+$ so daß für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$

$$\|\widehat{B}\psi\|^2 \leqq a^2\|\widehat{A}\psi\|^2 + b^2\|\psi\|^2 \tag{3.10}$$

gilt. Die Äquivalenz ist schnell zu sehen. Aus (3.10) folgt unmittelbar (3.9) mit $\alpha = a,\ \beta = b$. Umgekehrt folgt (3.10) aus (3.9) mit $a^2 = (1+\varepsilon)\,\alpha^2,\ b^2 = (1+1/\varepsilon)\,\beta$ für jedes $\varepsilon > 0$. Es gibt Fälle, bei denen diese alternative Ungleichung Vorteile hat.

Wesentlich für die Gültigkeit von Satz 3.27 ist die Voraussetzung $\alpha < 1$; in etwas abgeschwächter Form gilt die Aussage jedoch auch für den Fall $\alpha = 1$. Das ist der Inhalt vom

3.28 Theorem von Wüst:[17] *$\widehat{A}$ sei ein selbstadjungierter und $\widehat{B}$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator mit* dom $\widehat{B} \supset$ dom $\widehat{A}$. *Außerdem gebe es eine Zahl $\beta \in \mathbb{R}^+$, sodaß*

$$\| \widehat{B}\,\psi \| \leqq \| \widehat{A}\,\psi \| + \beta\,\|\psi\| \quad \text{für alle } \psi \in \text{dom}\,\widehat{A} \tag{3.11}$$

gilt. Dann ist der Operator $\widehat{A} + \widehat{B}$ wesentlich selbstadjungiert auf dom $\widehat{A}$. *Ist $\widehat{A}$ auf einem Unterraum $\mathcal{U} \subset$* dom $\widehat{A}$ *wesentlich selbstadjungiert, dann ist auch $\widehat{A} + \widehat{B}$ auf $\mathcal{U}$ wesentlich selbstadjungiert.*

Beweis: Sei $\varphi \in \ker[\,(\,\widehat{A} + \widehat{B}\,)^* - i\,]$. Wir zeigen, daß daraus $\varphi = 0$ folgt.
Nach Satz 3.27 ist $\widehat{A} + \lambda\,\widehat{B}$ für jedes $\lambda < 1$ auf dom $\widehat{A}$ selbstadjungiert. Nach Satz 3.20 gibt es folglich Vektoren $\varphi_\lambda \in$ dom $\widehat{A}$ mit $\|\varphi_\lambda\| \leqq \|\varphi\|$ und $(\,\widehat{A} + \lambda\,\widehat{B} + i\,)\,\varphi_\lambda = \varphi$. Nun definieren wir neue Vektoren $\psi_\lambda = \varphi - (\,\lambda - 1\,)\,\widehat{B}\,\varphi_\lambda$ und zeigen, daß deren Norm für $\lambda \nearrow 1$ beschränkt ist. Für die ψ_λ gilt aufgrund der Voraussetzung (3.11)

$$\begin{aligned} \| \widehat{A}\,\varphi_\lambda \| &\leqq \| (\,\widehat{A} + \lambda\,\widehat{B}\,)\,\varphi_\lambda \| + \| \lambda\,\widehat{B}\,\varphi_\lambda \| \\ &\leqq \| (\,\widehat{A} + \lambda\,\widehat{B}\,)\,\varphi_\lambda \| + \lambda\,\| \widehat{A}\,\varphi_\lambda \| + \lambda\,b\,\|\varphi_\lambda\|, \end{aligned}$$

und damit

$$(\,1 - \lambda\,)\,\| \widehat{A}\,\varphi_\lambda \| \leqq \| (\,\widehat{A} + \lambda\,\widehat{B}\,)\,\varphi_\lambda \| + \lambda\,b\,\|\varphi_\lambda\|.$$

Außerdem gilt

$$\| (\,\widehat{A} + \lambda\,\widehat{B}\,)\,\varphi_\lambda \|^2 = \|\varphi\|^2 - \|\varphi_\lambda\|^2;$$

das führt auf

$$(\,1 - \lambda\,)\,\| \widehat{A}\,\varphi_\lambda \| \leqq \sqrt{\|\varphi\|^2 - \|\varphi_\lambda\|^2} + \lambda\,b\,\|\varphi_\lambda\|,$$

und folglich ist $(\,1 - t\,)\,\| \widehat{A}\,\varphi_\lambda \|$ und wegen (3.11) auch $(\,1 - t\,)\,\| \widehat{B}\,\varphi_\lambda \|$ für $\lambda \nearrow 1$ beschränkt. Folglich ist auch $\|\psi_\lambda\|$ für $\lambda \nearrow 1$ beschränkt.
Damit läßt sich nun zeigen, daß $\ker[(\,\widehat{A} + \widehat{B}\,)^* - i\,]$ nur das Nullelement enthält. Für beliebige $\chi \in$ dom $\widehat{A}$ finden wir

$$\lim_{\lambda \nearrow 1} (\,\psi_\lambda - \varphi, \chi\,) = \lim_{\lambda \nearrow 1} (\,1 - \lambda\,)\,(\,\varphi_\lambda, \widehat{B}\,\chi\,) = 0;$$

aufgrund der gleichmäßigen Beschränktheit der $\|\psi_\lambda\|$ konvergiert φ damit schwach gegen $\chi - \lim_{\lambda \nearrow 1} \psi_\lambda$. Dies liefert $(\varphi, \varphi) = \lim_{\lambda \nearrow 1} (\varphi, \psi_\lambda)$. Wegen $(\,\widehat{A}^* + \widehat{B}^* - i\,)\,\varphi = 0$ gilt

$$\begin{aligned} (\psi_\lambda, \varphi) &= (\varphi, \varphi) - \lambda\,(\widehat{B}\,\varphi_\lambda, \varphi) + (\widehat{B}\,\varphi_\lambda, \varphi) = (\varphi, \varphi) - \lambda\,(\widehat{B}\,\varphi_\lambda, \varphi) + (\varphi_\lambda, \widehat{B}^*\,\varphi) \\ &= (\varphi, \varphi) - (\varphi, \varphi) + (\widehat{A}\,\varphi_\lambda, \varphi) + i\,(\varphi_\lambda, \varphi) - (\varphi_\lambda, \widehat{A}^*\varphi) - i\,(\varphi_\lambda, \varphi) = 0, \end{aligned}$$

hieraus ergibt sich $(\varphi, \varphi) = 0$ und damit $\varphi = 0$, so daß $\ker[(\,\widehat{A} + \widehat{B}\,)^* - i\,] = \{0\}$ folgt. Analog schließen wir $\ker[(\,\widehat{A} + \widehat{B}\,)^* + i\,] = \{0\}$. Daher ist $\widehat{A} + \widehat{B}$ auf dom $\widehat{A}$ wesentlich selbstadjungiert. Die wesentliche Selbstadjungiertheit von $\widehat{A} + \widehat{B}$ auf jedem Unterraum $\mathcal{U}$, auf dem das $\widehat{A}$ auch ist, folgt wieder aus dom $(\overline{(\,\widehat{A} + \widehat{B}\,) \restriction \mathcal{U}}) \supset$ dom $(\overline{\widehat{A} \restriction \mathcal{U}})$. □

[17] Zuerst veröffentlicht von Rainer Wüst in [391]; vergleiche auch [392]

(3.10) lehrt, daß die Abschätzung (3.11) im Theorem von Wüst durch die äquivalente Formulierung

$$\| \widehat{B}\,\psi \|^2 \leqq \| \widehat{A}\,\psi \|^2 + b^2 \, \|\psi\|^2$$

ersetzt werden kann, was wiederum äquivalent zu der Operatorungleichung

$$\widehat{B}^{\,2} \leqq \widehat{A}^2 + b^2$$

ist; diese ist gelegentlich besser handhabbar als (3.11). – Eine weitere Verallgemeinerung auf $\alpha > 1$ ist nicht möglich[18].

Bei linearen Operatoren, die sich störungstheoretischen Betrachtungen wie den oben beschriebenen widersetzen, ist es gelegentlich möglich, mit einer Kombination aus dem Kato-Rellich-Theorem und dem Theorem von Wüst zum Erfolg zu kommen. Diese Methode ist unter der Bezeichnung *Konradys Trick* bekannt geworden[19]; sie beweist die Eigenschaft eines Operators $\widehat{A}+\widehat{B}$, auf einer Menge $\mathcal{D}$ selbstadjungiert zu sein, in drei Schritten. Erstens wählt man einen (raffiniert auszusuchenden) Operator $\widehat{C}$ so daß $\widehat{A}+\widehat{C}$ auf $\mathcal{D} \subset \operatorname{dom} \widehat{A} \cap \operatorname{dom} \widehat{C}$ wesentlich selbstadjungiert ist. Zweitens zeigt man, üblicherweise mit dem Kato-Rellich-Theorem, daß $\widehat{A}+\widehat{C}+\widehat{B}$ wesentlich selbstadjungiert auf $\mathcal{D}$ ist. Drittens schließlich beweist man die Aussage $\| \widehat{C}\,\psi \| \leqq \| (\widehat{A}+\widehat{B}) + \widehat{C})\,\psi \| + b\,\|\psi\|$ für ein b und alle $\psi \in \mathcal{D}$. Das Theorem von Wüst garantiert dann, daß $\widehat{A}+\widehat{B} = \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}-\widehat{C}$ wesentlich selbstadjungiert auf $\mathcal{U}$ ist. Beispiele für die Anwendung von Konradys Trick werden in [297] beschrieben.

Wir werden in Band 2 konkrete für die Quantenmechanik relevante Beispiele für diese und die anderen beschriebenen Kriterien betrachten. Viele weitere Kriterien und ausführliches Beispielmaterial dazu findet man in [196] und [297].

3.2.3 Orthogonale Projektoren

Insbesondere für die weiter unten zur Sprache kommende Spektraltheorie spielt eine spezielle Klasse von linearen selbstadjungierten Operatoren eine besondere Rolle. Es handelt sich dabei gleichzeitig um einen Sonderfall der in Abschnitt 2.2.3.4 bereits eingeführten Projektionen. Ein linearer Operator $\widehat{P}$ heißt Projektionsoperator oder kurz Projektor, wenn $\widehat{P}^{\,2} = \widehat{P}$. Nun betrachten wir eine beliebige Zerlegung des Hilbertraumes $\mathcal{H}$ in einen Teilraum und dessen orthogonales Komplement,

$$\mathcal{H} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp} \tag{3.12}$$

Nach Lemma 2.144 läßt sich jedes Element ψ von $\mathcal{H}$ eindeutig in einen Anteil aus $\mathcal{U}$ und einen aus $\mathcal{U}^{\perp}$ zerlegen, das heißt, es gilt $\psi = \psi_1 + \psi_2$ mit eindeutig bestimmten $\psi_1 \in \mathcal{U}$ und $\psi_2 \in \mathcal{U}^{\perp}$. Nun sei $\widehat{P}$ derjenige Operator, der jedem Element von $\mathcal{H}$ dessen eindeutig definierten Anteil aus $\mathcal{U}$ zuordnet, es gelte also $\widehat{P}\,\psi = \psi_1$ und damit auch $\widehat{P}\,\psi_1 = \psi_1$ und $\widehat{P}\,\psi_2 = 0$. Der Operator $\widehat{P}$ ist ein Projektor, denn es gilt

$$\widehat{P}^2\,\psi = \widehat{P}\,(\widehat{P}\,\psi) = \widehat{P}\,\psi_1 = \psi_1 = \widehat{P}\,\psi.$$

[18] In [297] wird das durch einige Gegenbeispiele demonstriert.

[19] Entdeckt wurde sie unabhängig voneinander von Konrady [202] und Schmincke [334].

Natürlich kann man Projektoren auch für $\mathcal{U}^\perp$ und allgemein für jeden Teilraum von $\mathcal{H}$ definieren. Der Projektor $\widehat{P}$ ist durch die Zerlegung (3.12) des Hilbertraumes eindeutig festgelegt. $\mathcal{U}$ heißt Projektionsraum des Projektors $\widehat{P}$. Das führt auf die folgende

3.29 Definition: Ein Projektor $\widehat{P}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt *orthogonaler Projektor*, wenn $\operatorname{ran}\widehat{P} \perp \ker\widehat{P}$ gilt.

Ist $\widehat{P}$ ein orthogonaler Projektor, dann gilt nach Satz 2.140 für alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$\| \widehat{P}\psi \|^2 \leqq \| \widehat{P}\psi \|^2 + \| \psi - \widehat{P}\psi \|^2 = \|\psi\|^2;$$

folglich ist jeder orthogonale Projektor beschränkt mit $\|\widehat{P}\| = 1$. Die Frage, ob ein Projektor orthogonal ist oder nicht, läßt sich durch ein oben bereits angedeutetes Kriterium entscheiden.

3.30 Satz: *Ein Projektor in einem Hilbertraum ist genau dann orthogonal, wenn er selbstadjungiert ist.*

Beweis: „$\Longrightarrow$": $\widehat{P}$ sei ein orthogonaler Projektor auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann gilt für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$

$$(\widehat{P}\psi, \varphi) = (\widehat{P}\psi, \varphi - \widehat{P}\varphi + \widehat{P}\varphi) = (\widehat{P}\psi, \varphi - \widehat{P}\varphi) + (\widehat{P}\psi, \widehat{P}\varphi).$$

Wegen $\widehat{P}\psi \perp (\varphi - \widehat{P}\varphi)$ führt das auf

$$(\widehat{P}\psi, \varphi) = (\widehat{P}\psi, \widehat{P}\varphi) = (\widehat{P}\psi - \psi + \psi, \widehat{P}\varphi) = (\widehat{P}\psi - \psi, \widehat{P}\varphi) + (\psi, \widehat{P}\varphi)$$

und mit $(\widehat{P}\psi - \psi) \perp \widehat{P}\varphi$ weiter auf

$$(\widehat{P}\psi, \varphi) = (\psi, \widehat{P}\varphi),$$

das heißt, $\widehat{P}$ ist symmetrisch. $\widehat{P}$ ist als orthogonaler Projektor außerdem beschränkt, also auch selbstadjungiert.
„$\Longleftarrow$": $\widehat{P}$ sei ein selbstadjungierter Projektor auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann ist gilt für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$

$$(\widehat{P}\psi, \varphi - \widehat{P}\varphi) = (\psi, \widehat{P}\varphi - \widehat{P}^2\varphi) = 0,$$

und wegen $\ker\widehat{P} = \{\varphi - \widehat{P}\varphi \mid \varphi \in \mathcal{H}\}$ folgt daraus $\operatorname{ran}\widehat{P} \perp \ker\widehat{P}$, das heißt, $\widehat{P}$ ist eine orthogonale Projektion. □

Auf der Menge $\mathscr{P}(\mathcal{H})$ der Projektoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ laßt sich durch

$$\widehat{P} \leqq \widehat{Q} \quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{ran}\widehat{P} \subseteqq \operatorname{ran}\widehat{Q} \tag{3.13}$$

für $\widehat{P}, \widehat{Q} \in \mathscr{P}(\mathcal{H})$ eine Halbordnung einführen. Man schreibt außerdem $\widehat{P} \wedge \widehat{Q}$ für den Projektor aus $\mathscr{P}(\mathcal{H})$ mit $\operatorname{ran}\widehat{P} \wedge \widehat{Q} = \operatorname{ran}\widehat{P} \cap \operatorname{ran}\widehat{Q}$ und $\widehat{P} \vee \widehat{Q}$ für den Projektor aus

$\mathscr{P}(\mathcal{H})$ mit $\operatorname{ran}\widehat{P} \vee \widehat{P} = \overline{\operatorname{span}(\operatorname{ran}\widehat{P} \cup \operatorname{ran}\widehat{Q})}$. Damit erhält man für eine Familie $(\widehat{E}_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ von Projektoren aus $\mathscr{P}(\mathcal{H})$ das *Infimum* $\bigwedge_{\gamma<\Gamma}\widehat{P}_\gamma$ als den Projektor aus $\mathscr{P}(\mathcal{H})$ mit

$$\bigwedge_{\gamma<\Gamma}\widehat{P}_\gamma\,\mathcal{H} = \bigcap_{\gamma<\Gamma}\operatorname{ran}\widehat{P}_\gamma \tag{3.14}$$

und das *Supremum* $\bigvee_{\gamma<\Gamma}\widehat{P}_\gamma$ als den Projektor aus $\mathscr{P}(\mathcal{H})$ mit

$$\bigvee_{\gamma<\Gamma}\widehat{P}_\gamma\,\mathcal{H} = \overline{\operatorname{span}\bigcup_{\gamma<\Gamma}\operatorname{ran}\widehat{P}_\gamma}. \tag{3.15}$$

Beschränkt man sich auf orthogonale Projektoren, so wird das Supremum zu einer recht einfachen Sache; das zeigt der folgende

3.31 Satz: *Ist* $(\widehat{P}_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ *eine Familie orthogonaler Projektoren auf einem Hilbertraum, dann gilt* $\bigvee_{\gamma<\Gamma}\widehat{P}_\gamma = \sum_{\gamma<\Gamma}\widehat{P}_\gamma$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\operatorname{ran}\bigvee_{\gamma<\Gamma}\widehat{P}_\gamma = \overline{\operatorname{span}\{\operatorname{ran}\widehat{P}_\gamma \mid \gamma<\Gamma\}} = \sum_{\gamma<\Gamma}\operatorname{ran}\widehat{P}_\gamma$. Damit läßt sich jedes $\psi \in \mathcal{H}$ in eindeutiger Weise in der Form

$$\psi = \varphi + \chi = \sum_{\gamma<\Gamma}\varphi_\gamma + \chi$$

schreiben mit $\chi \in \big(\operatorname{ran}\bigvee_{\gamma<\Gamma}\widehat{P}_\gamma\big)^\perp$ sowie $\varphi \in \operatorname{ran}\bigvee_{\gamma<\Gamma}\widehat{P}_\gamma$ und $\varphi_\gamma \in \operatorname{ran}\widehat{P}_\gamma$ für alle $\gamma<\Gamma$. Es folgt

$$\widehat{P}_\lambda\,\psi = \widehat{P}_\lambda\left(\sum_{\gamma<\Gamma}\varphi_\gamma + \chi\right) = \sum_{\gamma<\Gamma}\widehat{P}_\lambda\,\varphi_\gamma + \widehat{P}_\lambda\,\chi = \sum_{\gamma<\Gamma}\delta_{\gamma\lambda}\,\varphi_\gamma = \varphi_\lambda$$

und damit

$$\bigvee_{\gamma<\Gamma}\widehat{P}_\gamma\,\psi = \varphi = \sum_{\gamma<\Gamma}\varphi_\gamma = \sum_{\gamma<\Gamma}\widehat{P}_\gamma\,\psi. \qquad \square$$

Ähnlich nützlich ist das nächste Resultat, wie wir weiter unten sehen werden[20]. Es gilt nicht nur für orthogonale, sondern für beliebige Projektoren.

3.32 Satz: *Es seien* $\widehat{P}$ *ein Projektor und* $(\widehat{P})_{\gamma<\Gamma}$ *eine Familie von Projektoren, sodaß* $\widehat{P}$ *mit* $\widehat{P}_\gamma$ *für alle* $\gamma<\Gamma$ *vertauschbar ist. Dann gilt* $\widehat{P} \wedge \bigvee_{\gamma<\Gamma}\widehat{P}_\gamma = \bigvee_{\gamma<\Gamma}(\widehat{P}\wedge\widehat{P}_\gamma)$.

Beweis: Gemäß (3.13) gilt $\widehat{P}\wedge\widehat{P}_\gamma \leqq \widehat{P}$ und $\widehat{P}\wedge\widehat{P}_\gamma \leqq \bigvee_{\lambda<\Gamma}\widehat{P}_\lambda$ für alle $\gamma<\Gamma$. Daraus folgt $\bigvee_{\gamma<\Gamma}(\widehat{P}\wedge\widehat{P}_\gamma) \leqq \widehat{P}\wedge\bigvee_{\gamma<\Gamma}\widehat{P}_\gamma$. Nun sei $\psi \in \big(\operatorname{ran}\widehat{P}\wedge\bigvee_{\gamma<\Gamma}\widehat{P}_\gamma\big) \cap \big[\operatorname{ran}\bigvee_{\gamma<\Gamma}(\widehat{P}\wedge\widehat{P}_\gamma)\big]^\perp$. Dann

[20] Siehe Abschnitt 4.4.2.5.

gilt $\bigvee_{\gamma<\Gamma}(\widehat{P}\wedge\widehat{P}_\gamma)\,\psi=0$, damit $\widehat{P}\,\widehat{P}_\gamma\psi=0$ und wegen der vorausgesetzten Vertauschbarkeit $\widehat{P}_\gamma\,\widehat{P}\,\psi=\widehat{P}_\gamma\,\psi=0$ für alle $\gamma<\Gamma$. Folglich gilt $\psi\in(\operatorname{ran}\widehat{P}_\gamma)^\perp$ für alle $\gamma<\Gamma$, das heißt $\psi\in\big(\operatorname{ran}\bigvee_{\gamma<\Gamma}\widehat{P}_\gamma\big)^\perp$. Nach Voraussetzung geht das jedoch nur für $\psi=0$, das heißt, es gilt $\big(\operatorname{ran}\widehat{P}\wedge\bigvee_{\gamma<\Gamma}\widehat{P}_\gamma\big)\cap\big[\operatorname{ran}\bigvee_{\gamma<\Gamma}(\widehat{P}\wedge\widehat{P}_\gamma)\big]^\perp=\{0\}$. Daraus folgt die Behauptung. □

Sind $\widehat{P}_1$ und $\widehat{P}_2$ zwei Projektionsoperatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, so ist die Summe $\widehat{P}_1+\widehat{P}_2$ genau dann ebenfalls ein Projektionsoperator, wenn die beiden Räume, auf die projeziert wird, orthogonal zueinander stehen. Der Projektor $\widehat{P}_1+\widehat{P}_2$ projeziert dann auf den von den beiden Räumen gemeinsam aufgespannten Teilraum $\mathcal{U}_1\oplus\mathcal{U}_2$ von $\mathcal{H}$. Entsprechend ist die Differenz $\widehat{P}_1-\widehat{P}_2$ zweier Projektionsoperatoren zu verstehen, dort gilt obiges allerdings nicht allgemein. Ist der Projektionsraum $\mathcal{U}_2$ jedoch ein Teilraum des Projektionsraumes $\mathcal{U}_1$, dann ist $\widehat{P}_1-\widehat{P}_2$ ebenfalls ein Projektionsoperator und projeziert auf $\mathcal{U}_1\ominus\mathcal{U}_2$, also auf das orthogonale Komplement von $\mathcal{U}_2$ in $\mathcal{U}_1$.

Nun sei $(\varphi_j)_{j\in J}$ ein endliches oder unendliches Orthonormalsystem aus $\mathcal{H}$. Der Operator $\widehat{P}_J$, der durch

$$\widehat{P}_J:=\sum_{j\in J}\varphi_j\,f_{\varphi_j}$$

definiert ist mit $f_\varphi(\psi)=(\psi,\varphi)$ wie in Corollar 2.143, ist der Projektionsoperator auf den Unterraum $\mathcal{U}=\operatorname{span}(\varphi_j)_{j\in J}$ von $\mathcal{H}$, denn für alle $\psi\in\mathcal{H}$ gilt

$$\widehat{P}_J\,\psi=\sum_{j\in J}\varphi_j\,f_{\varphi_j}(\psi)=\sum_{j\in J}\varphi_j\,(\psi,\varphi_j)\in\mathcal{U},\tag{3.16}$$

und für das Quadrat von $\widehat{P}_J$

$$\widehat{P}_J^2=\sum_{i,j\in J}\varphi_i\,f_{\varphi_i}(\varphi_j)\,f_{\varphi_j}=\sum_{i,j\in J}\varphi_i\,(\varphi_j,\varphi_i)\,f_{\varphi_j}=\sum_{i,j\in J}\varphi_i\,\delta_{ji}\,f_{\varphi_j}=\sum_{i,j\in J}\varphi_i\,f_{\varphi_i}=\widehat{P}_J.$$

$\widehat{P}_J$ ist aber auch beschränkt, denn nach Satz 2.140 gilt

$$\|\widehat{P}_J\,\psi\|^2=\Big\|\sum_{j\in J}\varphi_j\,(\psi,\varphi_j)\Big\|^2=\sum_{j\in J}\|\,\varphi_j\,(\psi,\varphi_j)\,\|^2,$$

und da (3.16) nach Satz 2.162 unbedingt konvergiert, folgt nach Lemma 2.159 (i) $\|\widehat{P}_J\|<\infty$. Weiter gilt für alle $\psi,\chi\in\mathcal{H}$

$$\begin{aligned}(\widehat{P}_J\,\psi,\chi)&=\Big(\sum_{j\in J}\varphi_j\,f_{\varphi_j}(\psi),\chi\Big)=\sum_{j\in J}(\psi,\varphi_j)\,(\varphi_j,\chi)\\&=\Big(\psi,\sum_{j\in J}\varphi_j\,f_{\varphi_j}(\chi)\Big)=(\psi,\widehat{P}_J\,\chi),\end{aligned}$$

das heißt, $\widehat{P}_J$ ist symmetrisch und als beschränkter Operator damit selbstadjungiert. Folglich ist $\widehat{P}_J$ ein orthogonaler Projektor. Was wie ein spezielles Beispiel aussieht, ist tatsächlich insbesondere auch für die Quantenmechanik die wichtigste Erscheinungsform, in der orthogonale Projektoren auftreten, und wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß diese Darstellung für jeden orthogonalen Projektor möglich ist.

3.2.4 Kompakte Operatoren

In Abschnitt 2.2.3.5 haben wir gesehen, daß kompakte Abbildungen im Verein der linearen Abbildungen auf Banachräumen von besonderer Bedeutung sind. Das ist für Hilberträume erst recht der Fall. So richtig deutlich wird das erst im nächsten Kapitel; in diesem Abschnitt beschränken wir uns auf ein paar grundlegende Eigenschaften und der Vorstellung besonders wichtiger Spezialfälle.

Wir notieren zunächst ein aus Satz 2.45 folgendes

3.33 Corollar: *Ein linearer Operator $\widehat{A}$ von einem Hilbertraum auf einen zweiten ist genau dann kompakt, wenn der adjungierte Operator $\widehat{A}^*$ kompakt ist.*

Als nächsten beweisen wir eine Eigenschaft, die sich später als nützlich erweisen wird.

3.34 Satz: *$\widehat{A}$ sei ein linearer beschränkter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) $\widehat{A}$ ist kompakt.

(ii) Für je zwei beliebige abzählbare Orthonormalsysteme $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(\widehat{A}\varphi_n,\chi_n)=0$.

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Ist $\overline{\mathrm{K}}_1(0)$ die abgeschlossene Einheitskugel und sind $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei abzählbare Orthonormalsysteme in $\mathcal{H}$, dann ist nach Voraussetzung $\overline{\widehat{A}\,\overline{\mathrm{K}}_1(0)}$ kompakt, und nach Corollar 2.143 gilt $(f_{\chi_n})_{n\in\mathbb{N}}\subset C(\overline{\widehat{A}\,\overline{\mathrm{K}}_1(0)})$. Gemäß Ungleichung 2.161 ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|f_{\chi_n}(\psi)|^2$ für alle $\psi\in\mathcal{H}$ konvergent, folglich konvergiert $(f_{\chi_n})_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen Null. Nach Satz 2.14 ist $(f_{\chi_n})_{n\in\mathbb{N}}$ relativ kompakt, es folgt $\lim\limits_{n\to\infty}f_{\chi_n}=0$ und damit auch $\lim\limits_{n\to\infty}(\widehat{A}\varphi_n,\chi_n)=0$.

„$\Longleftarrow$“: Wäre $\widehat{A}$ nicht kompakt, dann gäbe es ein $\varepsilon>0$ mit $\|\widehat{A}-\widehat{B}\|>\varepsilon$ für jeden kompakten Operator $\widehat{B}$ auf $\mathcal{H}$. Wir zeigen induktiv, daß es dann abzählbare Orthonormalsysteme $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ gibt, für welche die Folge $((\widehat{A}\varphi_n,\chi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist. Für $n=1$ wählen wir $\varphi_1,\chi_1\in\mathcal{H}$ mit $\|\varphi_1\|\,\|\chi_1\|=1$ und $|(\widehat{A}\varphi_1,\chi_1)|>\varepsilon$. Haben wir nun bereits Familien $(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n)$ und $(\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_n)$ in $\mathcal{H}$ mit $\|\varphi_j\|=\|\chi_j\|=1$ und $|(\widehat{A}\varphi_j,\chi_j)|>\varepsilon$ für $j=1,2,\dots,n$ konstruiert, dann sei $\widehat{P}$ die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\operatorname{span}\{\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n\}$ und $\widehat{Q}$ diejenige auf $\operatorname{span}\{\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_n\}$. Diese sind kompakt, damit ist auch der Operator $\widehat{C} = \widehat{A}\,\widehat{P} + \widehat{Q}\,\widehat{A} - \widehat{Q}\,\widehat{A}\,\widehat{P}$ kompakt, und es gilt $\|\,\widehat{A} - \widehat{C}\,\| > \varepsilon$. Damit gibt es ein $\psi \in \mathcal{H} \setminus \operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ und ein $\xi \in \mathcal{H} \setminus \operatorname{span}\{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n\}$ mit

$$|((\,\widehat{A} - \widehat{C}\,)\,\psi, \xi)| > \varepsilon\,\|\psi\|\,\|\xi\|.$$

Setzen wir

$$\varphi_{n+1} = \frac{\psi - \widehat{P}\,\psi}{\|\,\psi - \widehat{P}\,\psi\,\|}, \quad \chi_{n+1} = \frac{\xi - \widehat{Q}\,\psi}{\|\,\xi - \widehat{Q}\,\xi\,\|},$$

so gilt $(\varphi_i, \varphi_j) = (\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, 2, \ldots, n+1$ und

$$\begin{aligned} |(\widehat{A}\,\varphi_{n+1}, \chi_{n+1})| &= \frac{|((\,\widehat{A} - \widehat{A}\,\widehat{P}\,)\,\psi, (1 - \widehat{Q}\,)\,\xi)|}{\|\,\psi - \widehat{P}\,\psi\,\|\,\|\,\xi - \widehat{Q}\,\xi\,\|} = \frac{|((\,\widehat{A} - \widehat{A}\,\widehat{P} - \widehat{Q}\,\widehat{A} + \widehat{Q}\,\widehat{A}\,\widehat{P}\,)\,\psi, \xi)|}{\|\,\psi - \widehat{P}\,\psi\,\|\,\|\,\xi - \widehat{Q}\,\xi\,\|} \\ &= \frac{|((\,\widehat{A} - \widehat{C}\,)\,\psi, \xi)|}{\|\,\psi - \widehat{P}\,\psi\,\|\,\|\,\xi - \widehat{Q}\,\xi\,\|} > \frac{\varepsilon\,\|\psi\|\,\|\xi\|}{\|\,\psi - \widehat{P}\,\psi\,\|\,\|\,\xi - \widehat{Q}\,\xi\,\|} > \varepsilon. \end{aligned}$$

Setzen wir dieses Verfahren unbegrenzt fort, erhalten wir Orthomormalsysteme $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $|(\widehat{A}\,\varphi_n, \chi_n)| > \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Unter den kompakten Hilbertraum-Operatoren gibt es wichtige Sonderfälle, und um diese zu charakterisieren, verwenden wir wieder die in Corollar 2.143 eingeführten Funktionale f_ψ, die durch $f_\psi(\varphi) := (\varphi, \psi)$ definiert sind. Wir betrachten zunächst eine spezielle Reihenentwicklung von Operatoren.

3.35 Satz: *$(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien abzählbare Orthonormalsysteme in den Hilberträumen $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$, außerdem sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine positive reelle Nullfolge. Dann wird durch*

$$\widehat{A} := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\chi_n\,f_{\varphi_n} \tag{3.17}$$

ein kompakter Operator von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{G}$ definiert.

Beweis: Es seien $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathcal{H}$ und $(\psi_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit $\lim\limits_{j \to \infty} \psi_{n_j} = \psi \in \mathcal{H}$. Wegen

$$\widehat{A}\,\psi_{n_j} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(\psi_{n_j}, \varphi_n)\,\chi_n$$

und $\lim\limits_{j \to \infty} (\psi_{n_j}, \varphi_n) = (\psi, \varphi_n)$ folgt

$$\lim_{j \to \infty} \widehat{A}\,\psi_{n_j} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lim_{j \to \infty} (\psi_{n_j}, \varphi_n)\,\chi_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(\psi, \varphi_n)\,\chi_n = \widehat{A}\,\psi,$$

das heißt, die Folge $(\widehat{A}\,\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge. Damit ist $\widehat{A}$ kompakt.

Betrachte nun die monoton fallende Nullfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \sup_{j\geqq n} |a_n|$ und für alle $n\in\mathbb{N}$ die Operatoren

$$\widehat{A}_n = \sum_{j=0}^{n} a_j\,\chi_j\,f_{\varphi_j}.$$

Hierfür gilt nach Satz 2.140

$$\begin{aligned}\|\,\widehat{A}\psi - \widehat{A}_n\psi\,\|^2 &= \left\|\sum_{j=0}^{\infty} a_j\,(\psi,\varphi_j)\,\chi_j - \sum_{j=0}^{n} a_j\,(\psi,\varphi_j)\,\chi_j\right\|^2\\ &= \left\|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j\,(\psi,\varphi_j)\,\chi_j\right\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j|^2\,|(\psi,\varphi_j)|^2 \leqq b_{n+1}^2\,\|\psi\|^2\end{aligned}$$

für alle $\psi\in\mathcal{H}$. Daraus folgt $\lim_{n\to\infty}\|\,\widehat{A}-\widehat{A}_n\,\| = 0$. □

Wie wir in Abschnitt 4.4.1.2 sehen werden, ist die Darstellung (3.17) in der Tat für *jeden* kompakten Operator auf einem Hilbertraum möglich. Eine weitere Differenzierung liefert die nächste

3.36 Definition: $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ seien Hilberträume und $\widehat{A}$ sei ein linearer Operator von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{G}$, der in der Gestalt

$$\widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\chi_n\,f_{\varphi_n} \tag{3.18}$$

dartstellbar ist, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine positive reelle monoton fallende Nullfolge ist und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abzählbare Orthonormalsysteme in $\mathcal{H}$ beziehungsweise in $\mathcal{G}$ sind. Außerdem sei $0<p<\infty$.

(i) $\widehat{A}$ gehört zur *p-ten Schatten-Klasse* $\mathscr{S}_p(\mathcal{H},\mathcal{G})$[21], wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^p$.

(ii) $\widehat{A}$ heißt *Hilbert-Schmidt-Operator*[22], wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$.

(iii) $\widehat{A}$ heißt *nuklearer Operator*, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^1$.

Die Darstellung der Form (3.18) heißt *Schmidt-Darstellung* des betrachteten Operators[23]. Die Zahlen a_n nennt man auch die *singulären Werte* und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die *singuläre Folge* des Operators $\widehat{A}$. Alle Schatten-Klassen sind echte Unterräume von $\mathscr{C}(\mathcal{H},\mathcal{G})$. Wir setzen ausserdem $\mathscr{C}(\mathcal{H},\mathcal{G}) = \mathscr{S}_\infty(\mathcal{H},\mathcal{G})$, was sich ebenfalls in Abschnitt 4.4.1.2 rechtfertigen läßt. Nach Satz 2.111 gilt dann $\mathscr{S}_p(\mathcal{H},\mathcal{G})\subset\mathscr{S}_q(\mathcal{H},\mathcal{G})$ für alle $0<p<q\leqq\infty$. Statt $\mathscr{S}_p(\mathcal{H},\mathcal{H})$ schreiben wir $\mathscr{S}_p(\mathcal{H})$. Hilbert-Schmidt-Operatoren sind genau die Elemente der zweiten Schatten-Klasse $\mathscr{S}_2(\mathcal{H},\mathcal{G})$ und nukleare Operatoren diejenigen der ersten Schatten-Klasse $\mathscr{S}_1(\mathcal{H},\mathcal{G})$. Die Elemente der Mengen $\mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ heißen *Spurklasse-Operatoren*, aus Gründen, auf die wir zurückkommen werden.

[21] Nach Robert Schatten, vergleiche [324] und [325].
[22] Auch dieser Begriff taucht in [333] erstmals auf.
[23] Benannt nach ihrem Entdecker Erhard Schmidt, der sie in [333] vorstellte.

Die Schatten-Klassen-Eigenschaft eines Operators überträgt sich auf dessen adjungierten Operator; genauergesagt gilt das folgende

3.37 Lemma: *Es seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ Hilberträume und $0 < p < \infty$, außerdem sei $\widehat{A} \in \mathscr{S}_p(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Dann ist $\widehat{A}^* \in \mathscr{S}_p(\mathcal{G}, \mathcal{H})$.*

Beweis: Aus $\widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n f_{\varphi_n}$ erhält man $\widehat{A}^* = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n f_{\chi_n}$ und damit die Schmidt-Darstellung von $\widehat{A}^*$ mit der singulären Folge von $\widehat{A}$. □

Operatoren der Schatten-Klassen und insbesondere Hilbert-Schmidt-Operatoren und nukleare Operatoren werden im nächsten Kapitel erneut zur Sprache kommen.

3.2.5 Unitäre Operatoren

Eine weitere spezielle Klasse linearer Operatoren erhält man, wenn man die bei den selbstadjungierten Operatoren auftretende Bedingung $\widehat{A}^* = \widehat{A}$ durch die dazu umgekehrte Forderung $\widehat{A}^* = \widehat{A}^{-1}$ ersetzt. Das führt auf folgende

3.38 Definition: Ein beschränkter linearer Operator $\widehat{U}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt *unitär*[24], wenn $\widehat{U}^*\widehat{U} = \widehat{U}\,\widehat{U}^* = \mathbf{1}$.

Jeder unitäre Operator $\widehat{U}$ ist definitionsgemäß invertierbar mit $\widehat{U}^{-1} = \widehat{U}^*$ und außerdem normal, wobei die Umkehrung natürlich jeweils nicht gilt. Eine weitere Eigenschaft folgt ebenfalls unmittelbar aus Definition 3.38.

3.39 Satz: *Für jeden unitären Operator $\widehat{U}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ gilt $\operatorname{dom}\widehat{U} = \mathcal{H}$ und $\operatorname{ran}\widehat{U} = \mathcal{H}$.*

Beweis: Die erste Relation folgt aus $\widehat{U}^*\widehat{U} = \mathbf{1}$ und $\operatorname{dom}\mathbf{1} = \mathcal{H}$. Die zweite ist äquivalent zur Forderung, daß für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ ein $\varphi \in \mathcal{H}$ existiert mit $\widehat{U}\varphi = \psi$. Ein solches erhält man mit $\varphi = \widehat{U}^*\psi$, denn wegen $\widehat{U}\,\widehat{U}^* = \mathbf{1}$ gilt $\widehat{U}\,\widehat{U}^*\psi = \psi$. □

Der Begriff der unitären Operatoren verallgemeinert denjenigen der orthogonalen Operatoren von reellen auf komplexe Vektorräume. Folglich lassen sich unitäre Operatoren geometrisch als *Drehungen* interpretieren, das heißt als längen- und winkeltreue Abbildungen. Ihre Bedeutung liegt dementsprechend unter anderem in ihrem Verhalten im Zusammenhang mit Skalarprodukten[25]. Das nächste Resultat ist eine präzise Formulierung dieses Verhaltens.

3.40 Satz: *Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\widehat{U}$ ein linearer, beschränkter, surjektiver Operator auf $\mathcal{H}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\widehat{U}$ ist unitär.

[24] Die Bezeichnung stammt von L. Antonne [12]; im heutigen Sinn eingeführt wurden unitäre Operatoren von I. Schur [335].

[25] Womit sich ihr namensgebender Einfluß auf die Klasse der unitären Vektorräume erklärt.

(ii) $\widehat{U}$ *ist eine Isometrie.*

(iii) Für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ *gilt* $(\widehat{U}\,\psi, \widehat{U}\,\varphi) = (\psi, \varphi)$.

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii): Aus der Unitarität von $\widehat{U}$ folgt für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}\|\,\widehat{U}\,\psi - \widehat{U}\,\varphi\,\| &= \|\,\widehat{U}\,(\,\psi - \varphi\,)\,\| = (\widehat{U}\,(\,\psi - \varphi\,), \widehat{U}\,(\,\psi - \varphi\,))\\ &= (\,\psi - \varphi, \widehat{U}^*\,\widehat{U}\,(\,\psi - \varphi\,)) = (\,\psi - \varphi, \mathbf{1}\,(\,\psi - \varphi\,))\\ &= (\,\psi - \varphi, \psi - \varphi) = \|\,\psi - \varphi\,\|.\end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Aus der Isometrie-Eigenschaft von $\widehat{U}$ und Satz 2.136 folgt für alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}(\widehat{U}\,\psi, \widehat{U}\,\varphi) &= \left\|\frac{\widehat{U}\,\psi + \widehat{U}\,\varphi}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{\widehat{U}\,\psi - \widehat{U}\,\varphi}{2}\right\|^2 + i\left\|\frac{\widehat{U}\,\psi + i\,\widehat{U}\,\varphi}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{\widehat{U}\,\psi - i\,\widehat{U}\,\varphi}{2}\right\|^2\\ &= \left\|\frac{\widehat{U}\,(\,\psi + \varphi\,)}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{\widehat{U}\,(\,\psi - \varphi\,)}{2}\right\|^2 + i\left\|\frac{\widehat{U}\,(\,\psi + i\,\varphi\,)}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{\widehat{U}\,(\,\psi - i\,\varphi\,)}{2}\right\|^2\\ &= \left\|\frac{\psi + \varphi}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{\psi - \varphi}{2}\right\|^2 + i\left\|\frac{\psi + i\,\varphi}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{\psi - i\,\varphi}{2}\right\|^2 = (\psi, \varphi).\end{aligned}$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Aus der Invarianz des Skalarprodukts folgt $(\widehat{U}^*\widehat{U}\,\psi, \varphi) = (\psi, \varphi)$ sowie $(\psi, \widehat{U}^*\widehat{U}\,\varphi) = (\widehat{U}\,\widehat{U}^*\psi, \varphi) = (\psi, \varphi)$ für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$, also gilt $\widehat{U}^*\widehat{U} = \widehat{U}\,\widehat{U}^* = \mathbf{1}$. □

Ein unitärer Operator $\widehat{U}$ ist also stets isometrisch, nicht aber umgekehrt. Denn für die Eigenschaft der Isometrie genügt bereits $\widehat{U}^*\widehat{U} = \mathbf{1}$, während für diejenige der Unitarität zusätzlich auch $\widehat{U}\,\widehat{U}^* = \mathbf{1}$ zu fordern ist. Ein isometrischer Operator ist daher nur dann unitär, wenn sein Definitionsbereich *und* sein Wertebereich ganz $\mathcal{H}$ ist.

Besonders wichtig ist bei Satz 3.40 Eigenschaft (iii), wonach Skalarprodukte invariant unter unitären Transformationen sind. Dieser Sachverhalt paßt ebenso zu der oben erwähnten Analogie der Drehungen wie das folgende

3.41 Lemma: *Ist* $\mathcal{H}$ *ein Hilbertraum, dann gibt es zu je zwei Orthonormalbasen* $(\varphi_\gamma)_{\gamma < \Gamma}$ *und* $(\chi_\gamma)_{\gamma < \Gamma}$ *von* $\mathcal{H}$ *stets einen unitären Operator* $\widehat{U}$ *auf* $\mathcal{H}$*, sodaß* $\chi_\gamma = \widehat{U}\,\varphi_\gamma$ *gilt für alle* $\gamma < \Gamma$.

Beweis: Sei $\widehat{U} = \sum\limits_{\lambda < \Gamma} \chi_\lambda\, f_{\varphi_\lambda}$, dann ist nach Corollar 2.164

$$\begin{aligned}\widehat{U}^*\widehat{U}\,\psi &= \sum_{\lambda < \Gamma} (\varphi_\lambda, \widehat{U}^*\psi)\,\chi_\lambda = \sum_{\lambda < \Gamma} (\widehat{U}\,\varphi_\lambda, \psi)\,\chi_\lambda\\ &= \sum_{\lambda < \Gamma}\sum_{\eta < \Gamma} (\varphi_\eta, \chi_\lambda)\,(\psi, \varphi_\eta)\,\chi_\lambda = \sum_{\lambda < \Gamma} (\chi_\lambda, \psi)\,\chi_\lambda = \psi\end{aligned}$$

sowie analog

$$\widehat{U}\,\widehat{U}^*\psi = \psi$$

für alle $\psi \in \mathcal{H}$, das heißt, $\widehat{U}$ ist unitär. Damit gilt für alle $\gamma < \Gamma$

$$\widehat{U}\,\varphi_\gamma = \sum_{\lambda<\Gamma} (\varphi_\gamma, \varphi_\lambda)\,\chi_\lambda = \sum_{\lambda<\Gamma} \delta_{\gamma\lambda}\,\chi_\lambda = \chi_\gamma. \qquad \square$$

Weitere Eigenschaften unitärer Operatoren sind direkt erkennbar. So folgt beispielsweise aus Definition 3.38, daß jeder unitäre Operator auch normal ist; die umgekehrte Aussage ist natürlich im allgemeinen nicht zutreffend. Satz 3.40 (ii) oder (iii) liefert

$$\|\,\widehat{U}\,\psi\,\| = \|\psi\|$$

für alle $\psi \in \mathcal{H}$ und somit

$$\|\widehat{U}\| = 1.$$

Isometrische und unitäre Operatoren sind damit grundsätzlich beschränkt. Unitäre Operatoren lassen sich verketten, ohne daß dabei die Unitarität verloren geht: Sind $\widehat{U}_1$ und $\widehat{U}_2$ unitär, so auch $\widehat{U}_3 = \widehat{U}_2\,\widehat{U}_1$, denn es gilt

$$\widehat{U}_3^*\,\widehat{U}_3 = (\widehat{U}_2\,\widehat{U}_1)^*\,\widehat{U}_2\,\widehat{U}_1 = \widehat{U}_1^*\,\widehat{U}_2^*\,\widehat{U}_2\,\widehat{U}_1 = \mathbf{1}$$

und analog auch

$$\widehat{U}_3\,\widehat{U}_3^* = \mathbf{1}.$$

Isometrische und unitäre Operatoren spielen außerdem eine wesentliche Rolle bei einem weiteren wichtigen Verfahren zur Überprüfung symmetrischer Operatoren auf Selbstadjungiertheit. Dazu brauchen wir den folgenden Begriff.

3.42 Definition: $\widehat{A}$ sei ein linearer Operator auf einem Hilbertraum. Der Operator $\widehat{V}_{\widehat{A}} := (\,\widehat{A} - i\,)\,(\,\widehat{A} + i\,)^{-1}$ heißt *Cayley-Transformierte*[26] von $\widehat{A}$.

Der nächste Hilfssatz informiert darüber, für welche Operatoren die Cayley-Transformierte garantiert existiert und welche speziellen Eigenschaften sie dann aufweist.

3.43 Satz: *Für jeden komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist die Cayley-Transformation eine bijektive Abbildung von der Menge der symmetrischen Operatoren $\widehat{A}$ auf $\mathcal{H}$ auf die Menge der isometrischen Operatoren $\widehat{V}$ auf $\mathcal{H}$, für die* $\operatorname{ran}(\,\widehat{V} - 1\,)$ *dicht in $\mathcal{H}$ ist.*

Beweis: Nach Definition 3.42 gilt $\operatorname{dom}\widehat{A} = \operatorname{ran}(\,\widehat{A} + i\,)$. Ist nun $\widehat{A}$ ein beliebiger symmetrischer Operator auf $\mathcal{H}$, dann gilt für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$

$$\|\,(\,\widehat{A} + i\,)\,\psi\,\|^2 = \|\,\widehat{A}\psi + i\,\psi\,\|^2 = (\widehat{A}\,\psi + i\,\psi, \widehat{A}\,\psi + i\,\psi)$$

[26] Benannt nach Arthur Cayley, der einen ähnlichen Begriff für Abbildungen zwischen Matrizen einführte [53]. Die analoge, durch $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ definierte Abbildung wird ebenfalls als Caley-Transformation bezeichnet. Sie bildet die obere Halbebene von $\mathbb{C}$ konform und bijektiv auf die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ ab.

$$= \| \widehat{A}\psi \|^2 + \|\psi\|^2 + (\widehat{A}\psi, i\psi) + (i\psi, \widehat{A}\psi)$$
$$= \| \widehat{A}\psi \|^2 + \|\psi\|^2 - i(\widehat{A}\psi, \psi) + i(\widehat{A}\psi, \widehat{A}\psi) = \| \widehat{A}\psi \|^2 + \|\psi\|^2$$

und folglich auch

$$\| \widehat{V}_{\widehat{A}}(\widehat{A}+i)\psi \| = \| (\widehat{A}-i)\psi \| = \| (\widehat{A}+i)\psi \|.$$

das heißt, $\widehat{V}_{\widehat{A}}$ ist isometrisch. Außerdem gilt

$$\widehat{V}_{\widehat{A}} - 1 = (\widehat{A} - i - \widehat{A} - i)(\widehat{A}+i)^{-1} = -2i(\widehat{A}+i)^{-1}, \tag{3.19}$$

sowie

$$\widehat{V}_{\widehat{A}} + 1 = (\widehat{A} - i + \widehat{A} + i)(\widehat{A}+i)^{-1} = 2\widehat{A}(\widehat{A}+i)^{-1}. \tag{3.20}$$

Aus (3.19) folgt $\operatorname{ran}(\widehat{V}_{\widehat{A}} - 1) = \operatorname{dom}\widehat{A}$, das heißt, $\operatorname{ran}(\widehat{V}_{\widehat{A}} - 1)$ ist dicht in $\mathcal{H}$. (3.19) und (3.20) gemeinsam liefern

$$\widehat{A} = i(\widehat{V}_{\widehat{A}} + 1)(\widehat{V}_{\widehat{A}} - 1)^{-1}. \tag{3.21}$$

Ist andererseits $\widehat{V}$ ein isometrischer Operator, für den $\operatorname{ran}\widehat{V}$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, dann gilt für alle $\varphi \in \operatorname{dom}\widehat{V}$

$$((\widehat{V}+1)\varphi, (\widehat{V}-1)\varphi) = (\widehat{V}\varphi, \widehat{V}\varphi) - (\widehat{V}\varphi, \varphi) + (\varphi, \widehat{V}\varphi) - (\varphi, \varphi)$$
$$= -(\widehat{V}\varphi, \varphi) + \overline{(\widehat{V}\varphi, \varphi)} = -2\,\mathfrak{Im}(\widehat{V}\varphi, \varphi).$$

und analog

$$((\widehat{V}-1)\varphi, (\widehat{V}+1)\varphi) = 2\,\mathfrak{Im}(\widehat{V}\varphi, \varphi).$$

Für alle $\psi \in \operatorname{ran}(\widehat{V}-1) = \operatorname{dom}\widehat{A}$ folgt mit (3.21)

$$(\widehat{A}\psi, \psi) = (\widehat{A}(\widehat{V}-1)\varphi,\ (\widehat{V}-1)\varphi) = i((\widehat{V}+1)\varphi, (\widehat{V}-1)\varphi)$$
$$= -i((\widehat{V}-1)\varphi, (\widehat{V}+1)\varphi) = ((\widehat{V}-1)\varphi,\ \widehat{A}(\widehat{V}-1)\varphi) = (\psi, \widehat{A}\psi),$$

das heißt, $\widehat{A}$ ist symmetrisch. Ebenfalls aus (3.21) folgt

$$\widehat{A} + i\widehat{V} = i(\widehat{V} + 1 + \widehat{V} - 1)(\widehat{V}-1)^{-1} = 2i\widehat{V}(\widehat{V}-1)^{-1}$$

sowie

$$\widehat{A} - i\widehat{V} = i(\widehat{V} + 1 - \widehat{V} + 1)(\widehat{V}-1)^{-1} = 2i(\widehat{V}-1)^{-1}$$

und damit

$$\widehat{V} = (\widehat{A} - i)(\widehat{A}+i)^{-1}.$$ □

Als Nebenprodukt erhält man aus obigem Satz das folgende

3.44 Corollar: *Ist $\widehat{V}$ die Cayley-Transformierte eines symmetrischen Operators auf einem komplexen Hilbertraum, dann ist $\widehat{V} - 1$ injektiv.*

Beweis: Gilt $(\widehat{V}-1)\,\varphi = 0$, dann folgt für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{V}$

$$(\varphi, (\widehat{V}-1)\,\psi) = (\varphi, \widehat{V}\,\psi) - (\varphi,\psi) = (\widehat{V}\,\varphi, \widehat{V}\,\psi) - (\varphi,\psi) = (\varphi,\psi) - (\varphi,\psi) = 0,$$

also ist $\varphi \in \operatorname{ran}(\widehat{V}-1)^{\perp}$. Nach Satz 3.43 gilt $\operatorname{ran}(\widehat{V}-1)^{\perp} = \{0\}$ und damit $\varphi = 0$. □

Das angekündigte Kriterium für Selbstadjungiertheit ergibt sich nun sehr einfach als weiteres

3.45 Corollar: *Die Cayley-Transformierte eines symmetrischen Operators $\widehat{A}$ auf einem komplexen Hilbertraum ist genau dann unitär, wenn $\widehat{A}$ selbstadjungiert ist*[27].

Beweis: „$\Longrightarrow$": $\widehat{A}$ sei ein symmetrischer Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dessen Cayley-Transformierte $\widehat{V}_{\widehat{A}}$ ist eine Abbildung von $\operatorname{ran}(\widehat{A}+i)$ nach $\operatorname{ran}(\widehat{A}-i)$. Ist $\widehat{V}_{\widehat{A}}$ unitär, dann gilt nach Satz 3.39 $\operatorname{ran}(\widehat{A}-i) = \mathcal{H}$, und nach Satz 3.20 ist damit $\widehat{A}$ selbstadjungiert.
„$\Longleftarrow$": Ist $\widehat{A}$ selbstadjungiert, dann gilt nach Satz 3.20 $\operatorname{ran}(\widehat{A}\pm i) = \mathcal{H}$, also $\operatorname{ran}\widehat{V}_{\widehat{A}} = \mathcal{H}$. Nach Satz 3.43 ist $\widehat{V}_{\widehat{A}}$ isometrisch und somit auch unitär. □

Dieses Resultat beschreibt einen Sonderfall von Satz 3.43; zieht man dieselbe Folgerung für den allgemeinen Fall, erhält man die Aussage, daß das Aufsuchen einer selbstadjungierten Erweiterung des symmetrischen Operators $\widehat{A}$ äquivalent zum Aufsuchen einer unitären Erweiterung der zugehörigen Cayley-Transformierten $\widehat{V}_{\widehat{A}}$ ist.

Unitäre Operatoren weisen noch eine Reihe weiterer besonderer, für unsere Zwecke interessanter Eigenschaften auf, für deren Diskussion jedoch Begriffe aus dem nächsten Kapitel erforderlich sind. Angesichts der Bedeutung dieser Thematik ist uns das dort einen eigenen Abschnitt wert.

[27] Dieser Satz wurde durch J. von Neumann entdeckt [268].

Kapitel 4

Ein wenig Spektraltheorie

Ein großer Teil der Quantenmechanik beschäftigt sich mit den Spektren spezieller selbstadjungierter Operatoren. Der Eindruck, die zugehörige Teildisziplin der Funktionalanalysis heiße *Spektraltheorie*, weil sich das dann auf die Beschreibung von Spektren quantenmechanischer Systeme anwenden ließe, täuscht jedoch, denn die Bezeichnung „Spektrum" wurde bereits 1912 von Hilbert eingeführt, im übrigen, ohne daß dieser dafür eine nähere Begründung lieferte[1]. In der Tat ist es schon ein ziemlich verblüffender Zufall, daß sich die zunächst völlig unabhängig voneinander existierende mathematische und physikalische Variante dieser Bezeichnung später als unmittelbar zusammenhängend erweisen sollte, wovon 1912 noch niemand auch nur die Spur einer Ahnung haben konnte. In jedem Fall ist das Grund genug, der Spektraltheorie ein komplettes eigenes Kapitel zu widmen. Dabei werden zunächst beschränkte Abbildungen auf Banachräumen im Blickpunkt stehen; anschließend werden wir mit der Spezialisierung auf Hilberträume unbeschränkte Operatoren in den Mittelpunkt rücken. Soweit nicht anders gesagt betrachten wir in diesem Kapitel stets komplexe Vektorräume.

4.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Wir beginnen gleich mit einem zentralen, aber später zu verallgemeinernden Begriff, was auch an dessen Herkunft aus der elementaren linearen Algebra erkennbar ist.

4.1 Definition: $\mathcal{A}$ sei eine Abbildung auf einem Vektorraum $\mathcal{V}$, außerdem $x \in \mathcal{V}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.
(i) Gilt

$$\mathcal{A}\, x = \lambda\, x, \tag{4.1}$$

dann heißt x *Eigenvektor* der Abbildung $\mathcal{A}$ zum *Eigenwert* λ. Wenn es zu einem Eigenwert g linear unabhängige Eigenvektoren gibt, dann heißt der von diesen aufgespannte g-dimensionalen Unterraum von $\mathcal{V}$ *Eigenraum* von λ, und g heißt die *geometrische Vielfachheit* von λ.

---

[1] Hilbert entwickelte seine Theorie für den Spezialfall beschränkter symmetrischer Operatoren [150] - [156]. Die Erweiterung auf unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren wurde durch Riesz [311] sowie insbesondere und unabhängig voneinander durch von Neumann [267], [268], [269] und Stone [361] bewerkstelligt. Eine noch weitergehende Verallgemeinerung der Spektraltheorie auf Banachräume stammt von Dunford [74] - [77].

(ii) Gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodaß

$$(\mathcal{A} - \lambda)^n x = 0 \tag{4.2}$$

gilt, dann heißt x *Hauptvektor* von $\mathcal{A}$ zum Eigenwert λ. Die kleinste Zahl n, für die (4.2) gilt, heißt *algebraische Vielfachheit* von λ. Gibt es kein solches n, dann hat λ die algebraische Vielfachheit ∞.

Die Gleichung (4.1) heißt *Eigenwertgleichung* zur Abbildung $\mathcal{A}$. Eine anschauliche Deutung ist dabei offensichtlich: Während die Wirkung linearer Abbildungen auf einen Vektor in einem Banachraum im allgemeinen Fall aus einer Drehung[2] *und* einer Streckung oder Stauchung dieses Vektors besteht, findet bei einem Eigenvektor der betrachteten Abbildung *nur* eine Streckung oder Stauchung ohne gleichzeitige Drehung statt.

Ist x Eigenvektor beziehungsweise Hauptvektor einer linearen Abbildung $\mathcal{A}$ zum Eigenwert λ, dann ist auch jedes Vielfache $b\,x$ Eigenvektor beziehungsweise Hauptvektor zum selben Eigenwert λ. Ist λ ein Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit g, dann heißt der Eigenwert auch *g-fach entartet*. g kann endlich oder unendlich sein. Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts λ ist stets kleiner oder gleichgroß wie dessen algebraische Vielfachheit. Aus der Eigenwertgleichung (4.1) folgt für Potenzen von $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}^n x = \lambda^n x$$

und weiter für über Potenzreihen definierte operatorwertige Funktionen

$$F(\mathcal{A})\,x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\,\mathcal{A}^n x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\,\lambda^n x = F(\lambda)\,x.$$

Das bedeutet: Ist x Eigenvektor zu $\mathcal{A}$ mit Eigenwert λ, so auch Eigenvektor zu $\mathcal{A}^n$ mit Eigenwert λ^n und allgemein Eigenvektor zu $F(\mathcal{A})$ mit Eigenwert $F(\lambda)$.

4.2 Die Resolvente

Die eben diskutierten Begriffe *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* sind für die Quantenmechanik bekanntlich von zentraler Bedeutung; eine mathematisch strenge Diskussion solcher Zusammenhänge macht jedoch auf jeden Fall eine Verallgemeinerung der beiden Begriffe erforderlich. Wir werden dies in zwei Schritten tun und in diesem Abschnitt den ersten davon vornehmen.

4.2.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Die Eigenwertgleichung $\mathcal{A}\,x = \lambda\,x$ einer Abbildung $\mathcal{A}$ kann ersichtlicherweise auch in der Form

$$(\mathcal{A} - \lambda)\,x = 0$$

[2] Dieser Begriff ist in Banachräumen, wo keine Winkel definiert sind, natürlich im übertragenen Sinne zu verstehen.

geschrieben werden. Daraus folgt im Unkehrschluß, daß die Abbildung $\mathcal{A} - \lambda$ für diejenigen komplexen Zahlen λ, die nicht Eigenwerte von $\mathcal{A}$ sind, eine Umkehrabbildung besitzt. Diese kann jedoch unterschiedliche Eigenschaften haben; insbesondere muß sie nicht automatisch beschränkt sein. Genau diesen Sachverhalt nimmt man zum Anlaß, um die folgenden zentralen Begriffe einzuführen.

4.2 Definition: $\mathcal{A}$ sei eine Abbildung auf einem komplexen Banachraum $\mathcal{E}$.

(i) Die Abbildung

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\lambda) := (\,\mathcal{A} - \lambda\,)^{-1}$$

heißt *Resolvente von $\mathcal{A}$ an der Stelle* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(ii) Die Menge aller komplexen Zahlen λ, für welche die Resolvente von $\mathcal{A}$ existiert und beschränkt und auf ganz $\mathcal{E}$ definiert ist, heißt *Resolventenmenge* $\rho(\mathcal{A})$ von $\mathcal{A}$.

(iii) Die Menge

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$$

heißt *Spektrum* von $\mathcal{A}$.

Die Elemente von $\rho(\mathcal{A})$ heißen *reguläre Punkte* der Abbildung $\mathcal{A}$. Die Elemente von $\sigma(\mathcal{A})$ heißen entsprechend *singuläre Punkte* von $\mathcal{A}$; wir werden sie im übernächsten und einigen darauffolgenden Abschnitten sehr ausführlich diskutieren; hier halten wir zunächst nur den folgenden, ziemlich offensichtlichen Sachverhalt fest.

4.3 Satz: *Alle Eigenwerte einer Abbildung $\mathcal{A}$ sind Elemente des Spektrums von $\mathcal{A}$.*

Beweis: Aus $\mathcal{A}\,x = \lambda\,x$ folgt $(\,\mathcal{A} - \lambda\,)\,x = 0$. Für $x \neq 0$ und $\lambda \neq 0$ ist $\mathcal{A} - \lambda$ damit nicht invertierbar. □

Aus der Definition folgt direkt die Stetigkeit der Abbildung $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} : \rho(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}$. Resolventen erfüllen außerdem zwei wichtige Gleichungen; diese sind Gegenstand vom nächsten

4.4 Lemma: (i) *Ist $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung auf dem komplexen Banachraum $\mathcal{E}$, dann gilt für alle $\zeta, \xi \in \rho(\mathcal{A})$*

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta) - \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\xi) = (\,\zeta - \xi\,)\,\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\,\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\xi).$$

(Erste Resolventengleichung).

(ii) Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei abgeschlossene Operaoten auf $\mathcal{E}$, dann gilt für alle $\zeta \in \rho(\mathcal{A}) \cap \rho(\mathcal{B})$

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta) - \mathcal{R}_{\mathcal{B}}(\zeta) = \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\,(\,\mathcal{B} - \mathcal{A}\,)\,\mathcal{R}_{\mathcal{B}}(\zeta) = \mathcal{R}_{\mathcal{B}}(\zeta)\,(\,\mathcal{B} - \mathcal{A}\,)\,\mathcal{R}_{\mathcal{B}}(\zeta).$$

(Zweite Resolventengleichung)

Beweis: (i) Aus Definition 4.2 ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta) &= \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\,(\,\mathcal{A} - \xi\,)\,\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\xi)\\ &= \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\,[\,\mathcal{A} - \zeta + (\,\zeta - \xi\,)\,]\,\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\xi) = \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\xi) + (\,\zeta - \xi\,)\,\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\,\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\xi).\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.
(ii) Ebenfalls aus Definition 4.2 erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)-\mathcal{R}_{\mathcal{B}}(\zeta)&=(\mathcal{A}-\zeta)^{-1}-(\mathcal{B}-\zeta)^{-1}\\&=(\mathcal{A}-\zeta)^{-1}(\mathcal{B}-\zeta)(\mathcal{B}-\zeta)^{-1}-(\mathcal{A}-\zeta)^{-1}(\mathcal{A}-\zeta)(\mathcal{B}-\zeta)^{-1}\\&=(\mathcal{A}-\zeta)^{-1}(\mathcal{B}-\zeta-\mathcal{A}+\zeta)(\mathcal{B}-\zeta)^{-1}=\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathcal{R}_{\mathcal{B}}(\zeta)\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)-\mathcal{R}_{\mathcal{B}}(\zeta)&=(\mathcal{B}-\zeta)^{-1}(\mathcal{B}-\zeta-\mathcal{A}+\zeta)(\mathcal{A}-\zeta)^{-1}\\&=\mathcal{R}_{\mathcal{B}}(\zeta)(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta).\end{aligned}$$ □

Als Folgerung aus Lemma 4.4 (i) ergibt sich unmittelbar die Vertauschbarkeit von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)$ und $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\xi)$, das heißt, es gilt $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\,\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\xi)=\mathcal{R}_{\mathcal{B}}(\zeta)\,\mathcal{R}_{\mathcal{B}}(\xi)$ für alle $\zeta,\xi\in\rho(\mathcal{A})$. Weitere Konsequenzen beinhaltet das folgende

4.5 Corollar: *(i) Für jede lineare Abbildung $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{E}$ ist $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ eine holomorphe operatorwertige Funktion auf $\rho(\mathcal{A})$.*
(ii) Für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{(n)}=n!\,\left[\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\right]^{n+1}$.
(iii) Für alle $x\in\mathcal{E}$ und alle $f\in\mathcal{E}'$ ist die Funktion F_x mit $F_x(\zeta)=f\big(\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\,x\big)$ holomorph auf $\rho(\mathcal{A})$, und es gilt $\lim\limits_{|\zeta|\to\infty}F_x(\zeta)=0$.

Beweis: (i) Aus Lemma 4.4 (i) ergibt sich zusammen mit der Stetigkeit von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ für alle $\zeta,\xi\in\rho(\mathcal{A})$

$$\lim_{\xi\to\zeta}\frac{\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)-\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\xi)}{\zeta-\xi}=\left[\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\right]^2.$$

(ii) Vollständige Induktion nach n: Für $n=1$ siehe (i). Nun gelte $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{(n)}=n!\,\left[\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\right]^{n+1}$ für festes $n\in\mathbb{N}$. Dann folgt für $n+1$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{(n+1)}&=n!\,\frac{d}{d\zeta}\left[\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\right]^{n+1}=(n+1)!\,\left[\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\right]^{n}\mathcal{R}_{\mathcal{A}}'\\&=(n+1)!\,\left[\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\right]^{n}\left[\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\right]^2=(n+1)!\,\left[\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\right]^{n+2}.\end{aligned}$$

(iii) Mit (i) gilt für alle $\zeta,\xi\in\rho(\mathcal{A})$ und alle $x\in\mathcal{E}$

$$\begin{aligned}\lim_{\xi\to\zeta}\frac{F_x(\zeta)-F_x(\xi)}{\zeta-\xi}&=\lim_{\xi\to\zeta}\frac{f\big(\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\,x\big)-f\big(\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\xi)\,x\big)}{\zeta-\xi}\\&=f\left(\lim_{\xi\to\zeta}\frac{\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)-\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\xi)}{\zeta-\xi}\,x\right)=f\big(\left[\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\right]^2x\big).\end{aligned}$$

Außerdem gilt für $|\zeta| > \|\mathcal{A}\|$ nach Corollar 2.34

$$\begin{aligned}\|F_x(\zeta)\| &= \sup_{\|f\|=1} \left|f\left(\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\,x\right)\right| \\ &\leqq \|x\|\,\left\|\mathcal{R}_{\mathcal{A}}\right\| = \|x\|\,\|\,(\mathcal{A}-\zeta)^{-1}\,\| = \frac{\|x\|}{|\zeta|}\left\|\left(\frac{\mathcal{A}}{|\zeta|}-1\right)^{-1}\right\| \\ &\leqq \frac{\|x\|}{|\zeta|\,(1-\|\mathcal{A}\|/|\zeta|)} = \frac{\|x\|}{|\zeta|-\|\mathcal{A}\|} < \frac{\|x\|}{|\zeta|}\end{aligned}$$

und damit $\lim_{|\zeta|\to\infty} \|F_x(\zeta)\| = 0$. Hieraus folgt die Behauptung. □

Damit können mächtige Hilfsmittel aus der Funktionentheorie zur Untersuchung spektraltheoretischer Angelegenheiten zum Einsatz kommen. Wir illustrieren das im folgenden Abschnitt anhand einer Technik, die eine Übertragung wesentlicher Resultate der komplexen Analysis von $\mathbb{C}$ auf beschränkte Abbildungen in Banachräumen erlaubt.

4.2.2 Der Funktionalkalkül

Die zentrale Idee, auf der das erwähnte Verfahren aufbaut, besteht darin, eine Abbildung zu definieren, die gewöhnlichen komplexen differenzierbaren Funktionen entsprechende auf der Menge der linearen Abbildungen eines Banachraums definierte Funktionen zuordnet, und zwar so, daß wesentliche Eigenschaften erhalten bleiben[3]. Um diese Abbildung zu konstruieren, verschaffen wir uns zunächst Reihenentwicklungen der Resolvente, was sich auch weiter unten als hilfreich erweisen wird.

4.6 Lemma: (i) *Es seien $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene Abbildung auf einem komplexen Banachraum $\mathcal{E}$ und $\zeta_0 \in \rho(\mathcal{A})$. Dann gilt für alle $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\,\zeta-\zeta_0\,| < 1/\|\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta_0)\|$*

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta_0)\right]^{n+1}(\,\zeta-\zeta_0\,)^n. \tag{4.3}$$

(ii) Ist $\mathcal{A}$ beschränkt, dann gilt für alle $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\zeta > \|\mathcal{A}\|$

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^n}{\zeta^{n+1}}. \tag{4.4}$$

(iii) Ist $\mathcal{A}$ beschränkt, λ_0 ein isolierter Eigenwert, $\mathrm{G} = \{\,\zeta \in \mathbb{C} \mid 0 < |\,\zeta-\lambda_0\,| < r\,\} \subset \rho(\mathcal{A})$ *für ein $r > 0$ und Γ eine geschlossene Kurve um λ_0 in* G, *dann gilt für alle $\zeta \in$* G

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{C}_n\,(\,\zeta-\lambda_0\,)^n$$

[3]Solche Abbildungen wurden von Riesz eingeführt [309]. Einen Zusammenhang mit der Spektraltheorie erkannte als erster Stone [361].

mit den Koeffizienten

$$\mathcal{C}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{\mathcal{R}_\mathcal{A}(\xi)}{(\xi - \lambda_0)^{n+1}}\, d\xi. \tag{4.5}$$

Beweis: (i) Betrachte die Abbildung $\mathcal{B}_\mathcal{A}(\zeta) = \mathbf{1} - \mathcal{R}_\mathcal{A}(\zeta_0)(\zeta - \zeta_0)$; für diese gilt einerseits

$$\mathcal{B}_\mathcal{A}(\zeta)\,\mathcal{R}_\mathcal{A}^{-1}(\zeta_0) = \mathcal{A} - \zeta_0 - (\mathcal{A} - \zeta_0)^{-1}(\mathcal{A} - \zeta_0)(\zeta - \zeta_0) = \mathcal{A} - \zeta = \mathcal{R}_\mathcal{A}^{-1}(\zeta)$$

und damit

$$\mathcal{R}_\mathcal{A}(\zeta) = \mathcal{R}_\mathcal{A}(\zeta_0)\,\mathcal{B}_\mathcal{A}^{-1}(\zeta). \tag{4.6}$$

Andererseits gilt nach Voraussetzung $\|\mathcal{B}_\mathcal{A}(\zeta)\| \leqq 1$ und damit nach Corollar 2.34

$$\mathcal{B}_\mathcal{A}^{-1}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{1} - \mathcal{B}_\mathcal{A}(\zeta))^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathcal{R}_\mathcal{A}(\zeta_0)\right]^n (\zeta - \zeta_0)^n. \tag{4.7}$$

(4.6) und (4.7) liefern zusammen die Behauptung.
(ii) Nach Voraussetzung ist $\|\mathcal{A}/\zeta\| < 1$, folglich gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\mathcal{A}^n}{\zeta^{n+1}} \right\| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\mathcal{A}}{\zeta} \right\|^n = \frac{1}{1 - \|\mathcal{A}/\zeta\|},$$

das heißt, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n/\zeta^{n+1}$ konvergiert absolut. Daraus folgt

$$-(\mathcal{A} - \zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^n}{\zeta^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathcal{A}^n}{\zeta^n} - \frac{\mathcal{A}^{n+1}}{\zeta^{n+1}} \right) = \mathbf{1}$$

und analog

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^n}{\zeta^{n+1}} (\mathcal{A} - \zeta) = \mathbf{1}.$$

(iii) Folgt aus Corollar 4.5 (i). □

(4.3) ist die Entwicklung der Resolvente von $\mathcal{A}$ in eine Taylor-Reihe um den Punkt ζ_0, (4.4) und (4.5) sind ihre Entwicklungen in Laurent-Reihen um den Punkt ∞ beziehungsweise λ_0. Daraus folgt, daß isolierte Eigenwerte von $\mathcal{A}$ gleichzeitig wesentliche Singularitäten von $\mathcal{R}_\mathcal{A}$ sind, sofern $a_n \neq 0$ ist für alle $n \in \mathbb{Z}$, beziehungsweise Pole der Ordnung n, sofern es ein $p \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n \neq 0$ für $n \geqq -p$ und $a_n = 0$ für $n < -p$. Diese Aussagen werden wir im nächsten Abschnitt präzisieren.

Nun betrachten wir zu einer beschränkten Abbildung $\mathcal{A}$ auf einem komplexen Banachraum $\mathcal{E}$ die Menge $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ aller offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{C}$ mit $\sigma \subset \Omega$; außerdem wählen wir zu jedem Ω aus $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ eine offene, beschränkte Menge $\mathrm{B} \subset \mathbb{C}$ mit $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathrm{B}$ und $\overline{\mathrm{B}} \subset \Omega$, deren Rand $\partial\mathrm{B}$ aus endlich vielen paarweise disjunkten geschlossenen Kurven besteht. Anschaulich gesprochen werden damit die Bestandteile des Spektrums durch die Randkurven von B eingekreist, das heißt, es gilt $\partial \mathrm{B} \subset \rho(\mathcal{A})$. Zu jeder Funktion f, die auf einer Menge $\Omega \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ komplex differenzierbar ist[4], definieren wir die Abbildung

$$\mathcal{T}_f(\mathcal{A}) := \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial \mathrm{B}} f(\zeta)\, \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\, d\zeta, \tag{4.8}$$

wobei die Orientierung von $\partial \mathrm{B}$ so gewählt werden soll, daß beim Bilden des Umlaufintegrals die Punkte aus B in Laufrichtung stets *links* von $\partial \mathrm{B}$ erscheinen. Um dieses Integral auszurechnen, beachten wir, daß f in jedem Punkt von B holomorph und daher für alle $z \in \mathrm{B}$ als Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

darstellbar ist. Nach Lemma 4.6 gilt somit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial \mathrm{B}} f(\zeta)\, \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\, d\zeta &= -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial \mathrm{B}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \zeta^n \frac{\mathcal{A}^m}{\zeta^{m+1}}\, d\zeta \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \mathcal{A}^m \oint\limits_{\partial \mathrm{B}} \frac{d\zeta}{\zeta^{m-n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{A}^n\end{aligned}$$

oder zusammengefaßt

$$f(\mathcal{A}) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial \mathrm{B}} f(\zeta)\, \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\, d\zeta. \tag{4.9}$$

Es gilt also $\mathcal{T}_f(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A})$, womit wir wie gewünscht aus der komplexwertigen Funktion f eine operatorwertige Funktion gemacht haben. Schreibt man das in der Form

$$f(\mathcal{A}) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial \mathrm{B}} f(\zeta)\, (\mathcal{A} - \zeta)^{-1}\, d\zeta,$$

so erkennt man, daß es sich hierbei überdies um eine Verallgemeinerung der ersten Cauchyschen Integralformel handelt. n-maliges Differenzieren unter dem Integral liefert außerdem

$$f^{(n)}(\mathcal{A}) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\partial \mathrm{B}} f(\zeta)\, [\, (\mathcal{A} - \zeta)^{-1}\,]^{n+1}\, d\zeta$$

und damit auch die Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformeln für beliebige $n \in \mathbb{N}$; die Ableitung ist hier natürlich nach dem Parameter ζ zu verstehen[5].

Die gemäß (4.8) definierte Abbildung erfüllt nun genau die gewünschten, am Beginn dieses Abschnitts beschriebenen Anforderungen – sofern sie sich vernünftig benimmt. Das garantiert der folgende zentrale

4.7 Satz: *Es seien $\mathcal{E}$ ein komplexer Banachraum, $\mathcal{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$ und $\mathscr{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$ die Menge der auf mindestens einem $\Omega \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ komplex differenzierbaren Funktionen. Dann gilt für die durch die Abbildung $\mathcal{T}_f$ definierte Zuordnung $f \longmapsto f(\mathcal{A})$*

[4]Falls Ω einfach zusammenhängend ist, sind solche Funktionen auf Ω sogar holomorph.
[5]Diese Resultate finden sich erstmals bei Dunford [74], [75]; vergleiche auch [364].

(i) $(cf)(\mathcal{A}) = c\, f(\mathcal{A})$ *für alle* $f \in \mathscr{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *und alle* $c \in \mathbb{C}$,

(ii) $(f+g)(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A}) + g(\mathcal{A})$ *für alle* $f, g \in \mathscr{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A})$,

(iii) $(fg)(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A})\, g(\mathcal{A})$ *für alle* $f, g \in \mathscr{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A})$, *und*

(iv) für alle $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ *mit* $f(\lambda) \neq 0$ *ist* $f(\mathcal{A})$ *invertierbar mit* $[f(\mathcal{A})]^{-1} = (1/f)(\mathcal{A})$.

Beweis: (i) und (ii) folgen unmittelbar aus der Linearität des Integrals.
(iii) Die Funktionen f und g seien auf $\Omega_f \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ beziehungsweise $\Omega_g \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ komplex differenzierbar, außerdem seien $\mathsf{B}_f, \mathsf{B}_g \subset \mathbb{C}$ entsprechend der Beschreibung von (4.8) gewählt, wobei zusätzlich $\overline{\mathsf{B}}_f \subset \mathsf{B}_g \subset \overline{\mathsf{B}}_g \subset \Omega_f \cap \Omega_g$ gelten soll. Dann erhält man

$$\begin{aligned}
f(\mathcal{A})\, g(\mathcal{A}) &= \left[\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial \mathsf{B}_f} f(\zeta)\, \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\, d\zeta\right] \left[\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial \mathsf{B}_g} g(\xi)\, \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\xi)\, d\xi\right] \\
&= -\frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{\partial \mathsf{B}_f} f(\zeta) \oint\limits_{\partial \mathsf{B}_g} g(\xi)\, \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\, \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\xi)\, d\xi\, d\zeta \\
&= -\frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{\partial \mathsf{B}_f} f(\zeta) \oint\limits_{\partial \mathsf{B}_g} g(\xi) \frac{\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta) - \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\xi)}{\xi - \zeta}\, d\xi\, d\zeta \\
&= -\frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{\partial \mathsf{B}_f} f(\zeta)\, \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta) \oint\limits_{\partial \mathsf{B}_g} \frac{g(\xi)}{\xi - \zeta}\, d\xi\, d\zeta \\
&\quad + \frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{\partial \mathsf{B}_g} g(\xi)\, \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\xi) \oint\limits_{\partial \mathsf{B}_f} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \xi}\, d\zeta\, d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial \mathsf{B}_f} f(\zeta)\, g(\zeta)\, \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\, d\zeta = (fg)(\mathcal{A}).
\end{aligned}$$

(iv) Nach Voraussetzung gibt es eine offene Menge $\Omega \supset \sigma(\mathcal{A})$ mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$, folglich ist $1/f$ auf Ω komplex differenzierbar. Außerdem gilt $f(z)\,(1/f)(z) = 1$ für alle $z \in \Omega$ und damit $f(\mathcal{A})\,(1/f)(\mathcal{A}) = \mathbf{1}$. Daraus folgt die Behauptung. □

Aus Satz 4.7 (iii) erhält man unmittelbar ein

4.8 Corollar: *Es seien* $\mathcal{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$ *und* $f, g \in \mathscr{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$. *Dann sind* $f(\mathcal{A})$ *und* $g(\mathcal{A})$ *vertauschbar.*

Die Abbildung $\mathcal{T}_f$ ist nicht nur für jedes $\mathcal{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ eine operatorwertige holomorphe Funktion, sondern für geeignete Funktionen f auch ein Endomorphismus auf $\mathscr{L}(\mathcal{E})$. Dabei liegt es nahe, jeweils einen direkten Zusammenhang zwischen den Spektren von Bildern und Urbilden zu vermuten, was sich mit Hilfe von Satz 4.7 bestätigen läßt, und zwar in Gestalt vom

4.9 Spektralabbildungssatz:[6] *Ist $\mathcal{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$, dann gilt für alle $f \in \mathscr{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$*

$$\sigma(f(\mathcal{A})) = f(\sigma(\mathcal{A})).$$

Beweis: Zunächst sei $\mu \in \sigma(f(\mathcal{A}))\backslash f(\sigma(\mathcal{A}))$. Dann wäre jedoch $\mu \neq f(\lambda)$ für alle $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ und damit nach Satz 4.7 (iv) die Abbildung $f(\mathcal{A}) - \mu$ invertierbar – ein Widerspruch. Folglich gilt $\sigma(f(\mathcal{A})) \setminus f(\sigma(\mathcal{A})) = \emptyset$ und damit $\sigma(f(\mathcal{A})) \subset f(\sigma(\mathcal{A}))$.

Ist umgekehrt $\mu \in f(\sigma(\mathcal{A})) \setminus \sigma(f(\mathcal{A}))$, dann gibt es ein $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ mit $f(\lambda) = \mu$. Definiert man auf Ω_f eine Funktion g durch

$$g(\zeta) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(\lambda)}{\zeta - \lambda} & \text{für} \quad \zeta \neq \lambda, \\ f'(\lambda) & \text{für} \quad \zeta = \lambda, \end{cases}$$

so gilt nach Satz 4.7 (iii) und Corollar 4.8

$$g(\mathcal{A})\,(\,\lambda - \mathcal{A}\,) = (\,\lambda - \mathcal{A}\,)\,g(\mathcal{A}) = f(\lambda) - f(\mathcal{A}) = \mu - f(\mathcal{A}).$$

Damit folgt weiter

$$(\,\lambda - \mathcal{A}\,)\,[\,g(\mathcal{A})\,[\mu - f(\mathcal{A})\,]^{-1}\,] = [\,\mu - f(\mathcal{A})\,]\,[\,\mu - f(\mathcal{A})\,]^{-1} = \mathbf{1}$$

und

$$\{[\,\mu - f(\mathcal{A})\,]^{-1}\,g(\mathcal{A})\}\,(\,\lambda - \mathcal{A}\,) = [\,\mu - f(\mathcal{A})\,]^{-1}\,[\,\mu - f(\mathcal{A})\,] = \mathbf{1},$$

und $\mathcal{A} - \lambda$ wäre invertierbar – ein Widerspruch. Also gilt auch $f(\sigma(\mathcal{A})) \subset \sigma(f(\mathcal{A}))$. □

4.2.3 Singularitäten der Resolvente

In diesem Abschnitt beweisen wir wie oben angekündigt ein Resultat, das die dort aus Lemma 4.6 geschlossenen Folgerungen wieder aufgreift. Dazu verschaffen wir uns zunächst einen Hilfssatz.

4.10 Lemma: *$\mathcal{A}$ sei eine lineare Abbildung auf dem komplexen Banachraum $\mathcal{E}$ und λ ein isolierter Eigenwert von $\mathcal{A}$ mit algebraischer Vielfachheit n; außerdem sei $\mathsf{G}_\lambda \subset \mathbb{C}$ ein abgeschlossenes Gebiet mit $\mathsf{G}_\lambda \setminus \{\lambda\} \subset \rho(\mathcal{A})$, sodaß λ im Inneren von $\partial\,\mathsf{G}_\lambda$ liegt. Dann ist die Abbildung*

$$\mathcal{P}_\lambda := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathsf{G}_\lambda} \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\,d\zeta \tag{4.10}$$

ein stetiger Projektor auf $\mathcal{E}$.

[6] Auch dieses Resultat wurde von Dunford entdeckt [75].

Beweis: Wir definieren die Funktion f durch

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad z \in G_\lambda, \\ 0 & \text{für} \quad z \in \mathbb{C} \setminus G_\lambda \end{cases}$$

Nach Satz 4.3 gilt $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, also ist $f(\lambda) \in f(\sigma(\mathcal{A}))$, und da $f(\lambda)$ trivialerweise zu $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ gehört, folgt mit Satz 4.9 auch $f(\lambda) \in \sigma(f(\mathcal{A}))$. Anwendung von (4.9) auf f liefert mit Hilfe von (4.10) die Relation $\mathcal{P}_\lambda = f(\mathcal{A})$, und mit Satz 4.7 (iii) erhalten wir $\mathcal{P}_\lambda^2 = f^2(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A})$, also $\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$. □

Damit kommen wir zum bereits erwähnten Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und den Singularitäten der Resolvente einer linearen Abbildung.

4.11 Satz:[7] *Die Eigenwerte einer linearen Abbildung auf einem komplexen Banachraum sind genau die Pole n-ter Ordnung von dessen Resolvente, wenn es sich um Eigenwerte n-facher, beziehungsweise wesentlichen Singularitäten der Resolvente, wenn es sich um Eigenwerte unendlichfacher algebraischer Vielfachheit handelt.*

Beweis: „$\Longrightarrow$": $\mathcal{A}$ sei eine lineare Abbildung auf dem komplexen Banachrtaum $\mathcal{E}$. Für die Laurent-Koeffizienten der Resolvente von $\mathcal{A}$ gilt für $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} - \lambda)\,\mathcal{C}_m &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial G_\lambda} \frac{(\mathcal{A} - \lambda)(\mathcal{A} - \zeta)^{-1}}{(\zeta - \lambda)^{m+1}}\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\oint\limits_{\partial G_\lambda} \frac{d\zeta}{(\zeta - \lambda)^{m+1}} + \oint\limits_{\partial G_\lambda} \frac{\mathcal{R}_\mathcal{A}(\zeta)}{(\zeta - \lambda)^m}\, d\zeta \right] = \delta_{m0} + \mathcal{C}_{m-1}, \end{aligned}$$

also speziell für $m = n$

$$(\mathcal{A} - \lambda)\,\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_{n-1}$$

oder

$$\mathcal{C}_n = (\mathcal{A} - \lambda)^{-1}\,\mathcal{C}_{n-1}.$$

Durch wiederholtes Anwenden dieser Relation erhält man

$$\mathcal{C}_{n+1} = (\mathcal{A} - \lambda)^n\,\mathcal{C}_{-1} = (\mathcal{A} - \lambda)^n\,\mathcal{P}_\lambda \tag{4.11}$$

für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nun sei λ ein Eigenwert von $\mathcal{A}$ mit algebraischer Vielfachheit $n \in \mathbb{N}$, das heißt, es existiere ein $x \in \mathcal{E}$ mit $(\mathcal{A} - \lambda)^{n-1} x \neq 0$ und $(\mathcal{A} - \lambda)^n x = 0$. Mit (4.5) und (4.11) folgt sofort, daß λ ein Pol n-ter Ordnung von $\mathcal{R}_\mathcal{A}(\zeta)$ ist. Für einen Eigenwert λ von $\mathcal{A}$ mit unendlicher algebraischer Vielfachheit gilt $(\mathcal{A} - \lambda)^n x \neq 0$ für alle $x \in \mathcal{E}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ und damit auch $\mathcal{C}_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist λ eine wesentliche Singularität von $\mathcal{R}_\mathcal{A}(\zeta)$. „$\Longleftarrow$": Ist λ ein Pol n-ter Ordnung der Resolvente von $\mathcal{A}$, dann ist $\mathcal{C}_j \neq 0$ für $j \leqq n$ und

[7] Dieses Resultat stammt in einer etwas spezielleren Version von Caradus [48] und wurde von Taylor auf die hier gezeigte Form verallgemeinert [365]; vergleiche auch [212] und [366].

$\mathcal{C}_j = 0$ für $j > n$. Nach Lemma 4.10 gilt $\mathcal{E} = \operatorname{ran}\mathcal{P}_\lambda \oplus \ker\mathcal{P}_\lambda$. Setzt man $\mathcal{B} := \mathcal{A} \restriction \operatorname{ran}\mathcal{P}_\lambda$, dann folgt aus (4.11)

$$\operatorname{ran}\mathcal{C}_{m+1} = \operatorname{ran}[\,(\mathcal{A}-\lambda)^m\,\mathcal{P}_\lambda\,] = \operatorname{ran}(\mathcal{B}-\lambda)^m$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{C}_{n+1} = 0$ und damit $\operatorname{ran}(\mathcal{B}-\lambda)^n = \{0\}$. Hieraus folgt $\ker(\mathcal{B}-\lambda)^n = \operatorname{ran}\mathcal{P}_\lambda$, also $\operatorname{ran}(\mathcal{B}-\lambda)^n = \ker\mathcal{P}_\lambda$. Die Abbildung $(\mathcal{A}-\lambda)^m$ bildet $\ker\mathcal{P}_\lambda$ bijektiv auf sich selbst ab für alle $m \in \mathbb{N}$, also gelten die Relationen

$$\operatorname{ran}(\mathcal{A}-\lambda)^m = \ker\mathcal{P}_\lambda \oplus \operatorname{ran}(\mathcal{B}-\lambda)^m,$$

$$\ker(\mathcal{A}-\lambda)^m = \{0\} \oplus \ker(\mathcal{B}-\lambda)^m$$

für $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Das liefert $\operatorname{ran}(\mathcal{A}-\lambda)^n = \ker\mathcal{P}_\lambda$ und $\ker(\mathcal{A}-\lambda)^n = \operatorname{ran}\mathcal{P}_\lambda$. Somit ist λ ein Eigenwert von $\mathcal{A}$ mit der algebraischen Vielfachheit n. Ist λ eine wesentliche Singularität von $\mathcal{R}_\mathcal{A}(\zeta)$, dann ist $\mathcal{C}_m \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt nach (4.11) auch $0 \notin \operatorname{ran}(\mathcal{A}-\lambda)^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$, und folglich ist λ von unendlicher algebraischer Vielfachheit. □

Ein Nebenprodukt des soeben beschriebenen Beweises rechtfertigt eine eigene explizite Formulierung.

4.12 Corollar:[8] *Ist λ ein Eigenwert n-facher algebraischer Vielfachheit der linearen Abbildung $\mathcal{A}$, dann gilt für den durch (4.10) definierten Projektor* $\operatorname{ran}\mathcal{P}_\lambda = \ker(\mathcal{A}-\lambda)^n$ *und* $\ker\mathcal{P}_\lambda = \operatorname{ran}(\mathcal{A}-\lambda)^n$.

$\mathcal{P}_\lambda$ heißt aus naheliegenden Gründen *Spektralprojektor* von λ. Lemma 4.6 (iii) zeigt überdies, daß die Spektralprojektoren der isolierten Eigenvektoren einer linearen Abbildung die Residuen von dessen Resolvente sind.

4.3 Spektren linearer Abbildungen

4.3.1 Einige vorbereitende Bemerkungen

Soweit im vorigen Abschnitt Elemente von Spektren aufgetaucht sind, waren das stets gleichzeitig Eigenwerte der zugehörigen Abbildungen. Das Spektrum einer Abbildung kann jedoch noch mehr enthalten[9]. Auch Häufungspunkte von Eigenwerten gehören stets dazu, außerdem ganz allgemein Zahlen, für welche die Resolvente von $\mathcal{A}$ zwar existiert, aber nicht auf ganz $\mathcal{E}$ definiert ist, oder für die sie unbeschränkt ist. Man erkennt daran, daß sich das Spektrum einer Abbildung in unterschiedliche Bereiche einteilen läßt. Das erreichen wir mit den folgenden Begriffen, wobei wir die damit erzielte Einteilung in Abschnitt 4.4.2.7 noch etwas weiter verfeinern.

[8] Lemma 4.10 und Corollar 4.12 findet man in dieser allgemeinen Form erstmals bei E. R. Lorch [232]; vergleiche auch [233].

[9] Nur in endlichdimensionalen Vektorräumen sind die Eigenwerte einer Abbildung genau die Elemente von dessen Spektrum.

4.13 Definition: $\mathcal{A}$ sei eine Abbildung auf dem Banachraum $\mathcal{E}$. Dann heißt

(i) $\sigma_{\mathsf{c}}(\mathcal{A}) := \{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid \mathcal{A} - \lambda \text{ injektiv}, \ \overline{\operatorname{ran}(\mathcal{A} - \lambda)} = \mathcal{E}, \ \operatorname{ran}(\mathcal{A} - \lambda) \neq \mathcal{E} \,\}$ *wesentliches* oder *kontinuierliches Spektrum* von $\mathcal{A}$,

(ii) $\sigma_{\mathsf{p}}(\mathcal{A}) := \{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid \mathcal{A} - \lambda \text{ nicht injektiv} \,\}$ *Punktspektrum* von $\mathcal{A}$,

(iii) $\sigma_{\mathsf{disc}}(\mathcal{A}) := \sigma_{\mathsf{p}}(\mathcal{A}) \setminus [\, \sigma_{\mathsf{p}}(\mathcal{A}) \cap \sigma_{\mathsf{c}}(\mathcal{A}) \,]$ *diskretes Spektrum* von $\mathcal{A}$, und

(iv) $\sigma_{\mathsf{res}}(\mathcal{A}) := \{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid \mathcal{A} - \lambda \text{ injektiv}, \ \overline{\operatorname{ran}(\mathcal{A} - \lambda)} \neq \mathcal{E} \,\}$ *residuelles Spektrum* von $\mathcal{A}$.

Die einzelnen Bestandteile des Spektrums lassen sich jeweils anschaulich deuten. Das kontinuierliche Spektrum besteht aus allen Punkten des Spektrums, die keine Eigenwerte sind, außerdem aus den Eigenwerten unendlichfacher algebraischer Vielfachheit, aus Häufungspunkten von Eigenwerten sowie aus denjenigen Eigenwerten, die sich inmitten eines kontinuierlichen Bereichs des Spektrums befinden. Das Punktspektrum ist die Menge aller Eigenwerte von $\mathcal{A}$. Innerhalb des Punktspektrums, also der Menge aller Eigenwerte von $\mathcal{A}$, bilden die isolierten Punkte von $\sigma(\mathcal{A})$, die Eigenwerte endlicher Vielfachheit sind, das diskrete Spektrum. Das Punktspektrum enthält im allgemeinen aber auch Eigenwerte unendlicher Vielfachheit und Eigenwerte, die im kontinuierlichen Spektrum eingebettet sind. Das residuelle Spektrum schließlich enthält alle übrigen Punkte des Spektrums, also den Rest. Das Punktspektrum und das kontinuierliche Spektrum müssen nicht notwendigerweise disjunkt sein, das diskrete Spektrum und das kontinuierliche Spektrum sind dagegen stets disjunkt. Für die komplexen Zahlen finden wir damit die Zerlegungen

$$\mathbb{C} = \sigma_{\mathsf{c}}(\mathcal{A}) \cup \sigma_{\mathsf{p}}(\mathcal{A}) \cup \sigma_{\mathsf{res}}(\mathcal{A}) \cup \rho(\mathcal{A}) = \sigma_{\mathsf{c}}(\mathcal{A}) \cup \sigma_{\mathsf{disc}}(\mathcal{A}) \cup \sigma_{\mathsf{res}}(\mathcal{A}) \cup \rho(\mathcal{A}),$$

wobei nur die zweite der beiden disjunkt ist.

Die Einführung eines weiteren Begriffs wird durch Lemma 4.6 (ii) nahegelegt; danach ist das Spektrum einer linearen Abbildung stets ganz in einem Kreis um den Ursprung enthalten. Wir formulieren entsprechend die folgende

4.14 Definition: Ist $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung auf dem Banachraum $\mathcal{E}$, dann heißt die Größe $r(\mathcal{A}) := \sup \{\, |z| \mid z \in \sigma(\mathcal{A}) \,\}$ der *Spektralradius* von $\mathcal{A}$.

Der Spektralradius kann auch unendlich sein. Das gilt insbesondere in nachstehend beschriebenem Fall.

4.15 Satz: *Für jede nicht abgeschlossene Abbildung $\mathcal{A}$ ist $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C}$.*

Beweis: Gibt es ein $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, dann gilt für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\operatorname{dom} \mathcal{A}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathcal{E}$ und $\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}\, x_n = y \in \mathcal{E}$

$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{A} - \lambda)\, x_n = y - \lambda\, x. \tag{4.12}$$

Außerdem ist $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\lambda) \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\lambda)\, x_n = \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\lambda)\, x.$$

Mit (4.12) folgt

$$x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\lambda)\,(\mathcal{A}-\lambda)\,x_n = \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\lambda)\,(\,y-\lambda\,x\,), \tag{4.13}$$

also $x \in \operatorname{ran}\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\lambda) = \operatorname{dom}(\mathcal{A}-\lambda) = \operatorname{dom}\mathcal{A}$. Aus (4.13) folgt

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\lambda)\,y = x + \lambda\,\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\lambda)\,x$$

also auch

$$y = (\mathcal{A}-\lambda)\,\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\lambda)\,y = (\mathcal{A}-\lambda)\,(\,x+\lambda\,\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\lambda)\,x\,) = (\mathcal{A}-\lambda)\,(\,x+\lambda\,x = \mathcal{A}\,x.$$

Somit ist $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{A}\,x_n = \mathcal{A}\,x$, das heißt, $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen. □

Eine Beschäftigung mit Spektraltheorie ist daher nur für abgeschlossene Abbildungen wirklich interessant. Auch der umgekehrte Fall kommt vor und läßt sich einfach charakterisieren.

4.16 Satz: *Ist $\mathcal{E}$ ein Banachraum und $\mathcal{A}$ eine Abbildung auf $\mathcal{E}$ mit $\sigma(\mathcal{A}) = \emptyset$, dann ist $\mathcal{A}^{-1} \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$.*

Beweis: Ist $\sigma(\mathcal{A}) = \emptyset$, dann folgt $\rho(\mathcal{A}) = \mathbb{C}$, also insbesondere $0 \in \rho(\mathcal{A})$ und damit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(0) = \mathcal{A}^{-1} \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$. □

Die Frage, welcher Bereich möglicher Spektren nun genau von den beiden Extremfällen $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C}$ und $\sigma(\mathcal{A}) = \emptyset$ eingeschlossen wird, beantwortet der nächste

4.17 Satz: *$\mathcal{A}$ sei eine lineare Abbildung auf einem Banachraum. Dann ist $\sigma(\mathcal{A})$ abgeschlossen.*

Beweis: Gilt $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C}$ oder $\sigma(\mathcal{A}) = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\mathcal{A}$ abgeschlossen mit $\rho(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Für alle $\zeta \in \rho(\mathcal{A})$ ist $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ und $\mathcal{A}-\zeta$ damit invertierbar. Außerdem gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{A} - z = [\,(\,\zeta - z\,)\,(\,\mathcal{A}-\zeta\,)^{-1} + 1\,]\,(\,\mathcal{A}-\zeta\,) = [\,\mathbf{1} - (\,z-\zeta\,)\,\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\,]\,(\,\mathcal{A}-\zeta\,).$$

Wählt man z so, daß $|\,z-\zeta\,| < 1/\|\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\|$ gilt, so folgt

$$\|\,(\,z-\zeta\,)\,\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\,\| \leqq |\,z-\zeta\,|\,\|\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\| < 1.$$

Nach Corollar 2.34 ist dann $\mathbf{1} - (\,z-\zeta\,)\,\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)$ und daher auch $\mathcal{A}-z$ invertierbar, das heißt, es gilt $z \in \rho(\mathcal{A})$. Für jedes $\zeta \in \rho(\mathcal{A})$ gibt es somit eine offene Umgebung U mit $\mathrm{U} \subset \rho(\mathcal{A})$. Folglich ist $\rho(\mathcal{A})$ offen und $\sigma(\mathcal{A})$ abgeschlossen. □

Generell gibt es zu jeder beliebigen abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ eine lineare Abbildung, deren Spektrum diese Menge ist.

Die weiteren Eigenschaften von Spektren linearer Abbildungen, die wir in diesem Abschnitt betrachten, hängen von den jeweiligen Eigenschaften der Abbildungen ab. Daher nehmen wir uns nun einige unterschiedliche Klassen linearer Abbildungen jeweils gesondert vor.

4.3.2 Beschränkte Abbildungen

Wir beginnen mit der langweiligsten Kategorie und einigen Aussagen darüber, die entsprechend einfach zu beweisen sind. Hierfür ist zunächst wieder ein Hilfssatz erforderlich.

4.18 Lemma: *Ist $\mathcal{E}$ ein Banachraum, dann ist die Menge $\mathscr{I}(\mathcal{E})$ der invertierbaren Abbildungen auf $\mathcal{E}$ offen.*

Beweis: Für alle $\mathcal{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$ und alle $\mathcal{B} \in \mathscr{I}(\mathcal{E})$ gilt

$$\mathcal{A} = [\,\mathbf{1} - (\,\mathcal{B} - \mathcal{A}\,)\,\mathcal{B}^{-1}\,]\,\mathcal{B};$$

setzt man zusätzlich die Bedingung $\|\,\mathcal{A} - \mathcal{B}\,\| < 1/\|\mathcal{B}^{-1}\|$ voraus, so gilt außerdem

$$\|\,(\,\mathcal{B} - \mathcal{A}\,)\,\mathcal{B}^{-1}\,\| \leqq \|\,\mathcal{B} - \mathcal{A}\,\|\,\|\mathcal{B}^{-1}\| < 1.$$

Nach Corollar 2.34 ist daher $\mathbf{1} - (\,\mathcal{B} - \mathcal{A}\,)\,\mathcal{B}^{-1}$ und somit auch $\mathcal{A}$ invertierbar. □

Damit sind wir in der Lage, eine erste, sehr allgemeine Eigenschaft von Spektren beschränkter Abbildungen herzuleiten.

4.19 Satz: *Ist $\mathcal{E} \neq \{0\}$ ein Banachraum und $\mathcal{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$, dann ist $\sigma(\mathcal{A})$ eine nicht leere und kompakte Menge.*

Beweis: Nach Corollar 4.5 (i) ist $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ holomorph auf $\rho(\mathcal{A})$, und aus Lemma 4.6 (ii) folgt

$$\|\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta)\| \leqq \frac{1}{|\zeta| - \|\mathcal{A}\|},$$

also $\lim\limits_{|\zeta|\to\infty} \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta) = 0$. Wäre $\sigma(\mathcal{A}) = \emptyset$, dann zöge das $\rho(\mathcal{A}) = \mathbb{C}$ nach sich. Nach dem Theorem von Liouville wäre dann $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\zeta) = 0$ auf ganz $\mathbb{C}$ – ein Widerspruch, denn die Resolvente kann als Inverse von $\mathcal{A} - \zeta$ nicht identisch verschwinden.
Nun sei die Abbildung $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathscr{L}(\mathcal{E})$ definiert durch $\varphi(z) = \mathcal{A} - z$. Es gilt $\varphi(z) \in \mathscr{C}(\mathcal{E})$ für $z \in \rho(\mathcal{A})$. Sind $z \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, wähle $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\,z - \zeta\,| < \varepsilon$, dann ist

$$\|\,\varphi(z) - \varphi(\zeta)\,\| = |\,z - \zeta\,|\,\|\mathbf{1}\| = |\,z - \zeta\,| < \varepsilon,$$

das heißt, φ ist stetig auf $\mathbb{C}$. Nach Lemma 4.18 ist folglich $\rho(\mathcal{A})$ offen und $\sigma(\mathcal{A})$ abgeschlossen. □

Der triviale Raum $\mathcal{E} = \{0\}$ ist bei obigem Satz auszuschließen, da die einzige lineare Abbildung $\mathcal{A} = 0$ auf diesem ein leeres Spektrum besitzt.

Das zweite Resultat dieses Abschnitts liefert genauere Informationen über die Größe der Spektren beschränkter Abbildungen. Aus Lemma 4.6 (ii) folgt $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\,z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq \|\mathcal{A}\|\,\}$ für alle $\mathcal{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$ und damit $r(\mathcal{A}) \leqq \|\mathcal{A}\|$. Das können wir jetzt präzisieren.

4.20 Satz:[10] *$\mathcal{E}$ sei ein komplexer Banachraum. Dann gilt für jede beschränkte Abbildung $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{E}$*

$$r(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}.$$

Beweis: Wir schätzen $r(\mathcal{A})$ zunächst nach oben ab. Nach Satz 4.9 ist $\sigma(\mathcal{A}^n) = \{\, z^n \mid z \in \sigma(\mathcal{A})\,\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $r(\mathcal{A}^n) = r(\mathcal{A})^n$. Wegen $r(\mathcal{A}^n) \leqq \|\mathcal{A}^n\|$ gilt außerdem $r(\mathcal{A})^n \leqq \|\mathcal{A}^n\|$ und damit $r(\mathcal{A}) \leqq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}$, also

$$r(\mathcal{A}) \leqq \liminf_{n\to\infty} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}. \tag{4.14}$$

Nun schätzen wir $r(\mathcal{A})$ nach unten ab. Nach Lemma 4.6 (ii) gibt es für alle $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| > r(\mathcal{A})$ ein $C > 0$, sodaß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\mathcal{A}^n}{\zeta^{n+1}} \right\| < \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\mathcal{A}^n}{\zeta^{n}} \right\| \leqq C.$$

Damit gilt $\|\mathcal{A}^n\|^{1/n} \leqq |\zeta|\, C^{1/n}$, also auch $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n} = |\zeta|$, und es folgt

$$r(\mathcal{A}) \geqq \limsup_{n\to\infty} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}. \tag{4.15}$$

(4.14) und (4.15) liefern zusammen die Behauptung. □

Das nächste Resultat beschreibt, was mit den Spektren beschränkter linearer Abbildungen passiert, wenn man stattdessen deren duale Abbildungen betrachtet, nämlich nichts. Dazu verschaffen wir uns zunächst zwei weitere Hilfssätze.

4.21 Lemma:[11] *Es seien $\mathcal{E}$ ein Banachraum und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$. Dann gilt $(\mathcal{A}\,\mathcal{B})' = \mathcal{B}'\,\mathcal{A}'$.*

Beweis: Für alle $f \in \mathcal{E}'$ gilt $\mathcal{B}'\,\mathcal{A}'\,f = \mathcal{A}'f \circ \mathcal{B} = f \circ \mathcal{A}\,\mathcal{B} = (\mathcal{A}\,\mathcal{B})'\,f$. □

4.22 Lemma: *$\mathcal{E}$ sei ein Banachraum und $\mathcal{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$. Dann ist $\mathcal{A}$ genau dann invertierbar, wenn $\mathcal{A}'$ invertierbar ist, und es gilt $(\mathcal{A}')^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})'$.*

Beweis: „$\Longrightarrow$": Es seien $\mathcal{A}$ invertierbar und damit $\mathcal{A}^{-1}$ und $\mathcal{A}^{-1\prime}$ beschränkt. Dann gilt nach Lemma 4.21

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}^{-1})'\,\mathcal{A}' &= (\mathcal{A}\,\mathcal{A}^{-1})' = \mathbf{1}'\\ \mathcal{A}'\,(\mathcal{A}^{-1})' &= (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A})' = \mathbf{1}'.\end{aligned}$$

„$\Longleftarrow$": Sei $\mathcal{A}'$ invertierbar, dann ist wie soeben gezeigt auch $\mathcal{A}''$ invertierbar und damit beschränkt. Mit der kanonischen isometrische Einbettung $j^{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}''$ definiert durch $j^{\mathcal{E}}_x(f) = f(x)$, $f \in \mathcal{E}'$ gilt daher für alle $x \in \mathcal{E}$

$$\|\mathcal{A}\,x\| = \|j^{\mathcal{E}}_{\mathcal{A}\,x}\| = \|\mathcal{A}''\,j^{\mathcal{E}}_x\| \geqq \frac{\|(\mathcal{A}'')^{-1}\mathcal{A}''\,j^{\mathcal{E}}_x\|}{\|(\mathcal{A}'')^{-1}\|} = \frac{\|j^{\mathcal{E}}_x\|}{\|(\mathcal{A}'')^{-1}\|} = \frac{\|x\|}{\|(\mathcal{A}'')^{-1}\|}.$$

[10] Siehe Gelfand [108]

[11] Vergleiche Satz 3.9 (ii) und Corollar 3.10 (ii).

Aus $\mathcal{A}\,x = 0$ folgt damit $x = 0$, das heißt, $\mathcal{A}$ ist injektiv. Aus $\mathcal{A}\,x = 0$ folgt außerdem für alle $\varphi \in \mathcal{E}'$

$$\mathcal{A}'\,\varphi(x) = \varphi(\mathcal{A}\,x) = 0,$$

das heißt, auch aus $\mathcal{A}'\,\varphi = 0$ folgt $\varphi = 0$. Daher ist auch $\mathcal{A}'$ injektiv. $\mathcal{A}$ ist folglich auch surjektiv und somit bijektiv. Nach Corollar 2.36 ist $\mathcal{A}$ dann auch invertierbar. □

Nun kommen wir zur angekündigten Aussage über die Spektren dualer Abbildungen.

4.23 Satz: *Für jede beschränkte Abbildung $\mathcal{A}$ auf einem Banachraum gilt $\sigma(\mathcal{A}') = \sigma(\mathcal{A})$.*

Beweis: Ist $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, dann ist $\mathcal{A} - \lambda$ invertierbar. Folglich ist nach Lemma 4.22 auch $(\,\mathcal{A} - \lambda\,)' = \mathcal{A}' - \lambda$ invertierbar, und es gilt $\lambda \in \rho(\mathcal{A}')$. □

Wie erwähnt sind im allgemeinen nicht alle Punkte des Spektrums einer Abbildung Eigenwerte. Das schauen wir uns gleich noch genauer an, zuvor beschäftigen wir uns erst einmal mit denjenigen Punkten, die tatsächlich welche sind. Die nachfolgende Aussage werden wir später verallgemeinern.

4.24 Satz: *$\mathcal{E}$ sei ein Banachraum und $\mathcal{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$. Ist $(\lambda_j)_{j\,\in\,J}$ eine endliche oder unendliche Familie von Eigenwerten von $\mathcal{A}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, dann ist die Familie der zugehörigen Eigenvektoren linear unabhängig.*

Beweis: Für $|\,J\,| = 1$ ist die Behauptung trivialerweise richtig. Seien also $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ eine Familie von n Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ von $\mathcal{A}$ und $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ linear unabhängig. Aus

$$e_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j\, e_j$$

folgt dann

$$\mathcal{A}\,e_n = \lambda_n\,e_n = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_n\,\alpha_j\,e_j = \mathcal{A}\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j\,e_j = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j\,\alpha_j\,e_j,$$

also

$$\sum_{j=1}^{n-1} (\,\lambda_n - \lambda_j\,)\,\alpha_j\,e_j = 0,$$

und wegen $\lambda_n \neq \lambda_j$ für $j = 1, 2, \ldots, n-1$ liefert das $\alpha_j = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Daher sind auch die Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_n$ linear unabhängig. Das folgt induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$, und somit gilt die Behauptung für endliche wie für unendliche Familien von Eigenvektoren. □

Wir erwähnen als nächstes einen wichtigen Sonderfall, bei dem die Lage besonders übersichtlich ist, nämlich denjenigen von Projektoren. Sie können einen Vektor nur dann auf ein Vielfaches von ihm selbst abbilden, wenn er entweder sowieso schon in ihrem Projektionsraum oder aber in dessen Komplement liegt. Genauergesagt gilt der folgende

4.25 Satz: *$\mathcal{V}$ sei ein Vektorraum und $\mathcal{P}$ ein Projektor auf $\mathcal{V}$ mit $\mathcal{P} \neq 0$ und $\mathcal{P} \neq \mathbf{1}$. Dann gilt $\sigma(\mathcal{P}) = \{0, 1\}$.*

Beweis: Aus $\mathcal{P} \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ folgt mit Satz 4.9 einerseits $\lambda^2 \in \sigma(\mathcal{P}^2)$ für alle $\lambda \in \sigma(\mathcal{P})$; andererseits gilt $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$, also $\sigma(\mathcal{P}^2) = \sigma(\mathcal{P})$ und damit $\lambda^2 = \lambda$ für alle $\lambda \in \sigma(\mathcal{P})$. Daraus folgt die Behauptung. □

Das Spektrum eines Projekors ist somit nicht nur rein diskret, sondern enthält auch in der Tat nur die beiden Werte, die man anschaulich erwartet, da er jeden Vektor entweder anulliert, unbehelligt läßt oder aber verdreht. Für die beiden oben ausgeschlossenen trivialen Fälle gilt $\sigma(0) = \{0\}$ und $\sigma(\mathbf{1}) = \{1\}$.

Abschließend wenden wir uns noch zwei Aussagen zu, die sich im wesentlichen ziemlich direkt aus den obigen Resultaten ergeben.

4.26 Satz: *Für jeden beschränkten Operator auf einem Hilbertraum gilt*

(i) $\sigma(\widehat{A}^*) = \sigma(\widehat{A})$;

(ii) $\sigma(\widehat{A}^*) = \sigma(\widehat{A})^*$.

Beweis: (i) folgt unmittelbar aus Satz 4.23.
(ii) Aus Satz 3.11 (i) folgt $\rho(\widehat{A}^*) = \rho(\widehat{A})^*$ und damit weiter

$$\sigma(\widehat{A})^* = [\,\mathbb{C} \setminus \rho(\widehat{A})\,]^* = \mathbb{C} \setminus \rho(\widehat{A})^* = \mathbb{C} \setminus \rho(\widehat{A}^*) = \sigma(\widehat{A}^*). \qquad \square$$

Wir halten außerdem fest, daß sich für Hilberträume die Aussage von Satz 4.20 über den Spektralradius $r(\widehat{A})$ unter geeigneten Voraussetzungen erheblich vereinfacht.

4.27 Satz: *Für jeden beschränkten normalen Operator $\widehat{A}$ auf einem Hilbertraum gilt*

$$\|\widehat{A}\| = r(\widehat{A}).$$

Beweis: Für jeden normalen Operator $\widehat{A}$ gilt

$$\|\widehat{A}^2\|^2 = \|(\widehat{A}^2)^*\widehat{A}^2\| = \|(\widehat{A}^*\widehat{A})^*\widehat{A}^*\widehat{A}\| = \|\widehat{A}^*\widehat{A}\|^2 = \|\widehat{A}\|^4$$

und damit $\|\widehat{A}^2\| = \|\widehat{A}\|^2$. Das liefert induktiv $\|\widehat{A}^{2n}\| = \|\widehat{A}\|^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 4.20 folgt

$$r(\widehat{A}) = \lim_{n\to\infty} \|\widehat{A}^{2n}\|^{1/2n} = \lim_{n\to\infty} (\|\widehat{A}\|^{2n})^{1/2n} = \|\widehat{A}\|. \qquad \square$$

Bevor wir uns unbeschränkten Operatoren auf Hilberträumen zuwenden, grenzen wir im nächsten Abschnitt die Klasse der beschränkten linearen Abbildungen zunächst noch weiter ein, indem wir wieder deren wichtigste Teilklasse betrachten.

4.3.3 Kompakte Abbildungen

In Abschnitt 3.2.4 wurde bereits angedeutet, daß die besondere Eigenschaft kompakter Abbildungen, sich auch in unendlichdimensionalen Räumen weitgehend zumindest täuschend ähnlich wie die aus der elementaren linearen Algebra bekannten Homomorphismen zu verhalten, im Zusammenhang mit deren Spektraltheorie besonders auffällig zu Tage tritt. Drei entsprechende Resultate liefert der vorliegende Abschnitt; weiter unten folgen noch weitergehende Analogien. Als erstes können wir Satz 4.19 für kompakte Abbildungen präzisieren, wofür zuvor noch zwei Hilfssätze bereitzustellen sind.

4.28 Lemma:[12] *$\mathcal{E}$ sei ein normierter Raum und $\mathcal{U}$ ein abgeschlossener echter Unterraum von $\mathcal{E}$. Dann gibt es zu jedem $0 < \delta < 1$ ein $x \in \mathcal{E}$ mit $\|x\| = 1$ und $\inf\limits_{a \in \mathcal{U}} \| x - a \| \geqq 1 - \delta$.*

Beweis: Sei $y \in \mathcal{E} \setminus \mathrm{U}_n$ mit $d := \inf\limits_{a \in \mathrm{U}_n} \| y - a \| > 0$; zu jedem $\delta > 0$ gibt es dann ein $y_\delta \in \mathrm{U}$ mit

$$d \leqq \| y - y_\delta \| \leqq \frac{d}{1 - \delta}. \tag{4.16}$$

Setzen wir

$$x_{n+1} := \frac{y - y_\delta}{\| y - y_\delta \|},$$

dann gilt $\|x_{n+1}\| = 1$, und für alle $b \in \mathrm{U}$ folgt wegen $y_\delta + \| y - y_\delta \| \, b \in \mathrm{U}$ mit (4.16)

$$\| x_{n+1} - b \| = \left\| \frac{y - y_\delta}{\| y - y_\delta \|} - b \right\| = \left\| \frac{y - (y_\delta + \| y - y_\delta \| \, b)}{\| y - y_\delta \|} \right\| \geqq \frac{d}{\| y - y_\delta \|} \geqq 1 - \delta.$$

□

4.29 Lemma:[13] *Ein normierter Raum ist genau dann unendlichdimensional, wenn seine abgeschlossene Einheitskugel nicht kompakt ist.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: $\mathcal{E}$ sei ein unendlichdimensionaler normierter Raum und K dessen abgeschlossene Einheitskugel. Wir konstruieren eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K, die keine konvergente Teilfolge besitzt. Dazu seien zunächst $x_1, x_2 \in \mathcal{E}$ mit $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ und $\| x_1 - x_2 \| \geqq 1/2$ fest gewählt. Sind bereits n Elemente x_j von $\mathcal{E}$ mit $\|x_j\| = 1$ und $\| x_i - x_j \| \geqq 1/2$ für $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$, $n \in \mathbb{N}$, gewählt, erhält man mit $\mathrm{U}_n := \operatorname{span}\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ einen Unterraum von $\mathcal{E}$, der als n-dimensionaler normierter Raum vollständig und damit abgeschlossen ist. Damit erhalten wir die gewünschte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch Anwendung von Lemma 4.28 auf U_n für alle $n \in \mathbb{N}$, denn das liefert jeweils ein x_n mit $\|x_n\| = 1$ und $\| x_m - x_n \| \geqq 1/2$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$. Daher ist K nicht kompakt.

„$\Longleftarrow$“: Da jeder endlichdimensionale normierte Raum ein Banachraum ist und überdies in endlichdimensionalen Vektorräumen jede lineare Abbildung in irgendeinen beliebigen normierten Raum beschränkt ist[14], folgt aus Satz 1.15 sofort, daß endlichdimensionale normierte Räume

[12] Üblicherweise als *Lemma von Riesz* bezeichnet; siehe beispielsweise [314].

[13] Ein weiteres Resultat von Riesz [310]

[14] Solche und ähnliche Aussagen über endlichdimensionale Vektorräume findet man in jedem Standardlehrbuch der linearen Algebra.

stets kompakte abgeschlossene Einheitskugeln besitzen. Ist folglich $\mathcal{E}$ ein normierter Raum mit nicht kompakter abgeschlossener Einheitskugel, so ist $\mathcal{E}$ unendlichdimensional. □

Für unendlichdimensionale Hilberträume läßt sich der Beweis auch ohne Verwendung von Lemma 4.28 führen, denn hier liefert jedes vollständige Orthonormalsystem $(\psi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ eine geeignete Folge. Wählt man nämlich ein abzählbares Teilsystem $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt

$$\|\,\psi_m - \psi_n\,\|^2 = (\,\psi_m - \psi_n, \psi_m - \psi_n\,) = (\psi_m, \psi_m) + (\psi_n, \psi_n) - 2\,\mathfrak{Re}\,(\psi_m, \psi_n) = 2$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$. Natürlich gilt obige Aussage auch für jede abgeschlossene Kugel mit beliebigem anderem Mittelpunkt $x \neq 0$. Lemma 4.29 hat unter anderem die verblüffende Konsequenz, daß das Innere von kompakten Teilmengen unendlichdimensionaler normierter Räume stets leer ist. Denn andernfalls wäre jede abgeschlossene Kugel um einen beliebigen inneren Punkt einer solchen Menge kompakt – ein Widerspruch. Lemma 4.29 zeigt außerdem, daß die vom $\mathbb{C}^n$ und damit von allen endlichdimensionalen normierten Räumen wohlbekannte Äquivalenz der Kompaktheit von Mengen zu deren Eigenschaft, abgeschlossen und beschränkt zu sein, in unendlichdimensionalen normierten Räumen nicht mehr gilt. Entsprechend folgt daraus auch, daß dort nicht mehr jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Beide Aussagen werden erst wieder richtig, wenn man statt der starken die schwache Topologie[15] verwendet und sich auf reflexive Banachräume beschränkt. In solchen Räumen sind alle stark beschränkten und schwach abgeschlossenen Teilmengen schwach folgenkompakt. – Wir können nun die folgende Aussage über Spektren kompakter Abbildungen beweisen.

4.30 Satz: *Ist $\mathcal{E}$ ein unendlichdimensionaler Banachraum und $\mathcal{A} \in \mathscr{C}(\mathcal{E})$, dann ist $0 \in \sigma(\mathcal{A})$.*

Beweis: Angenommen, es gälte $0 \notin \sigma(\mathcal{A})$, dann wäre $0 \in \rho(\mathcal{A})$ und $\mathcal{A}$ invertierbar. Folglich wäre $\mathbf{1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$ und damit auch die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathcal{E}$ kompakt – ein Widerspruch nach Lemma 4.29. □

Die Verwendung von Lemma 4.29 zeigt, daß die Voraussetzung $\dim \mathcal{E} = \infty$ wesentlich für die allgemeine Gültigkeit der Aussage von Satz 4.30 ist.

Auch über die restlichen Punkte von $\sigma(\mathcal{A})$ lassen sich für $\mathcal{A} \in \mathscr{C}(\mathcal{E})$ präzise Feststellungen treffen. Wir beginnen dazu mit einem weiteren Hilfssatz.

4.31 Lemma: *$\mathcal{E}$ sei ein Banachraum und $\mathcal{A} \in \mathscr{C}(\mathcal{E})$. Dann ist $\ker(\mathcal{A} - 1)$ endlichdimensional und $\operatorname{ran}(\mathcal{A} - 1)$ abgeschlossen.*

Beweis: Für alle $x \in \ker(\mathcal{A} - 1)$ ist $\mathcal{A}x = x$. Für die abgeschlossene Einheitskugel K von $\ker(\mathcal{A} - 1)$ folgt daraus $\mathcal{A}\mathrm{K} = \mathrm{K}$. Außerdem ist $\mathcal{A}\mathrm{K}$ und damit K wegen $\mathcal{A} \in \mathscr{C}(\mathcal{E})$ präkompakt, also auch kompakt. Nach Lemma 4.29 ist daher $\ker(\mathcal{A} - 1)$ endlichdimensional. Außerdem ist für jedes $y \in \operatorname{ran}(\mathcal{A} - 1)$

$$d(y) := \inf\{\,\|\,y - a\,\| \mid a \in \ker(\mathcal{A} - 1)\,\} > 0,$$

[15] Siehe hierzu Abschnitt 2.2.3.7.

daher gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\ker(\mathcal{A}-1)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}\|a_n-y\|=d(y)$. Somit existiert für jedes $\varepsilon>0$ ein $N\in\mathbb{N}$ mit

$$d(y)\leqq\|a_n-y\|\leqq\frac{d(y)}{1-\varepsilon}$$

für alle $n>N$. Daraus folgt

$$\|a_n\|\leqq\|a_n-y\|+\|y\|\leqq\frac{d(y)}{1-\varepsilon}+\|y\|,$$

das heißt, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Weil $\ker(\mathcal{A}-1)$ wie gezeigt endlichdimensional ist, gibt es zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty}a_{n_j}=a_0\in\ker(\mathcal{A}-1)$ und $\|a_0-y\|=d(y)$. Nun wählen wir ein Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathcal{A}-1)x_n=:x\in\mathcal{E}$. Wie soeben gezeigt gibt es dazu eine Folge $(a_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\ker(\mathcal{A}-1)$ mit $\|a_{0,n}-x_n\|=d(y)$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Mit dieser gilt

$$\lim_{n\to\infty}(\mathcal{A}-1)(a_{0,n}-x_n)=\lim_{n\to\infty}(\mathcal{A}-1)x_n=x, \tag{4.17}$$

Nimmt man an, die Folge $(a_{0,n}-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei unbeschränkt, dann besitzt diese eine divergente Teilfolge $(a_{0,n_j}-x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$. Daraus erhält man für die Folge $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}:=\dfrac{a_{0,n_j}-x_{n_j}}{\|a_{0,n_j}-x_{n_j}\|}$ mit Hilfe von (4.17)

$$\lim_{j\to\infty}(\mathcal{A}-1)b_j=\lim_{j\to\infty}\frac{(\mathcal{A}-1)x_{n_j}}{\|a_{0,n_j}-x_{n_j}\|}=0. \tag{4.18}$$

Gleichzeitig gilt $\|b_j\|=1$ für alle $j\in\mathbb{N}$, also gibt es zu $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(b_{j_i})_{i\in\mathbb{N}}$, sodaß $(\mathcal{A}\,b_{j_i})_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Mit (4.18) folgt $\lim\limits_{i\to\infty}\mathcal{A}\,b_{j_i}=\lim\limits_{i\to\infty}b_{j_i}=:b$ und damit $b\in\ker(\mathcal{A}-1)$. Auf der anderen Seite gilt

$$\begin{aligned}\inf\left\{\|b_j-a\|\mid a\in\ker(\mathcal{A}-1)\right\}&=\inf\left\{\left\|\frac{a_{0,n_j}-x_{n_j}}{\|a_{0,n_j}-x_{n_j}\|}-a\right\|\;\middle|\;a\in\ker(\mathcal{A}-1)\right\}\\&=\frac{\inf\left\{\left\|a_{0,n_j}-x_{n_j}-\|a_{0,n_j}-x_{n_j}\|\,a\right\|\mid a\in\ker(\mathcal{A}-1)\right\}}{\|a_{0,n_j}-x_{n_j}\|}\\&=\frac{\inf\{\|a-x_{n_j}\|\mid a\in\ker(\mathcal{A}-1)\}}{\|a_{0,n_j}-x_{n_j}\|}=1\end{aligned}$$

und damit

$$\lim_{j\to\infty}\left(\inf\left\{\|b_j-a\|\mid a\in\ker(\mathcal{A}-1)\right\}\right)=\inf\left\{\|b-a\|\mid a\in\ker(\mathcal{A}-1)\right\}=1,$$

ein Widerspruch. Folglich ist $(a_{0,n}-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Wieder gibt es dazu eine Teilfolge $(a_{0,n_j}-x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$, sodaß die Folge $\mathcal{A}(a_{0,n_j}-x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Mit $t:=\lim\limits_{j\to\infty}(a_{0,n_j}-x_{n_j})$ liefern dann (4.17) und die Stetigkeit von $\mathcal{A}$

$$(\mathcal{A}-1)t=x,$$

also ist $x\in\operatorname{ran}(\mathcal{A}-1)$, und folglich ist $\operatorname{ran}(\mathcal{A}-1)$ abgeschlossen. □

Damit können wir nun unter anderem zeigen, daß die Spektren kompakter Abbildungen mit Ausnahme von Null ausschließlich aus isolierten Eigenwerten bestehen.

4.32 Satz: *Jeder Punkt $\lambda \neq 0$ des Spektrums einer kompakten Abbildung auf einem unendlichdimensionalen Banachraum gehört zu dessen reinem Puntspektrum, und die zugehörigen Eigenräume sind endlichdimensional.*

Beweis: $\mathcal{E}$ sei ein Banachraum mit $\dim \mathcal{E} = \infty$ und $\mathcal{A} \in \mathscr{C}(\mathcal{E})$. Angenommen, $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ sei kein Eigenwert von $\mathcal{A}$. Dann ist $\ker(\mathcal{A} - \lambda) = \{0\}$, das heißt, $\mathcal{A} - \lambda$ ist injektiv. Wir zeigen, daß $\mathcal{A} - \lambda$ auch surjektiv und damit bijektiv ist. Nach Corollar 2.36 ist $\mathcal{A} - \lambda$ damit invertierbar. Wäre $\mathcal{A} - \lambda$ nicht surjektiv, dann wäre es auch $\mathcal{T} := \frac{1}{\lambda}\mathcal{A} - 1$ nicht und $\operatorname{ran}\mathcal{T}$ ein echter Unterraum von $\mathcal{E}$. Da $\mathcal{T}$ injektiv ist, liefert die Einschränkung $\mathcal{T} \restriction \operatorname{ran}\mathcal{T}$ einen Isomorphismus auf $\operatorname{ran}\mathcal{T}$. Schreiben wir $\mathcal{U}_n = \operatorname{ran}\mathcal{T}^n$, dann ist folglich $\mathcal{U}_{n+1}$ ein echter Unterraum von $\mathcal{U}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $\frac{1}{\lambda}\mathcal{A} \in \mathscr{C}(\mathcal{E})$, nach Lemma 4.31 ist daher $\mathcal{U}_1$ und damit $\mathcal{U}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossen. Durch Anwendung von Lemma 4.28 auf $\mathcal{U}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konstruieren wir nun eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\inf\limits_{a\in\mathcal{U}_{n+1}} \|x_n - a\| \geqq 1/2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ ist

$$\frac{1}{\lambda}(\mathcal{A}x_m - \mathcal{A}x_n) = \left(\frac{1}{\lambda}\mathcal{A} - 1\right)x_m - \left(\frac{1}{\lambda}\mathcal{A} - 1\right)x_n + x_m - x_n$$

und damit $\mathcal{A}x_m - \mathcal{A}x_n \in \lambda x_n + \mathcal{U}_{n+1}$. Folglich gilt

$$\|\mathcal{A}x_m - \mathcal{A}x_n\| \geqq \frac{\lambda}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, das heißt, die Folge $(\mathcal{A}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keine konvergente Teilfolge, und $\mathcal{A}$ ist nicht kompakt – ein Widerspruch. Damit ist $\mathcal{A} - \lambda$ surjektiv, und jedes $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$ ist ein Eigenwert von $\mathcal{A}$.

Ist $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$, dann ist $\ker(\mathcal{A} - \lambda)$ dessen Eigenraum. Da mit $\mathcal{A}$ auch $\frac{1}{\lambda}\mathcal{A}$ kompakt ist, ist nach Lemma 4.31 $\ker(\frac{1}{\lambda}\mathcal{A} - 1)$ und damit auch $\ker(\mathcal{A} - \lambda)$ endlichdimensional. □

Auch die Verteilung der Eigenwerte von Abbildungen aus $\mathscr{C}(\mathcal{E})$ läßt sich nun beschreiben; Details beinhaltet der folgende

4.33 Satz: *Die Spektren kompakter Abbildungen sind höchstens abzählbar unendliche Punktmengen, deren einziger möglicher Häufungspunkt $\lambda = 0$ ist.*

Beweis: Es seien $\mathcal{E}$ ein Banachraum und $\mathcal{A} \in \mathscr{C}(\mathcal{E})$. Wäre die Behauptung falsch, dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$, sodaß die Menge $\mathrm{A} = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \mid |\lambda| > \varepsilon\}$ unendlich wäre. Nach Satz 4.32 sind alle Elemente von A Eigenwerte von $\mathcal{A}$; insbesondere gibt es dann eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Eigenwerten und eine Folge zugehöriger Eigenvektoren $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|\lambda_n| > \varepsilon$ und $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\lambda_n \neq \lambda_m$ für $n \neq m$. Weiter sei $\mathcal{X} = \operatorname{span}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann wird durch $\mathcal{X}_n = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ eine Folge $(\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Unterräume von $\mathcal{X}$ definiert; für diese gilt $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 4.28 gibt es außerdem eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{X}$ mit $y_n \in \mathcal{X}_n$ und $\|y_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodaß

$$d_{n+1} := \inf_{b\in\mathcal{X}_n} \|\, y_{n+1} - b \,\| \geqq \frac{1}{2}$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion und Satz 4.26 gibt es Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, sodaß

$$\mathcal{A}\, y_n = \mathcal{A} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, \mathcal{A}\, x_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, \alpha_j\, x_j$$

und

$$\lambda_n\, y_n - \mathcal{A}\, y_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_n\, \alpha_j\, x_j - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, \alpha_j\, x_j = \sum_{j=1}^{n-1} (\, \lambda_n - \lambda_j \,)\, \alpha_j\, x_j$$

gelten, und es folgt $\mathcal{A}\, y_n \in \mathcal{X}_n$ und $\lambda_n\, y_n - \mathcal{A}\, y_n \in \mathcal{X}_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus erhalten wir für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ wegen $\mathcal{A}\, y_m, \mathcal{A}\, y_n \in \mathcal{X}_{m-1}$

$$\|\, \mathcal{A}\, y_m - \mathcal{A}\, y_n \,\| = |\lambda_m| \left\| \, y_m - \frac{1}{\lambda_m} (\, \mathcal{A}\, y_m - \lambda_m\, y_m - \mathcal{A}\, y_n \,) \right\| \geqq |\lambda_m|\, d_m > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Somit besitzt die Folge $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge. Da die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, wäre $\mathcal{A}$ dann nicht kompakt – ein Widerspruch. $\square$

Satz 4.33 besagt mit anderen Worten, daß das Spektrum einer kompakten Abbildung, sofern es undlich viele Elemente enthält, stets eine Nullfolge ist.

4.3.4 Selbstadjungierte Operatoren

Ab sofort sei im gesamten restlichen Buch $\mathcal{H}$ generell ein *unendlichdimensionaler, komplexer Hilbertraum*. Wir überzeugen uns zunächst davon, daß der hier betrachtete Gegenstand in jedem Fall nicht auf Trivialitäten hinausläuft, indem wir die Aussagen der Sätze 4.19 und 4.30 in geeigneter Form auf unbeschränkte Exemplare ausdehnen.

4.34 Satz: *Für jeden normalen Operator $\widehat{A}$ auf einem Hilbertraum gilt $\sigma(\widehat{A}\,) \neq \emptyset$.*

Beweis: Wäre $\sigma(\widehat{A}\,) = \emptyset$ und damit $\rho(\widehat{A}\,) = \mathbb{C}$, dann gälte insbesondere $0 \in \rho(\widehat{A})$. Hieraus folgt $\widehat{A}^{-1} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, also gilt $\widehat{A}\,\widehat{A}^{-1} = \mathbf{1}$. Nach Satz 4.19 ist dann $\sigma(\widehat{A}^{-1}) \neq \emptyset$. Für alle $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ folgt aus $(\, \widehat{A}^{-1} - \zeta \,)\, \psi = 0$

$$(\, \mathbf{1} - \zeta\, \widehat{A}\,)\, \widehat{A}^{-1}\psi = -\zeta \left(\widehat{A} - \frac{1}{\zeta} \right) \widehat{A}^{-1}\psi = 0.$$

Damit gilt $\widehat{A}^{-1}\psi \in \ker(\, \widehat{A} - 1/\zeta \,)$. Das zieht $\psi = 0$ nach sich, denn andernfalls wäre $\widehat{A}^{-1}\psi \in \sigma(\widehat{A}\,)$, das Spektrum von $\widehat{A}$ wurde jedoch als leer angenommen. Folglich ist $\ker(\, \widehat{A}^{-1} - 1/\zeta \,) = \{0\}$, und $\widehat{A}^{-1} - 1/\zeta$ ist injektiv. Andererseits ist $\widehat{A} - 1/\zeta$ für alle $\zeta \in \mathbb{C}$

invertierbar, also insbesondere surjektiv; für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ gibt es daher ein $\chi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ mit $(\widehat{A} - 1/\zeta)\,\chi = \varphi$, und es folgt

$$\left(\widehat{A}^{-1} - \frac{1}{\zeta}\right)\widehat{A}\chi = -\left(\frac{1}{\zeta}\widehat{A} - 1\right)\widehat{A}^{-1}\widehat{A}\chi = -\frac{1}{\zeta}\left(\widehat{A} - \frac{1}{\zeta}\right)\chi = \varphi.$$

Somit ist $\widehat{A}^{-1} - 1/\zeta$ auch surjektiv, also bijektiv und nach Corollar 2.36 invertierbar. Es gilt folglich $\zeta \in \rho(\widehat{A})$ für alle $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und daher $\sigma(\widehat{A}) \subset \{0\}$, und insgesamt erhält man $\sigma(\widehat{A}) = \{0\}$. Da $\widehat{A}$ normal ist, gilt das auch für $\widehat{A}^{-1}$, und Satz 4.27 liefert

$$\|\widehat{A}^{-1}\| = r(\widehat{A}^{-1}) = 0.$$

Daraus folgt $\widehat{A}^{-1} = 0$ – ein Widerspruch. □

Es wird sich im weiteren Verlauf dieses Abschnitts zeigen, daß die Spektren selbstadjungierter Operatoren spezielle, insbesondere für deren Interpretation innerhalb der Quantenmechanik besonderes wichtige Eigenschaften aufweisen. Wie üblich ist auch hier die schwächere Voraussetzung symmetrischer Oparatoren nicht ausreichend, es sei denn, letztere seien beschränkt, da sie nur dann automatisch auch selbstadjungiert sind. Das ist jedoch gerade in der Quantenmechamik meist nicht der Fall. Zur Einstimmung sind dabei zwei Beobachtungen über Eigenwerte und Eigenvektoren selbstadjungierter Operatoren gut geeignet, die auch in der elementaren linearen Algebra bereits auftauchen. Diese sind wegweisend für sehr viel tieferliegende Resultate, die wir weiter unten im Detail diskutieren werden. Die erste beschreibt die geometrische Lage von Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten.

4.35 Satz: *$\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum, $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$ und λ und μ zwei Eigenwerte von $\widehat{A}$. Gilt $\lambda \neq \mu$, dann sind die zugehörigen Eigenvektoren orthogonal.*

Beweis: Aus $\widehat{A}\psi = \lambda\,\psi$ und $\widehat{A}\varphi = \mu\,\varphi$ folgt einerseits

$$(\varphi, \widehat{A}\psi) = \lambda\,(\varphi, \psi),$$

anderseits

$$(\varphi, \widehat{A}\psi) = (\widehat{A}\varphi, \psi) = \mu\,(\varphi, \psi)$$

und insgesamt damit

$$(\mu - \lambda)\,(\varphi, \psi) = 0.$$

Wegen $\lambda \neq \mu$ liefert das $(\varphi, \psi) = 0$. □

Die zweite Aussage dieses Abschnitts betrifft die Lage der Eigenwerte in der komplexen Ebene.

4.36 Satz: *Ist $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertrtaum, dann sind alle Eigenwerte von $\widehat{A}$ reell.*

Beweis: ψ sei ein Eigenvektor zum Eigenwert λ des selbstadjungierten Operators $\widehat{A}$, es gelte also $\widehat{A}\,\psi = \lambda\,\psi$. Hieraus folgt

$$(\psi, \widehat{A}\,\psi) = \lambda\,(\psi, \psi) = \lambda\,\|\psi\|^2.$$

Aus $\widehat{A}^* = \widehat{A}$ folgt außerdem

$$(\psi, \widehat{A}\,\psi) = (\widehat{A}^*\,\psi, \psi) = (\widehat{A}\,\psi, \psi) = \overline{(\psi, \widehat{A}\,\psi)}$$

und damit $\lambda\,\|\psi\|^2 = \overline{\lambda\,\|\psi\|^2}$, das heißt, $\lambda\,\|\psi\|^2$ ist reell. Da $\|\psi\|^2$ reell ist, folgt daraus die Behauptung. □

Wie wir gesehen haben, bilden Eigenwerte im allgemeinen nur einen Teil des Spektrums eines Operators. Damit stellt sich die Frage, ob sich die Aussage von Satz 4.36 auf die gesamten Spektren erweitern läßt. Dies ist in der Tat der Fall; bevor wir uns jedoch damit beschäftigen, beschaffen wir uns zwei Hilfssätze.

4.37 Lemma *Ist $\widehat{A}$ ein abgeschlossener und $\widehat{B}$ ein beschränkter Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann ist $\widehat{A} + \widehat{B}$ abgeschlossen.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\operatorname{dom}\widehat{A} = \operatorname{dom}(\,\widehat{A} + \widehat{B}\,)$. Ist $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\operatorname{dom}(\,\widehat{A} + \widehat{B}\,)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = \psi$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (\,\widehat{A} + \widehat{B}\,)\,\psi_n = \varphi$, dann gilt nach Voraussetzung einerseits $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$ und $\widehat{A}\,\psi = \varphi - \widehat{B}\,\psi$ sowie andererseits

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{A}\,\psi_n = \lim_{n\to\infty} [\,(\,\widehat{A} + \widehat{B}\,)\,\psi_n - \widehat{B}\,\psi_n\,] = \varphi - \widehat{B}\,\psi.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Eine direkte Konsequenz hieraus ist das nachstehende

4.38 Corollar: *Für jeden abgeschlossenen Operator $\widehat{A}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und jedes $\zeta \in \mathbb{C}$ ist* $\operatorname{ran}(\,\widehat{A} - \zeta\,)$ *abgeschlossen.*

Nun beweisen wir den folgenden fundamentalen

4.39 Satz: *$\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum. Dann liegt das Spektrum jedes selbstadjungierten Operators auf $\mathcal{H}$ ganz auf der reellen Achse.*

Beweis: Sei $\widehat{A} = \widehat{A}^*$ und $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, das heißt, es gelte $\zeta = \xi + i\,\eta$ mit $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ und $\eta \neq 0$. Zunächst folgt daraus für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$ nach Satz 3.2

$$\begin{aligned}
\|\,(\,\widehat{A} - \lambda\,)\,\psi\,\|^2 &= \|\,(\,\widehat{A} - \xi - i\,\eta\,)\,\psi\,\|^2 \\
&= \|\,(\,\widehat{A} - \xi\,)\,\psi\,\|^2 + i\,\eta\,[\,((\,\widehat{A} - \xi\,)\,\psi, \psi) - (\psi, (\,\widehat{A} - \xi\,)\,\psi)\,] + \eta^2\,\|\psi\|^2 \\
&= \|\,(\,\widehat{A} - \xi\,)\,\psi\,\|^2 + i\,\eta\,[\,((\,\widehat{A} - \xi\,)\,\psi, \psi) - \overline{((\,\widehat{A} - \xi\,)\,\psi, \psi)}\,] + \eta^2\,\|\psi\|^2
\end{aligned}$$

$$= \| (\widehat{A} - \xi)\psi \|^2 + 2\eta\,\mathfrak{Im}\,((\widehat{A} - \xi)\psi, \psi) + \eta^2 \|\psi\|^2$$
$$= \| (\widehat{A} - \xi)\psi \|^2 + 2\eta\,\mathfrak{Im}\,[(\widehat{A}\psi, \psi) - \xi \|\psi\|^2] + \eta^2 \|\psi\|^2$$
$$= \| (\widehat{A} - \xi)\psi \|^2 + \eta^2 \|\psi\|^2 \geqq \eta^2 \|\psi\|^2,$$

Es gilt also die Ungleichung (wähle $\eta = \delta$)

$$\| (\widehat{A} - \zeta)\psi \| \geqq \delta \|\psi\| \tag{4.19}$$

mit geeignetem $\delta > 0$. Aus dieser Ungleichung folgt, daß ζ kein Eigenwert von $\widehat{A}$ sein kann. Nehmen wir nun an, $\widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta)$ wäre nicht beschränkt, dann existiert eine divergente Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta)\,\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|} = \infty.$$

Für diese gilt

$$\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} = \frac{(\widehat{A} - \zeta)\,\widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta)\,\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$$

und durch Bilden der Norm links und rechts wegen (4.19) weiter

$$1 = \left\| \frac{(\widehat{A} - \zeta)\,\widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta)\,\varphi_n}{\|\varphi_n\|} \right\| \geqq \delta\,\frac{\|\widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta)\,\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ – ein Widerspruch. Nun nehmen wir umgekehrt an, $\widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta)$ sei beschränkt, es gebe also eine Konstante $C > 0$, sodaß $\|\widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta)\,\psi\| \leqq C\,\|\psi\|$ gilt für alle $\psi \in \mathcal{H}$. Für die Definitionsmenge der Resolvente gilt $\operatorname{dom} \widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta) = \operatorname{ran}(\widehat{A} - \zeta)$, das heißt, zu jedem $\varphi \in \operatorname{dom} \widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta)$ gibt es ein $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\varphi = (\widehat{A} - \zeta)\psi$. Damit folgt

$$\|\widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta)\,\varphi\| = \| \widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta)\,(\widehat{A} - \zeta)\psi \| = \|\psi\| \leqq C\,\|\varphi\| = C\,\| (\widehat{A} - \zeta)\psi \|,$$

und mit $\delta = 1/C$ ist das gerade die Ungleichung (4.19). Zusammengenommen ist somit $\widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta)$ genau dann beschränkt, wenn (4.19) gilt. Nach Satz 3.20 (ii) ist $\widehat{A}$ abgeschlossen, somit ist nach Corollar 4.38 auch $\widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta)$ abgeschlossen. $\widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta)$ ist außerdem wie gezeigt beschränkt, folglich ist $\operatorname{dom} \widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$. Wäre nun $\operatorname{dom} \widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta)) \subsetneqq \mathcal{H}$, so gäbe es ein orthogonales Komplement, also Elemente aus $\mathcal{H}$, die zu $\operatorname{dom} \widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta)$ senkrecht sind, etwa $\chi \neq 0$ mit $(\chi, \xi) = 0$ für alle $\xi \in \operatorname{dom} \widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta) = (\widehat{A} - \zeta)\operatorname{dom} \widehat{A}$. Hieraus folgt

$$(\chi, (\widehat{A} - \zeta)\tau) = (\chi, \widehat{A}\tau) - (\chi, \zeta\tau) = 0$$

für alle $\tau \in \operatorname{dom} \widehat{A}$, also weiter

$$(\chi, \widehat{A}\tau) = (\chi, \zeta\tau)$$

und damit

$$(\widehat{A}^*\chi, \tau) = (\overline{\zeta}\,\chi, \tau)$$

für alle $\tau \in \operatorname{dom} \widehat{A}$. Weil $\operatorname{dom} \widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, gilt demnach $\chi \in \operatorname{dom} \widehat{A}^*$ und $\widehat{A}^*\chi = \overline{\zeta}\,\chi$. Wegen $\widehat{A} = \widehat{A}^*$ wäre dann $\overline{\zeta}$ ein Eigenwert von $\widehat{A}$ – ein Widerspruch, da die Eigenwerte rein reell sind. Damit ist $\widehat{R}_{\widehat{A}}(\zeta)$ auf ganz $\mathcal{H}$ definiert, und es folgt die Behauptung □

So nebenbei ist bei obigem Beweis in Gestalt von Ungleichung (4.19) ein Kriterium für die Regularität oder Singularität komplexer Zahlen mit herausgekommen, das extra erwähnt werden sollte.

4.40 Corollar: *(i)* $\lambda \in \mathbb{C}$ *ist genau dann singulärer Punkt eines selbstadjungierten Operators* $\widehat{A}$, *wenn es eine transfinite Folge* $(\psi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ *in* $\operatorname{dom} \widehat{A}$ *gibt mit* $\lim\limits_{\gamma<\Gamma} \| (\widehat{A} - \lambda)\, \psi_\gamma \| = 0.$

(ii) λ *ist genau dann regulärer Punkt von* $\widehat{A}$, *wenn es für alle* $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ *ein* $\delta > 0$ *gibt mit* $\| (\widehat{A} - \lambda)\, \psi \| \geqq \delta \, \|\psi\|$.

Wir vermerken ausdrücklich, daß beim Beweis von Satz 4.39 explizit von der Selbstadjungiertheit des betrachteten Operators Gebrauch gemacht wird. Das bedeutet, daß die Eigenschaft der Spektren, rein reell zu sein, *nur für selbstadjungierte unbeschränkte Operatoren garantiert vorliegt; bei symmetrischen Operatoren muß das nicht der Fall sein*. Hier läßt sich lediglich eine wesentlich schwächere Aussage etablieren [57]. Dazu sind zunächst zwei Hilfssätze zu betrachten.

4.41 Lemma: *Es seien* $\mathcal{H}$ *ein Hilbertraum,* $\widehat{A}$ *ein abgeschlossener symmetrischer Operator auf* $\mathcal{H}$ *und* $\lambda = \xi + i\,\eta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. *Dann ist* $\operatorname{ran}(\widehat{A} - \lambda)$ *abgeschlossen.*

Beweis: Für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ gilt wie im Beweis von Satz 4.39 gezeigt

$$\| (\widehat{A} - \lambda)\, \psi \|^2 = \| (\widehat{A} - \xi)\, \psi \|^2 + \eta^2 \, \|\psi\|^2 \geqq \eta^2 \, \|\psi\|^2, \tag{4.20}$$

Ist $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\operatorname{dom} \widehat{A}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} (\widehat{A} - \lambda)\, \psi_n := \varphi$, dann führt (4.20) auf

$$\lim_{n,m\to\infty} \| \psi_m - \psi_n \| = 0,$$

das heißt, $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}$, und es gibt somit ein $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = \psi$. Damit gilt $\psi_n \oplus (\widehat{A} - \lambda)\, \psi_n \in \Gamma(\widehat{A} - \lambda)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n \oplus (\widehat{A} - \lambda)\, \psi_n = \psi \oplus \varphi$, also gilt auch $\psi \oplus \varphi \in \Gamma(\widehat{A} - \lambda)$. Folglich ist $\varphi \in \operatorname{ran}(\widehat{A} - \lambda)$, und $\Gamma(\widehat{A} - \lambda)$ ist abgeschlossen. Daraus folgt die Behauptung. □

4.42 Lemma: $\widehat{A}$ *sei ein ein abgeschlossener symmetrischer Operator auf einrem Hilbertraum* $\mathcal{H}$. *Dann ist die algebraische Dimension von* $\ker(\widehat{A}^* - \lambda)$ *konstant für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathfrak{Im}\,\lambda > 0$ *und konstant für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathfrak{Im}\,\lambda < 0$.

Beweis: Sei $\lambda = \xi + i\,\eta \in \mathbb{C}$ mit $\eta \neq 0$. Nach Lemma 4.41 ist $\operatorname{ran}(\widehat{A} - \overline{\lambda})$ abgeschlossen. Nach Lemma 3.25 gilt daher $\operatorname{ran}(\widehat{A} - \overline{\lambda}) = [\ker(\widehat{A}^* - \lambda)]^\perp$. Nimmt man nun an, für $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \zeta| < |\eta|$ sei $\ker(\widehat{A}^* - \zeta) \cap [\ker(\widehat{A}^* - \lambda)]^\perp \neq \{0\}$, dann gibt es ein

$\psi \in \ker(\widehat{A}^* - \zeta) \cap [\ker(\widehat{A}^* - \lambda)]^\perp = \ker(\widehat{A}^* - \zeta) \cap \operatorname{ran}(\widehat{A} - \overline{\lambda})$ mit $\|\psi\| = 1$. Für $\varphi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ mit $(\widehat{A} - \overline{\lambda})\varphi = \psi$ folgt

$$\begin{aligned}((\widehat{A}^* - \zeta)\psi, \varphi) &= (\psi, (\widehat{A} - \overline{\zeta})\varphi) = (\psi, (\widehat{A} - \overline{\lambda} + \overline{\lambda} - \overline{\zeta})\varphi) \\ &= (\psi, (\widehat{A} - \overline{\zeta})\varphi) + (\lambda - \zeta)(\psi, \varphi) \\ &= \|\psi\|^2 + (\lambda - \zeta)(\psi, \varphi) = 1 + (\lambda - \zeta)(\psi, \varphi) = 0,\end{aligned}$$

und damit

$$|\eta|\,\|\varphi\| > |\lambda - \zeta|\,\|\varphi\| \geqq |\lambda - \zeta|\,|(\psi, \varphi)| = 1.$$

Wegen (4.20) gilt jedoch

$$1 = \|\psi\|^2 = \|(\widehat{A} - \overline{\lambda})\varphi\|^2 \geqq \eta^2\,\|\varphi\|,$$

ein Widerspruch. Daher gilt $\ker(\widehat{A}^* - \zeta) \cap [\ker(\widehat{A}^* - \lambda)]^\perp = \{0\}$. Nun sei $\widehat{P}$ die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\ker(\widehat{A}^* - \lambda)$ und $\widehat{T} = \widehat{P} \upharpoonright \ker(\widehat{A}^* - \zeta)$. Nach Konstruktion ist $\widehat{T}$ injektiv, sodaß

$$\dim \ker(\widehat{A}^* - \zeta) \leqq \dim \ker(\widehat{A}^* - \lambda)$$

gilt für alle $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \zeta| < |\mathfrak{Im}\,\lambda|$. Für $|\lambda - \zeta| < |\eta|/2$ ist $|\mathfrak{Im}\,\lambda - \mathfrak{Im}\,\zeta| < |\eta|/2$ und damit $|\mathfrak{Im}\,\zeta| \geqq |\mathfrak{Im}\,\lambda|/2$. Das wiederum liefert $|\zeta - \lambda| < |\mathfrak{Im}\,\zeta|$, das heißt, man darf λ und ζ vertauschen. Es gilt also auch

$$\dim \ker(\widehat{A}^* - \lambda) \leqq \dim \ker(\widehat{A}^* - \zeta),$$

und insgesamt erhält man

$$\dim \ker(\widehat{A}^* - \zeta) = \dim \ker(\widehat{A}^* - \lambda)$$

für alle $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \zeta| < |\mathfrak{Im}\,\lambda|$. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ist somit $\dim \ker(\widehat{A}^* - \zeta)$ auf jeder offenen Kreisscheibe K um ζ mit $K \cap \mathbb{R} = \emptyset$ konstant. Daraus folgt die Behauptung. □

Damit erhält man das nachstehende Resultat über die Spektren symmetrischer Operatoren.

4.43 Satz: *$\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum und $\widehat{A}$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator auf $\mathcal{H}$. Dann liegt genau einer der folgenden Fälle vor.*

(i) $\sigma(\widehat{A}) = \mathbb{C}$,

(ii) $\sigma(\widehat{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}\,\lambda \geqq 0\}$.

(iii) $\sigma(\widehat{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}\,\lambda \leqq 0\}$,

(iv) $\sigma(\widehat{A}) \subseteqq \mathbb{R}$,

Beweis: Sei $\widehat{A} \subseteqq \widehat{A}^*$ und $\lambda = \xi + i\,\eta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Wegen (4.20) ist $\widehat{A} - \lambda$ injektiv, und nach Lemma 4.41 ist $\operatorname{ran}(\,\widehat{A} - \lambda\,)$ abgeschlossen. Ist $\widehat{A} - \lambda$ zusätzlich surjektiv, dann folgt $\lambda \in \rho(\widehat{A}\,)$. Nach Lemma 3.25 gilt $\operatorname{ran}(\,\widehat{A} - \overline{\lambda}\,) = [\,\ker(\,\widehat{A}^* - \lambda\,)\,]^\perp$ und damit auch $[\,\operatorname{ran}(\,\widehat{A} - \overline{\lambda}\,)\,]^\perp = \ker(\,\widehat{A}^* - \lambda\,)$. Nach Lemma 4.42 ist folglich $\dim \operatorname{ran}(\,\widehat{A} - \overline{\lambda}\,)$ jeweils konstant für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathfrak{Im}\,\lambda > 0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathfrak{Im}\,\lambda < 0$. Dann ist entweder

$$\dim \operatorname{ran}(\,\widehat{A} - \lambda\,) = \dim \operatorname{ran}(\,\widehat{A} - \overline{\lambda}\,) \neq \dim \mathcal{H},$$

und es gilt (i), oder

$$\dim \operatorname{ran}(\,\widehat{A} - \lambda\,) \neq \dim \operatorname{ran}(\,\widehat{A} - \overline{\lambda}\,) = \dim \mathcal{H},$$

und es gilt entweder (ii) oder (iii), oder

$$\dim \operatorname{ran}(\,\widehat{A} - \lambda\,) = \dim \operatorname{ran}(\,\widehat{A} - \overline{\lambda}\,) = \dim \mathcal{H},$$

und es gilt (iv). □

Für beschränkte Operatoren läßt sich die Aussage von Satz 4.39 noch präzisieren, wie das folgende Resultat zeigt.

4.44 Satz: *$\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum und $\widehat{A}$ ein beschränkter selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$, außerdem seien $M := \sup\limits_{\|\psi\|=1} (\widehat{A}\,\psi, \psi)$ und $m := \inf\limits_{\|\psi\|=1} (\widehat{A}\,\psi, \psi)$. Dann liegt $\sigma(\widehat{A}\,)$ in dem abgeschlossenen Intervall $[m, M]$, und es gilt $m, M \in \sigma(\widehat{A}\,)$.*

Beweis: Ist $\zeta > M$ und $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\|\psi\| = 1$, dann gilt $(\widehat{A}\,\psi, \psi) \leqq M < \zeta$ und damit

$$\zeta - M \leqq |\,(\,\widehat{A} - \zeta\,)\,\psi, \psi)\,| \leqq \|\,(\,\widehat{A} - \zeta\,)\,\psi\,\|\,\|\psi\| \leqq \|\,(\,\widehat{A} - \zeta\,)\,\|\,\|\psi\|^2 = \|\,(\,\widehat{A} - \zeta\,)\,\|$$

also für alle $\varphi \in \mathcal{H}$

$$\|\,(\,\widehat{A} - \zeta\,)\,\varphi\,\| \geqq (\,\zeta - M\,)\,\|\varphi\|.$$

Das ist aber gerade die Ungleichung (4.19) für $\delta = \zeta - M > 0$, und somit gilt $\zeta \notin \sigma(\widehat{A}\,)$ nach Corollar 4.40. Analog folgt aus $\zeta < m$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$

$$\|\,(\,\widehat{A} - \zeta\,)\,\varphi\,\| \geqq (\,m - \zeta\,)\,\|\varphi\|,$$

also ebenfalls $\zeta \notin \sigma(\widehat{A}\,)$.

Nun seien $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$. Durch $\langle\psi, \varphi\rangle := ((\,\widehat{A} - M\,)\,\psi, \varphi)$ wird ein Skalaprodukt und folglich durch $|||\psi||| := \sqrt{\langle\psi, \psi\rangle}$ eine Norm auf $\mathcal{H}$ definiert; nach Satz 2.142 gilt daher

$$|\langle\psi, \varphi\rangle| \leqq |||\psi|||\,|||\varphi|||$$

oder ausführlich geschrieben

$$|\,((\,\widehat{A} - M\,)\,\psi, \varphi)\,|^2 \leqq ((\,\widehat{A} - M\,)\,\psi, \psi)\,((\,\widehat{A} - M\,)\,\varphi, \varphi).$$

Das gilt speziell auch für $\varphi = (\widehat{A} - M)\psi$; in diesem Fall wird daraus

$$\|(\widehat{A} - M)\psi\|^4 \leqq ((\widehat{A} - M)\psi, \psi)\,\|\widehat{A} - M\|\,\|(\widehat{A} - M)\psi\|^2,$$

also

$$\|(\widehat{A} - M)\psi\|^2 \leqq \|\widehat{A} - M\|\,((\widehat{A} - M)\psi, \psi). \tag{4.21}$$

Ist $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}$ mit $\|\varphi_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(\widehat{A}\varphi_n, \varphi_n) = M$, so erhält man $\lim\limits_{n\to\infty}((\widehat{A} - M)\varphi_n, \varphi_n) = 0$ und mit (4.21) hieraus $\lim\limits_{n\to\infty}(\widehat{A} - M)\varphi_n = 0$. Wäre nun $M \notin \sigma(\widehat{A})$, dann wäre $\widehat{A} - M$ invertierbar, und man erhielte

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \lim_{n\to\infty}(\widehat{A} - M)^{-1}(\widehat{A} - M)\varphi_n = 0,$$

ein Widerspruch. Folglich gilt $M \in \sigma(\widehat{A})$. Analog schließt man $m \in \sigma(\widehat{A})$. □

Aus Satz 4.44 folgt unmittelbar, daß $\widehat{A} = 0$ der einzige beschränkte selbstadjungierte Operator mit $\sigma(\widehat{A}) = \{0\}$ ist. – Eine noch weitergehende Aussage über deren Spektren erhält man, wenn man sich weiter einschränkt und kompakte Operatoren betrachtet.

4.45 Satz: *Ist $\widehat{A}$ ein kompakter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, so ist mindestens eine der beiden Zahlen $-\|\widehat{A}\|$ und $\|\widehat{A}\|$ ein Eigenwert von $\widehat{A}$.*

Beweis: Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\widehat{A} \neq 0$. Nach Satz 3.18 gibt es eine Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ mit $\|\psi_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty}|(\widehat{A}\psi_n, \psi_n)| = \|\widehat{A}\|$. Da $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $\widehat{A}$ kompakt ist, gibt es außerdem eine Teilfolge $(\psi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty}\widehat{A}\psi_{n_j} = \psi$. Die Folge $(\widehat{A}\psi_{n_j}, \psi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ wiederum ist eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, folglich gibt es nach Satz 1.14 eine Teilfolge $(\psi_{n_{j_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(\psi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodaß $\lim\limits_{k\to\infty}(\widehat{A}\psi_{n_{j_k}}, \psi_{n_{j_k}}) = \lambda$ gilt. Daraus folgt $|\lambda| = \|\widehat{A}\|$ und damit weiter

$$\begin{aligned}
\|(\widehat{A} - \lambda)\psi_{n_{j_k}}\|^2 &= \|\widehat{A}\psi_{n_{j_k}}\|^2 - \lambda\,[(\widehat{A}\psi_{n_{j_k}}, \psi_{n_{j_k}}) + (\psi_{n_{j_k}}, \widehat{A}\psi_{n_{j_k}})] + |\lambda|^2\,\|\psi_{n_{j_k}}\|^2 \\
&= \|\widehat{A}\psi_{n_{j_k}}\|^2 - 2\lambda\,(\widehat{A}\psi_{n_{j_k}}, \psi_{n_{j_k}}) + |\lambda|^2\,\|\psi_{n_{j_k}}\|^2 \\
&\leqq \|\widehat{A}\|^2 - 2\lambda\,(\widehat{A}\psi_{n_{j_k}}, \psi_{n_{j_k}}) + |\lambda|^2 = 2\,[\,|\lambda|^2 - \lambda\,(\widehat{A}\psi_{n_{j_k}}, \psi_{n_{j_k}})\,].
\end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}|(\widehat{A}\psi_n, \psi_n)| = |\lambda|$ liefert das $\lim\limits_{k\to\infty}(\widehat{A} - \lambda)\psi_{n_{j_k}} = 0$, also auch

$$\psi = \lim_{k\to\infty}\widehat{A}\psi_{n_{j_k}} = \lim_{k\to\infty}(\widehat{A} - \lambda)\psi_{n_{j_k}} + \lambda\lim_{k\to\infty}\psi_{n_{j_k}} = \lambda\lim_{k\to\infty}\psi_{n_{j_k}}.$$

Mit $\varphi := \psi/\lambda$ gilt somit $\lim\limits_{k\to\infty}\widehat{A}\psi_{n_{j_k}} = \widehat{A}\varphi = \lambda\,\varphi$, und folglich ist $\lambda = \pm\|\widehat{A}\|$ Eigenwert von $\widehat{A}$. □

Eine unmittelbare Konsequenz ist das folgende

4.46 Corollar: *Jeder selbstadjungierte Operator mit unbeschränktem Spektrum ist unbeschränkt.*

Eine wichtige Sonderform selbstadjungierter Operatoren, die eine eigene Erwähnung verdient, sind Operatoren mit reinem Punktspektrum, also solche, bei denen jedes Element des Spektrums von gleichzeitig auch ein Eigenwert ist. Die Eigenwerte können dabei von endlicher oder unendlichfacher algebraischer Vielfachheit sein. Gilt ersteres, hat das zusätzliche Konsequenzen.

4.47 Satz: *Ist $\mathcal{H}$ ein unendlichdimensionaler Hilbertraum, dann ist jeder selbstadjungierte Operator auf $\mathcal{H}$ mit rein diskretem Spektrum unbeschränkt.*

Beweis: Da $\mathcal{H}$ ein unendlichdimensionaler Hilbertraum ist, jeder Eigenwert λ_n eines Operators $\widehat{A}$ mit rein diskretem Spektrum jedoch nur von endlicher Vielfachheit ist, hat $\widehat{A}$ unendlich viele Eigenwerte, und weil $\lambda_n \in \sigma_{\mathrm{disc}}(\widehat{A})$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt zusätzlich $|\lambda_n| \longrightarrow \infty$ für $n \longrightarrow \infty$. Somit ist $\sigma(\widehat{A})$ unbeschränkt, und mit Corollar 4.46 folgt die Behauptung. $\square$

Details über die Struktur der Spektren selbstadjungierter Operatoren können wir erst im nächsten Abschnitt herleiten; hier können wir uns immerhin schon einmal einen Überblick über deren Unterteilung in diskrete und kontinuierliche Anteile verschaffen. Dazu betrachten wir die nachstehende (stets mögliche) Einteilung der komplexen Zahlen hinsichtlich der Definitionsmenge der Resolvente, die insbesondere auch für unbeschränkte Operatoren funktioniert [262], [374].

4.48 Satz: *$\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum und $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$. Dann gilt folgendes.*

(i) $\lambda \in \rho(\widehat{A})$, *falls* $\widehat{R}_{\widehat{A}}(\lambda)$ *linear und beschränkt ist und* $\operatorname{dom} \widehat{R}_{\widehat{A}}(\lambda) = \mathcal{H}$.

(ii) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(\widehat{A})$, *aber* $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{c}}(\widehat{A})$, *falls* $\operatorname{dom} \widehat{R}_{\widehat{A}}(\lambda) = \overline{\operatorname{dom} \widehat{R}_{\widehat{A}}(\lambda)} \neq \mathcal{H}$.

(iii) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(\widehat{A})$, *aber* $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(\widehat{A})$, *falls* $\operatorname{dom} \widehat{R}_{\widehat{A}}(\lambda) \neq \overline{\operatorname{dom} \widehat{R}_{\widehat{A}}(\lambda)} = \mathcal{H}$.

(iv) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(\widehat{A})$ *und* $\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(\widehat{A})$, *falls* $\operatorname{dom} \widehat{R}_{\widehat{A}}(\lambda) \neq \overline{\operatorname{dom} \widehat{R}_{\widehat{A}}(\lambda)} \neq \mathcal{H}$.

(v) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(\widehat{A})$ *und* $\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(\widehat{A})$, *aber* $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{disc}}(\widehat{A})$, *falls* $\mathcal{H} \ominus \overline{\operatorname{dom} \widehat{R}_{\widehat{A}}(\lambda)}$ *unendlichdimensional ist.*

Die Punkte aus (i) sind die regulären Punkte. Die Punkte aus (ii) sind die isolierten Eigenwerte des Operators $\widehat{A}$. Die Punkte aus (iii) bilden das rein kontinuierliche Spektrum des Operators, und die Punkte aus (iv) sind Eigenwerte, die in das kontinuierliche Spektrum eingebettet sind. Man erkennt hier erneut, daß das diskrete und das kontinuierliche Spektrum nicht notwendig disjunkte Mengen sind. Die Punkte aus (iv) sind die Eigenwerte unendlicher Vielfachheit. Man kann dies auch wie folgt formulieren: Ist $\mathcal{H} \ominus \overline{\operatorname{dom} \widehat{R}_{\widehat{A}}(\lambda)}$ endlich-dimensional, aber nicht $\{0\}$, dann ist λ ein Eigenwert endlicher Vielfachheit, ist $\mathcal{H} \ominus \overline{\operatorname{dom} \widehat{R}_{\widehat{A}}(\lambda)}$ unendlich-dimensional, dann ist λ ein Eigenwert unendlicher Vielfachheit. – Der Begriff des residuellen Spektrums taucht in obigem Satz nicht auf. Das ist jedoch kein Wunder, denn es gilt der folgende

4.49 Satz: *Das residuelle Spektrum eines selbstadjungierten Operators ist leer.*

Beweis: Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$. Wäre $\lambda \in \sigma_{\text{res}}(\widehat{A})$, dann wäre $\lambda \in \mathbb{R}$ nach Satz 4.39 sowie $\widehat{A} - \lambda$ injektiv und $\overline{\operatorname{ran}(\widehat{A} - \lambda)} \neq \mathcal{H}$ nach Definition 4.13 (iii). Nun sei $\varphi \in [\operatorname{ran}(\widehat{A} - \lambda)]^{\perp} \setminus \{0\}$, dann gilt

$$((\widehat{A} - \lambda)\psi, \varphi) = (\psi, (\widehat{A} - \lambda)\varphi) = 0$$

für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ und damit $(\widehat{A} - \lambda)\varphi = 0$. Aber $\widehat{A} - \lambda$ ist injektiv, und folglich ist $\varphi = 0$ – ein Widerspruch. □

Damit kommen wir zur zentralen Thematik der gesamten Theorie der Spektren linearer Operatoren, dem Spektralsatz. Es gibt genauer betrachtet eine ganze Reihe von Spektralsätzen, wovon wir uns auf diejenigen beschränken, die für die Quantenmechanik in erster Linie von Bedeutung sind.

4.4 Der Spektralsatz

Während wir uns bisher im wesentlichen mit der Beschreibung von Spektren beschäftigt haben, wenden wir uns nun der Frage zu, was man mit ihnen anfangen kann. Dabei wird sich zeigen, daß in den Spektren spezieller Operatorenklassen im wesentlichen schon die ganze Information über letztere zu finden ist. Die Details hängen dabei natürlich sehr von den jeweiligen besonderen Eigenschaften der betrachteten Operatoren ab, weswegen wir die Thematik für kompakte, normale und unitäre Operatoren getrennt voneinander diskutieren werden.

4.4.1 Der Spektralsatz für kompakte Operatoren

Wir beginnen mit denjenigen Operatoren, die sich wie bereits erwähnt auch bei unendlichdimensionalen Räumen sehr weitgehend so verhalten, wie man es aus der elementaren linearen Algebra kennt. Das war bisher schon mehr oder weniger gut erkennbar; hier wird es nun noch viel deutlicher.

4.4.1.1 Spektraldarstellung kompakter Operatoren

In der Tat findet man hier für den unendlichdimensionalen Fall Verhältnisse, die völlig analog zu denjenigen im endlichdimensionalen Fall sind, wie gleich das nachstehende Resultat zeigt. Es ist gleichzeitig das erste Beispiel für einen

4.50 Spektralsatz: *Ist $\mathcal{H}$ ein unendlichdimensionaler Hilbertraum und $\widehat{A} \neq 0$ ein kompakter symmetrischer Operator auf $\mathcal{H}$, dann gilt folgendes.*

(i) In $\mathcal{H}$ gibt es eine Orthonormalbasis $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ aus Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten λ_γ von $\widehat{A}$.

(ii) Für alle $\psi \in \mathcal{H}$ gilt

$$\widehat{A}\,\psi = \sum_{\gamma<\Gamma} \lambda_\gamma\,(\psi, \varphi_\gamma)\,\varphi_\gamma. \tag{4.22}$$

Beweis: (i) Nach Satz 4.33 gibt es eine Nullfolge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Eigenwerten von $\widehat{A}$; nach Satz 4.39 sind diese sämtlich reell. Nun betrachten wir zu jedem Eigenwert λ den Unterraum $\ker(\,\widehat{A}-\lambda\,)$ von $\mathcal{H}$. Diese Unterräume sind selbst Hilberträume; nach Satz 2.166 kann man daher in jedem davon eine Orthonormalbasis B_λ wählen und erhält nach Satz 4.35 mit $\mathsf{B} = \bigcup \mathsf{B}_\lambda$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Der Raum $\overline{\operatorname{span}\mathsf{B}}$ enthält alle Eigenwerte von $\widehat{A}$, und nach Konstruktion ist $\widehat{A}\,\overline{\operatorname{span}\mathsf{B}} \subset \overline{\operatorname{span}\mathsf{B}}$. Nimmt man an, daß $\overline{\operatorname{span}\mathsf{B}} \neq \mathcal{H}$ gilt, dann folgt für alle $\psi \in \overline{\operatorname{span}\mathsf{B}}$ und alle $\varphi \in \overline{\operatorname{span}\mathsf{B}}^\perp$

$$(\widehat{A}\,\psi, \varphi) = (\psi, \widehat{A}\,\varphi) = 0$$

und damit $\widehat{A}\,\varphi \in \overline{\operatorname{span}\mathsf{B}}^\perp$, das heißt, es gilt $\widehat{A}\,\overline{\operatorname{span}\mathsf{B}}^\perp \subset \overline{\operatorname{span}\mathsf{B}}^\perp$. Damit sind die Einschränkungen $\widehat{A}_1 := \widehat{A} \restriction \overline{\operatorname{span}\mathsf{B}}$ und $\widehat{A}_2 := \widehat{A} \restriction \overline{\operatorname{span}\mathsf{B}}^\perp$ selbstadjungiert. Für $\zeta \in \sigma(\widehat{A}_1)$ gilt nach Corollar 4.40 in $\overline{\operatorname{span}\mathsf{B}}$

$$\inf_{\|\psi\|=1} \|\,(\,\widehat{A}_1 - \zeta\,)\,\psi\,\| = 0;$$

daraus folgt

$$\inf_{\|\psi\|=1} \|\,(\,\widehat{A} - \zeta\,)\,\psi\,\| = 0$$

in $\mathcal{H}$ und wieder nach Corollar 4.40 somit $\zeta \in \sigma(\widehat{A})$, also $\sigma(\widehat{A}_1) \subset \sigma(\widehat{A})$. Analog erhält man $\sigma(\widehat{A}_2) \subset \sigma(\widehat{A})$. Nun sei $\vartheta \notin \sigma(\widehat{A}_1) \cup \sigma(\widehat{A}_2)$, dann gibt es nach Corollar 4.40 ein $\delta > 0$, sodaß $\|\,(\widehat{A} - \vartheta\,)\,\varphi\,\| \geqq \delta\,\|\varphi\|$ für alle $\varphi \in \overline{\operatorname{span}\mathsf{B}}$ und $\|\,(\widehat{A} - \vartheta\,)\,\chi\,\| \geqq \delta\,\|\chi\|$ für alle $\chi \in \overline{\operatorname{span}\mathsf{B}}^\perp$ gilt. Nach Lemma 2.144 (i) gibt es zu jedem $\psi \in \mathcal{H}$ je ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in \overline{\operatorname{span}\mathsf{B}}$ und $\chi \in \overline{\operatorname{span}\mathsf{B}}^\perp$ mit $\psi = \varphi + \chi$. Nach Satz 2.140 liefert das

$$\|\,(\,\widehat{A} - \vartheta\,)\,\psi\,\|^2 = \|\,(\,\widehat{A} - \vartheta\,)\,\varphi\,\|^2 + \|\,(\,\widehat{A} - \vartheta\,)\,\chi\,\|^2 \geqq \delta^2\,(\,\|\varphi\|^2 + \|\chi\|^2\,) = \delta^2\,\|\psi\|^2,$$

und wiederum nach Corollar 4.40 folgt $\zeta \notin \sigma(\widehat{A})$, also $\sigma(\widehat{A}) = \sigma(\widehat{A}_1) \cup \sigma(\widehat{A}_2)$. Auf der anderen Seite ist $\widehat{A}_2$ beschränkt und nach Satz 4.19 damit $\sigma(\widehat{A}_2) \neq \emptyset$; damit hat $\widehat{A}_2$ in jedem Fall einen Eigenwert und damit auch einen nichtverschwindenden Eigenvektor ξ. Dieser ist nach Konstruktion auch Eigenvektor von $\widehat{A}$, und daraus folgt $\xi \in \overline{\operatorname{span}\mathsf{B}} \cap \overline{\operatorname{span}\mathsf{B}}^\perp = \emptyset$ – ein Widerspruch. Somit ist $\overline{\operatorname{span}\mathsf{B}} = \mathcal{H}$, und nach Satz 2.163 (ii) ist folglich B eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$.

(ii) Nach Satz 2.163 (iv) gilt zunächst formal

$$\widehat{A}\,\psi = \widehat{A}\sum_{\gamma<\Gamma}(\psi,\varphi_\gamma)\,\varphi_\gamma = \sum_{\gamma<\Gamma}(\psi,\varphi_\gamma)\,\widehat{A}\,\varphi_\gamma = \sum_{\gamma<\Gamma}\lambda_\gamma\,(\psi,\varphi_\gamma)\,\varphi_\gamma.$$

Nach Lemma 2.72 gibt es außerdem ein abzählbares Teilsystem $(\varphi_{\gamma_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ mit $\psi = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\psi,\varphi_{\gamma_n})\,\varphi_{\gamma_n}$ für alle $\psi\in\mathcal{H}$. Satz 2.140 und Ungleichung 2.161 liefern damit

$$\begin{aligned}\Big\|\,\widehat{A}\,\psi - \sum_{j=0}^{n}\lambda_{\gamma_j}\,(\psi,\varphi_{\gamma_j})\,\varphi_{\gamma_j}\Big\|^2 &= \Big\|\sum_{j=n+1}^{\infty}\lambda_{\gamma_j}\,(\psi,\varphi_{\gamma_j})\,\varphi_{\gamma_j}\Big\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty}\|\,\lambda_{\gamma_j}\,(\psi,\varphi_{\gamma_j})\,\varphi_{\gamma_j}\,\|^2\\ &\leqq \sum_{j=n+1}^{\infty}|\,\lambda_{\gamma_j}\,(\psi,\varphi_{\gamma_j})\,|^2 \leqq \Big(\|\psi\|\sup_{j\in\mathbb{N}}|\lambda_{\gamma_j}|\Big)^2 < \infty,\end{aligned}$$

für alle $n\in\mathbb{N}$, das heißt, die Reihe auf der rechten Seite von (4.22) konvergiert in der Norm gegen $\widehat{A}\,\psi$ für alle $\psi\in\mathcal{H}$. □

Die Beschränkung auf symmetrische Operatoren in obigem Satz erfolgt hauptsächlich mit Blick auf die Quantenmechanik, da dort solche Operatoren wie bereits erwähnt besonders wichtig sind. Man erhält mit wenig Aufwand aus Satz 4.50 ein ganz ähnliches Resultat auch unter etwas schwächeren Voraussetzungen.

4.51 Corollar: *Ist $\mathcal{H}$ ein unendlichdimensionaler Hilbertraum und $\widehat{N}\neq 0$ ein kompakter normaler Operator auf $\mathcal{H}$, dann gilt folgendes.*

(i) In $\mathcal{H}$ gibt es eine Orthonormalbasis $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ aus Eigenvektoren von $\widehat{N}$.

(ii) Ist λ_γ jeweils der Eigenwert zu φ_γ für alle $\gamma<\Gamma$, dann gilt für alle $\psi\in\mathcal{H}$

$$\widehat{N}\,\psi = \sum_{\gamma<\Gamma}\lambda_\gamma\,(\psi,\varphi_\gamma)\,\varphi_\gamma. \tag{4.23}$$

Beweis: (i) Sei $\widehat{T} = \widehat{N}^*\widehat{N} = \widehat{N}\,\widehat{N}^*$. Dann ist $\widehat{T}$ symmetrisch, nach Satz 4.50 gibt es somit eine Orthonormalbasis $(\chi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ aus Eigenvektoren von $\widehat{T}$ zu reellen Eigenwerten α_γ. Ist $(\mathcal{H}_n)_{\gamma<\Gamma}$ die Familie der zugehörigen paarweise orthogonalen Eigenräume, dann gilt wegen $\widehat{T}\,\widehat{N} = \widehat{N}^*\widehat{N}\,\widehat{N} = \widehat{N}\,\widehat{N}^*\widehat{N} = \widehat{N}\,\widehat{T}$ für alle $\gamma<\Gamma$ und jedes $\psi\in\mathcal{H}_\gamma$ nach Satz 4.3

$$(\,\widehat{T}-\chi_\gamma\,)\,\widehat{N}\,\psi = \widehat{N}\,(\,\widehat{T}-\chi_\gamma\,)\,\psi = \widehat{N}\,(\,\widehat{T}\,\psi-\chi_\gamma\,\psi\,) = \widehat{N}\,0 = 0$$

und damit

$$\widehat{N}\,\mathcal{H}_\gamma \subset \ker(\,\widehat{T}-\chi_\gamma\,) = \mathcal{H}_\gamma.$$

Ist $\widehat{T}\,\psi = 0$ für $\psi\in\mathcal{H}_\gamma$, dann gilt außerdem

$$\|\widehat{N}\,\psi\|^2 = (\widehat{N}\,\psi,\widehat{N}\,\psi) = (\widehat{N}^*\widehat{N}\,\psi,\psi) = 0$$

und damit $\widehat{N}\,\psi = 0$. Folglich ist jedes $\psi \in \mathcal{H}_\gamma$ mit $\psi \neq 0$ ein Eigenvektor von $\mathcal{N}$. Da $\widehat{N} \upharpoonright \mathcal{H}_\gamma$ normal und $\mathcal{H}_\gamma$ nach Satz 4.32 endlichdimensional ist für jedes $\gamma < \Gamma$, besitzt jedes $\mathcal{H}_\gamma$ eine Orthonormalbasis B_γ aus Eigenvektoren von $\mathcal{N}$[16]. Wegen $\mathcal{H} = \operatorname{span}\big(\bigcup_{\gamma<\Gamma} \mathcal{H}_\gamma\big)$ erhält man daher mit $\mathrm{B} = \bigcup_{\gamma<\Gamma} \mathrm{B}_\gamma$ die gewünschte Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ aus Eigenvektoren von $\mathcal{N}$.

(ii) zeigt man analog wie im Beweis von Satz 4.50 (ii). □

Die Relationen (4.22) und (4.23) nennt man *Spektraldarstellungen*. Sie stellen die Verallgemeinerung der Begriffe der Diagonalisierung und der Hauptachsentransformation aus der linearen Algebra auf unendlichdimensionale Hilberträume dar. Diese Verallgemeinerung werden wir im nächsten Abschnitt weiter ausbauen.

Entsprechend erlaubt die Aussage (ii) von Satz 4.50 und 4.51 eine anschauliche geometrische Deutung. Dazu betrachten wir die Operatoren $\widehat{P}_\gamma = \varphi_\gamma f_{\varphi_\gamma}$ für $\gamma < \Gamma$; mit ihnen gilt

$$\begin{aligned}\widehat{P}_\gamma^{\,2}\,\psi &= \big(\widehat{P}_\gamma\,\psi, \varphi_\gamma\big)\,\varphi_\gamma = \sum_{\beta<\Gamma} (\psi, \varphi_\beta)\,(\varphi_\beta, \varphi_\gamma)\,\varphi_\beta \\ &= \sum_{\beta<\Gamma} (\psi, \varphi_\beta)\,\delta_{\beta\gamma}\,\varphi_\beta = (\psi, \varphi_\gamma)\,\varphi_\gamma = \widehat{P}_\gamma\,\psi,\end{aligned}$$

sowie nach Satz 4.50

$$\begin{aligned}\widehat{A}\,\widehat{P}_\gamma\,\psi &= \sum_{\beta<\Gamma} \lambda_\beta\,\big(\widehat{P}_\gamma\,\psi, \varphi_\beta\big)\,\varphi_\beta = \sum_{\beta<\Gamma} \lambda_\beta\,(\psi, \varphi_\gamma)\,(\varphi_\gamma, \varphi_\beta)\,\varphi_\beta \\ &= \sum_{\beta<\Gamma} \lambda_\beta\,(\psi, \varphi_\gamma)\,\delta_{\beta\gamma}\,\varphi_\beta = \lambda_\gamma\,(\psi, \varphi_\gamma)\,\varphi_\gamma = \lambda_\gamma\,\widehat{P}_\gamma\,\psi\end{aligned}$$

für alle $\psi \in \mathcal{H}$. Folglich sind die $\widehat{P}_\gamma$ jeweils Projektoren auf die Eigenräume $\mathcal{H}_\gamma$ von λ_γ. Da kompakte Operatoren höchstens abzählbar viele unterschiedliche Eigenwerte besitzt, gibt es auch nur höchstens abzählbar viele unterschiedliche Projektoren $\widehat{P}_n$. Außerdem gilt für alle $\psi, \chi \in \mathcal{H}$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\big(\widehat{P}_n\,\psi, \chi\big) = ((\psi, \varphi_n)\,\varphi_n, \chi) = (\psi, \varphi_n)\,(\varphi_n, \chi) = (\psi, (\chi, \varphi_n)\,\varphi_n) = \big(\psi, \widehat{P}_n\,\chi\big)$$

und

$$\|\widehat{P}_n\| = \sup_{\|\psi\|=1} |(\psi, \varphi_n)| \leqq \sup_{\|\psi\|=1} \|\psi\|\,\|\varphi_n\| = \|\varphi_n\| = 1,$$

das heißt, alle $\widehat{P}_n$ sind beschränkte symmetrische, also selbstadjungierte und damit orthogonale Projektoren auf die zuhgehörigen Eigenräume $\mathcal{H}_n$, und es gilt

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \operatorname{ran} \widehat{P}_n.$$

[16] Das ist ein Standardresultat der elementaren linearen Algebra.

Mit diesen Projektoren schreibt sich die Spektraldarstellung (4.22) in der Form

$$\widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \widehat{P}_n. \tag{4.24}$$

Auch das werden wir in einem der nächsten Abschnitte sehr weitgehend verallgemeinern. Wir verweilen jedoch zunächst noch bei den kompakten Operatoren und beschäftigen uns ein wenig mit einer wichtigen Anwendung ihrer Spektraldarstellung.

4.4.1.2 Schmidt-Darstellung

Wir beginnen mit der Umkehrung von Satz 3.35, was eine universelle Charakterisierung kompakter Operatoren liefert und gleichzeitig die Grundlage für den gesamten vorliegenden Abschnitt darstellt.

4.52 Satz: *Sind $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ unendlichdimensionale Hilberträume, dann gibt es zu jedem kompakten Operator $\widehat{A}$ von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{G}$ eine monoton fallende positive reelle Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie abzählbare Orthonormalsysteme $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ und $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{G}$ mit*

$$\widehat{A}\psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(\psi,\varphi_n)\,\chi_n \tag{4.25}$$

für alle $\psi \in \mathcal{H}$.

Beweis: Ist $\widehat{A}$ kompakt, dann ist $\widehat{A}^*\widehat{A}$ ebenfalls kompakt und außerdem selbstadjungiert. Für alle $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\|\psi\| = 1$ ist

$$0 \leqq (\widehat{A}\psi, \widehat{A}\psi) = (\widehat{A}^*\widehat{A}\psi, \psi) \leqq \|\widehat{A}\|^2,$$

nach Satz 4.44 gilt daher $\sigma(\widehat{A}^*\widehat{A}) \subset [0, \|\widehat{A}\|^2]$. Folglich gibt es nach Lemma 2.72 sowie Satz 4.33 und 4.50 in $\mathcal{H}$ ein abzählbares Orthonormalsystem $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ aus Eigenvektoren von $\widehat{A}^*\widehat{A}$ sowie eine monoton fallende Nullfolge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $\widehat{A}^*\widehat{A}\varphi_m = a_m^2\,\varphi_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und

$$\widehat{A}^*\widehat{A}\psi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^2\,(\psi,\varphi_m)\,\varphi_m$$

für alle $\psi \in \mathcal{H}$. Nach Corollar 2.167 können wir das Orthonormalsystem $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu einer Orthonormalbasis $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ von $\mathcal{H}$ erweitern. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > 0$ setzen wir außerdem $\chi_n := \widehat{A}\varphi_n / a_n$. Dann gilt für $n, m \in \mathbb{N}$

$$(\chi_n,\chi_m) = \frac{1}{a_n\,a_m}\,(\widehat{A}\varphi_n, \widehat{A}\varphi_m) = \frac{1}{a_n\,a_m}\,(\widehat{A}^*\widehat{A}\varphi_n, \varphi_m) = \frac{a_n^2}{a_n\,a_m}\,(\varphi_n,\varphi_m) = \delta_{nm},$$

das heißt, $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein abzählbares Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Auch dieses können wir zu einer Orthonormalbasis $(\chi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ in $\mathcal{H}$ erweitern. Für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ folgt mit Satz 2.163 (iv)

$$\widehat{A}\psi = \widehat{A}\left(\psi - \sum_{\gamma<\Gamma}(\psi,\varphi_\gamma)\,\varphi_\gamma\right) + \widehat{A}\sum_{\gamma<\Gamma}(\psi,\varphi_\gamma)\,\varphi_\gamma$$

$$= \widehat{A} \sum_{\gamma<\Gamma} (\psi, \varphi_\gamma)\, \varphi_\gamma = \sum_{\gamma<\Gamma} (\psi, \varphi_\gamma)\, \widehat{A}\varphi_\gamma = \sum_{\gamma<\Gamma} a_\gamma\, (\psi, \varphi_\gamma)\, \chi_\gamma. \tag{4.26}$$

Zu den Orthonormalbasen $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ und $(\chi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ gibt es nun wiederum abzählbare Teilsysteme $(\varphi_{\gamma_n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\chi_{\gamma_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\psi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\psi, \varphi_{\gamma_n})\, \varphi_{\gamma_n}$ beziehungsweise $\psi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\psi, \chi_{\gamma_n})\, \chi_{\gamma_n}$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$. Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Satz 2.140

$$\begin{aligned}\left\| \widehat{A}\psi - \sum_{j=0}^{n} a_j\, (\psi, \varphi_{\gamma_j})\, \chi_{\gamma_j} \right\|^2 &= \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j\, (\psi, \varphi_{\gamma_j})\, \chi_{\gamma_j} \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \|\, a_j\, (\psi, \varphi_{\gamma_j})\, \chi_{\gamma_j}\, \|^2 \\ &\leqq \sum_{j=n+1}^{\infty} |\, a_j\, (\psi, \varphi_{\gamma_j})\, |^2 \leqq \Big(\|\psi\| \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_{j+n}| \Big)^2,\end{aligned}$$

also konvergiert die Reihe auf der rechten Seite von (4.25) in der Norm gegen $\widehat{A}\psi$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$. □

Mit (4.25) erhält man eine Verallgemeinerung der von den Schatten-Klassen-Operatoren[17] bekannten Schmidt-Darstellung auf beliebige kompakte Operatoren zwischen Hilberträumen, wodurch die Schreibweise $\mathscr{C}(\mathcal{H}, \mathcal{G}) = \mathscr{S}_\infty(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ nachvollziehbar wird; daher spricht man auch hier bei den Elementen der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von den singulären Werten des betrachteten kompakten Operators. Diese weisen einige zusätzliche besondere Eigenschaften auf; beispielsweise gilt der folgende

4.53 Satz: *Es seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ Hilberträume und $\widehat{A} \in \mathscr{C}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Dann gilt für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der singulären Werte von $\widehat{A}$*

$$a_{n+1} = \inf_{\substack{\psi_j \in \mathcal{H} \\ j=0,1,\ldots,n}} \sup \Big\{ \|\widehat{A}\psi\| \;\Big|\; \psi \in \mathcal{H},\ \|\psi\| = 1,\ (\psi, \psi_j) = 0,\ j = 0, 1, \ldots, n \Big\}.$$

Beweis: $\widehat{A} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m\, f_{\varphi_m}\, \chi_m$ sei die Schmidt-Darstellung von $\widehat{A}$, zu $n \in \mathbb{N}$ sei außerdem $\psi \in \mathcal{H}$ so gewählt, daß $(\psi, \varphi_j) = 0$ gilt für $j = 0, 1, \ldots, n$. Dann folgt nach Satz 2.140 und Ungleichung 2.161

$$\begin{aligned}\|\widehat{A}\psi\|^2 &= \left\| \sum_{m=0}^{\infty} a_m\, (\psi, \varphi_m)\, \chi_m \right\|^2 = \left\| \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m\, (\psi, \varphi_m)\, \chi_m \right\|^2 \\ &= \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m^2\, |(\psi, \varphi_m)|^2 \leqq a_{n+1}^2 \sum_{m=n+1}^{\infty} |(\psi, \varphi_m)|^2 \leqq a_{n+1}^2\, \|\psi\|^2\end{aligned}$$

und damit

$$a_{n+1} \geqq \inf_{\substack{\psi_j \in \mathcal{H} \\ j=0,1,\ldots,n}} \sup \Big\{ \|\widehat{A}\psi\| \;\Big|\; \psi \in \mathcal{H},\ \|\psi\| = 1,\ (\psi, \psi_j) = 0,\ j = 0, 1, \ldots, n \Big\}.$$

[17] Siehe Definition 3.36 und den Kommentar dazu.

Umgekehrt gibt es für beliebige ψ_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ und $n \in \mathbb{N}$ stets ein $\psi \in \operatorname{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ mit $(\psi, \psi_j) = 0$ für $j = 0, 1, \ldots, n$, und hierfür gilt nach Konstruktion $(\psi, \varphi_m) = 0$ für $m > n+1$. Es folgt wieder nach Satz 2.140 und Ungleichung 2.161

$$\|\widehat{A}\psi\|^2 = \left\| \sum_{j=0}^{n+1} a_j\,(\psi, \varphi_j)\,\chi_j \right\|^2 = \sum_{j=0}^{n+1} a_j^2\,|(\psi, \varphi_j)|^2 \geqq a_{n+1}^2\,\|\psi\|^2$$

und damit

$$a_{n+1} \leqq \inf_{\substack{\psi_j \in \mathcal{H} \\ j=0,1,\ldots,n}} \sup\left\{ \|\widehat{A}\psi\| \;\middle|\; \psi \in \mathcal{H},\ \|\psi\| = 1,\ (\psi, \psi_j) = 0,\ j = 0, 1, \ldots, n \right\}. \qquad \square$$

Die singulären Werte eines Operators kann man außerdem durch den Operator selbst ausdrücken und erhält damit gewissermaßen die Umkehrung von (4.25).

4.54 Satz: *Ist $\widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, f_{\varphi_n}\, \chi_n$ die Schmidt-Darstellung des Operators $\widehat{A} \in \mathscr{C}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$, dann gilt*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\widehat{A}\varphi_n, \chi_n) \right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Beweis: Ergänzt man die Orthonormalsysteme $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu Orthonormalbasen $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ und $(\chi_\lambda)_{\lambda<\Gamma}$ von $\mathcal{H}$, dann folgt mit Satz 2.163 (iv) und Corollar 2.164

$$\begin{aligned}
\widehat{A}\psi &= \sum_{\gamma<\Gamma} (\psi, \varphi_\gamma)\, \widehat{A}\varphi_\gamma = \sum_{\gamma<\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (\psi, \varphi_\gamma)\, (\varphi_\gamma, \varphi_n)\, \chi_n \\
&= \sum_{\lambda<\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (\psi, \varphi_\gamma)\, (\varphi_\gamma, \varphi_n)\, (\chi_n, \chi_\lambda)\, \chi_\lambda \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (\psi, \varphi_j)\, (\varphi_j, \varphi_n)\, (\chi_n, \chi_i)\, \chi_i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (\varphi_j, \varphi_n)\, \chi_n, \chi_i \right) (\psi, \varphi_j)\, \chi_i = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (\widehat{A}\varphi_j, \chi_j)\, (\psi, \varphi_i)\, \chi_i .
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung. $\square$

Dieser Satz wird sich sogleich als nützlich erweisen, wenn wir die folgende alternative Charakterisierung der Schattenklassen herleiten.

4.55 Satz: *Es seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ Hilberträume, $\widehat{A} \in \mathscr{C}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ und $1 \leqq p < \infty$. Dann ist $\widehat{A}$ genau dann in $\mathscr{S}_p(\mathcal{H}, \mathcal{G})$, wenn für beliebige abzählbare Orthonormalsysteme $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ und $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge $\big((\widehat{A}\xi_n, \eta_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ zu ℓ^p gehört.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Zu $\widehat{A} \in \mathscr{S}_p(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ seien $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abzählbare Orthonormalsysteme in $\mathcal{H}$ beziehungsweise in $\mathcal{G}$, sodaß $\widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n f_{\varphi_n}$. Dann folgt für jedes abzählbare Orthonormalsystem $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ und jedes abzählbare Orthonormalsystem $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{G}$ nach Ungleichung 2.80

$$\begin{aligned}\left\|\left((\widehat{A}\xi_n, \eta_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p^p &= \sum_{n=0}^{\infty} |(\widehat{A}\xi_n, \eta_n)|^p = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{m=0}^{\infty} a_m (\xi_m, \varphi_n)(\chi_m, \eta_n) \right|^p \\ &\leqq \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m |(\xi_n, \varphi_m)|^2 \right]^{p/2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m |(\eta_n, \chi_m)|^2 \right]^{p/2} \right\}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Mit $q = p/(p-1)$ gilt außerdem wieder nach Ungleichung 2.80 sowie Satz 2.163 (iii)

$$\begin{aligned}\left[\sum_{m=0}^{\infty} a_n |(\xi_n, \varphi_m)|^2 \right]^{p/2} &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_n |(\xi_n, \varphi_m)|^{2/p} |(\xi_n, \varphi_m)|^{2/q} \right]^{p/2} \\ &\leqq \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_n^p |(\xi_n, \varphi_m)|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} |(\xi_n, \varphi_m)|^2 \right]^{p/2q} \\ &\leqq \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_n^p |(\xi_n, \varphi_m)|^2 \right]^{1/2} \|\xi_n\|^{p/q} = \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_n^p |(\xi_n, \varphi_m)|^2 \right]^{1/2}\end{aligned}$$

und analog

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} a_n |(\eta_n, \chi_m)|^2 \right]^{p/2} \leqq \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_n^p |(\eta_n, \chi_m)|^2 \right]^{1/2}.$$

(4.27) wird damit zu

$$\left\|\left((\widehat{A}\xi_n, \eta_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p^p \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_n^p |(\xi_n, \varphi_m)|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_n^p |(\eta_n, \chi_m)|^2 \right]^{1/2} \right\};$$

eine dritte Anwendung von Ungleichung 2.80 liefert

$$\left\|\left((\widehat{A}\xi_n, \eta_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p^p \leqq \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n^p |(\xi_n, \varphi_m)|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n^p |(\eta_n, \chi_m)|^2 \right]^{1/2},$$

und mit Ungleichung 2.161 erhält man

$$\begin{aligned}\left\|\left((\widehat{A}\xi_n, \eta_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p^p &\leqq \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p \|\xi_n\|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p \|\eta_n\|^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p \right]^{1/2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p \right]^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^p < \infty.\end{aligned}$$

„$\Longleftarrow$“: Ist $\big((\widehat{A}\xi_n, \eta_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ für alle abzählbare Orthonormalsysteme $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ und $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{G}$, dann gilt stets $\lim\limits_{n\to\infty}(\widehat{A}\xi_n, \eta_n) = 0$, und nach Satz 3.34 ist $\widehat{A}$ somit kompakt. Nun sei $\widehat{A} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, \chi_n\, f_{\varphi_n}$ die Schmidt-Darstellung von $\widehat{A}$ mit abzählbaren Orthonormalsystemen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ beziehungsweise in $\mathcal{G}$; nach Satz 4.54 gilt dann $a_n = (\widehat{A}\varphi_n, \chi_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$. Also ist $\widehat{A} \in \mathscr{S}_p(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. □

Ein wichtiges Resultat, das der Beweis von Satz 4.52 mit erbracht hat, ist das folgende

4.56 Corollar: *Sind $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ Hilberträume und ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der singulären Werte des Operators $\widehat{A} \in \mathscr{C}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$, dann ist $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Eigenwerte des Operators $\widehat{A}^*\widehat{A}$.*

Eine weitere unmittelbare Konsequenz aus Satz 4.52 betrifft die Menge $\mathscr{F}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ derjeniger Operatoren aus $\mathscr{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$, deren Wertebereiche endlichdimensional sind[18].

4.57 Corollar: *Für alle Hilberträume $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ ist $\mathscr{F}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ dicht in $\mathscr{C}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$.*

Beweis: Nach Satz 4.52 ist jeder kompakte Operator Grenzwert einer Folge von Operatoren mit endlichem Wertebereich. □

Dieser Sachverhalt wird durch die folgende alternative Interpreration der singulären Werte kompakter Operatoren[19] illustriert.

4.58 Lemma: *$\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ seien Hilberträume. Dann gilt für die singulären Werte a_n eines jeden Operators $\widehat{A} \in \mathscr{C}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$*

$$a_n = \inf\{\,\|\widehat{A} - \widehat{B}\,\| \mid \widehat{B} \in \mathscr{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G}),\ \dim \operatorname{ran} \widehat{B} \leqq n\} \tag{4.28}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Einerseits ist nach Satz 4.52 und 2.140 sowie Ungleichung 2.161 für alle $\psi \in \mathcal{H}$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left\| \left(\widehat{A} - \sum_{j=0}^{n-1} a_j\, \chi_j\, f_{\varphi_j}\right)\psi \right\|^2 &= \left\| \widehat{A}\psi - \sum_{j=0}^{n-1} a_j\,(\psi, \varphi_j)\,\chi_j \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{j=n}^{\infty} a_j\,(\psi, \varphi_j)\,\chi_j \right\|^2 = \sum_{j=n}^{\infty} a_j^2\,|(\psi, \varphi_j)|^2 \leqq a_n^2\,\|\psi\|^2\end{aligned}$$

mit geeigneten abzählbaren Orthonormalsystemen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{H}$ und $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{G}$. Für $\widehat{B} = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j\,\chi_j\, f_{\varphi_j}$ gilt $\dim \operatorname{ran} \widehat{B} = n$, und damit folgt

$$a_n \geqq \inf\{\,\|\widehat{A} - \widehat{B}\,\| \mid \widehat{B} \in \mathscr{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G}),\ \dim \operatorname{ran} \widehat{B} \leqq n\}.$$

[18] Man nennt solche Operatoren auch *Operatoren von endlichem Rang*.
[19] Siehe Definition 3.36.

Andererseits gibt es für alle $\widehat{B} \in \mathscr{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ mit $\dim \operatorname{ran} \widehat{B} \leqq n$ ein $\vartheta = \sum_{j=0}^{n} b_j \varphi_j$ mit $\|\vartheta\| = 1$ und $\widehat{B}\,\vartheta = 0$. Mit Satz 2.140 gilt hierfür

$$\|\,\widehat{A} - \widehat{B}\,\|^2 \geqq \|\,(\,\widehat{A} - \widehat{B}\,)\,\vartheta\,\|^2 = \|\,\widehat{A}\vartheta\,\|^2 = \left\| \sum_{m=0}^{\infty} a_m\,(\vartheta, \varphi_m)\,\chi_m \right\|^2$$
$$= \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} a_m\, b_j\,(\varphi_j, \varphi_m)\,\chi_m \right\|^2 = \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} a_m\, b_j\, \delta_{jm}\,\chi_m \right\|^2$$
$$= \left\| \sum_{j=0}^{n} a_j\, b_j\,\chi_j \right\|^2 = \sum_{j=0}^{n} a_j^2\,|b_j|^2 \geqq a_n^2 \sum_{j=0}^{n} |b_j|^2 = a_n^2.$$

Daraus folgt

$$a_n \leqq \inf\{\,\|\,\widehat{A} - \widehat{B}\,\| \mid \widehat{B} \in \mathscr{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G}),\ \dim \operatorname{ran} \widehat{B} \leqq n\,\}. \qquad \square$$

Lemma 4.58 zeigt, daß die singulären Werte eines kompakten Operators gleichzeitig darüber informieren, wie gut dieser Operator durch Operatoren mit n-dimensionalen Wertebereichen approximiert werden kann[20].

Mit Hilfe von Corollar 4.57 und Lemma 4.58 können wir zwei Aussagen über das algebraische Verhalten der Schatten-Klassen machen, die wir weiter unten wieder aufgreifen.

4.59 Satz: *$\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ seien Hilberträume. Dann gilt folgendes.*

(i) $\widehat{A}\,\widehat{B} \in \mathscr{S}_r(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ *für alle* $\widehat{A} \in \mathscr{S}_p(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ *und alle* $\widehat{B} \in \mathscr{S}_q(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *mit* $0 < p, q, r < \infty$ *und* $1/p + 1/q = 1/r$;

(ii) $\widehat{B}\,\widehat{A}\,\widehat{C} \in \mathscr{S}_p(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ *für alle* $\widehat{A} \in \mathscr{S}_p(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *mit* $0 < p < \infty$, *alle* $\widehat{B} \in \mathscr{L}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ *und alle* $\widehat{C} \in \mathscr{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Beweis: (i) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien die Folgen der singulären Werte von $\widehat{A}$ beziehungsweise von $\widehat{B}$ beziehungsweise von $\widehat{A}\,\widehat{B}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Corollar 4.57 Operatoren $\widehat{C}, \widehat{D} \in \mathscr{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ mit $\dim \operatorname{ran} \widehat{C} \leqq n$ und $\dim \operatorname{ran} \widehat{D} \leqq n$

[20] Faßt man (4.28) als Definition der singulären Werte eines Operators auf, dann kann man diese auch für beliebige beschränkte Operatoren und auch für Abbildungen zwischen Banachräumen angeben. Die a_n nennt man dann *Approximationszahlen* der betrachteten Abbildung. Für Banachräume sind die Verhältnisse jedoch nicht so übersichtlich. Man sagt, ein Banachraum $\mathcal{E}$ besitzt die *Approximationseigenschaft*, wenn $\overline{\mathscr{F}(\mathcal{E}, \mathcal{F})} = \mathscr{C}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ gilt für jeden Banachraum $\mathcal{F}$. Es gibt Banachräume ohne die Approximationseigenschaft, wie Enflo durch explizite Konstruktion eines (eher exotischen) Gegenbeispiels zeigen konnte [90]. Damit fand er gleichzeitig als erster ein Beispiel für einen separablen Banachraum, der keine Schauder-Basis besitzt; siehe hierzu Anmerkung 77 auf S. 106. Ein etwas gewöhnlicheres Beispiel eines Banachraums ohne Approximationseigenschaft in Gestalt des Raums $\mathscr{L}(\ell^2)$ wurde von Szankowski gefunden [363]. Wie oben gesehen haben alle Hilberträume die Approximationseigenschaft; außerdem gilt das auch für alle Banachräume mit gewöhnlichen oder langen Schauder-Basen. Siehe hierzu Abschnitt 2.2.3.8.

sowie $\| \widehat{A} - \widehat{C} \| \leqq a_n + \varepsilon$ und $\| \widehat{B} - \widehat{D} \| \leqq b_n + \varepsilon$. Damit gilt

$$\dim [\widehat{C} (\widehat{B} - \widehat{D}) + \widehat{A} \widehat{D}] \leqq \dim \widehat{C} + \dim \widehat{D} \leqq 2n$$

und wegen $(\widehat{A} - \widehat{C}) (\widehat{B} - \widehat{D}) = \widehat{A} \widehat{B} - \widehat{C} (\widehat{B} - \widehat{D}) - \widehat{A} \widehat{D}$ weiter

$$c_{2n} \leqq \| \widehat{A} - \widehat{C} \| \, \| \widehat{B} - \widehat{D} \| \leqq (a_n + \varepsilon) (b_n + \varepsilon).$$

Daraus folgt

$$c_{2n} \leqq a_n \, b_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und das liefert zusammen mit Ungleichung 2.80

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^r \leqq 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}^r \leqq 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^r \, b_n^r \leqq 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p \right)^{r/p} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^q \right)^{r/q} < \infty.$$

Somit ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^r$, und daraus folgt die Behauptung.

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien die Folgen der singulären Werte von $\widehat{A}$ beziehungsweise von $\widehat{B}\,\widehat{A}\,\widehat{C}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Corollar 4.57 einen beschränkten Operator $\widehat{D}$ von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{G}$ mit $\dim \operatorname{ran} \widehat{B}\,\widehat{D}\,\widehat{C} \leqq n$ und $\| \widehat{A} - \widehat{D} \| \leqq a_n + \varepsilon$. Damit gilt

$$b_n \leqq \| \widehat{B}\,\widehat{A}\,\widehat{C} - \widehat{B}\,\widehat{D}\,\widehat{C} \| = \| \widehat{B} (\widehat{A} - \widehat{D}) \widehat{C} \| \leqq \|\widehat{B}\| \, \| \widehat{A} - \widehat{D} \| \, \|\widehat{C}\| \leqq \|\widehat{B}\| (a_n + \varepsilon) \|\widehat{C}\|.$$

Das liefert

$$b_n \leqq \|\widehat{B}\| \, a_n \, \|\widehat{C}\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n^p \leqq \|\widehat{B}\|^p \, \|\widehat{C}\|^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n^p < \infty.$$

Somit ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, und daraus folgt die Behauptung. □

Wie bei den $\mathscr{L}^p$-Räumen ergibt sich auch hier für $p = q = 2$ ein wichtiger Sonderfall, denn dann besagt Satz 4.59 (i), daß das Produkt zweier Hilbert-Schmidt-Operatoren stets ein nuklearer Operator ist. Für den Spezialfall $\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathcal{H}$ folgt aus Satz 4.59 (ii), daß die Schattenklassen $\mathscr{S}_p(\mathcal{H})$ jeweils *Operatorideale* in $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ sind.

Es ist offensichtlich, daß die $\mathscr{S}_p(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ für alle $0 < p < \infty$ Vektorräume sind. Beschränkt man sich auf $1 \leqq p < \infty$, kann man noch deutlich mehr beweisen – eine weitere Parallele zu den $\mathscr{L}^p$-Räumen. Zu diesem Zweck bestätigen wir zunächst eine sich unmittelbar aus Definition 3.36 und Satz 4.52 und dem Vergleich zu den $\mathscr{L}^p$-Räumen aufdrängende Vermutung. Gegenstand derselben ist die nächste

4.60 Definition: Zu beliebigen Hilberträumen $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ und jedem $1 \leqq p < \infty$ sei die Funktion $\| \ \|_{\mathscr{S}_p} : \mathscr{C}(\mathcal{H}, \mathcal{G}) \longrightarrow [0, \infty]$ definiert durch

$$\| \widehat{A} \|_{\mathscr{S}_p} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p \right)^{1/p}, \tag{4.29}$$

wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der singulären Werte von $\widehat{A}$ ist.

Eine alternative Formulierung ergibt sich als unmittelbare Folgerung aus Satz 4.55.

4.61 Corollar: *Es seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ Hilberträume und $\mathfrak{O}(\mathcal{H})$ und $\mathfrak{O}(\mathcal{G})$ die Mengen aller Orthonormalsysteme in $\mathcal{H}$ beziehungsweise $\mathcal{G}$. Dann gilt für alle $\widehat{A} \in \mathscr{C}(\mathcal{H},\mathcal{G})$ und alle $1 \leqq p < \infty$*

$$\|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_p} = \sup\left\{ \left[\sum_{n=0}^{\infty} |(\widehat{A}\psi_n, \varphi_n)|^p\right]^{1/p} \,\middle|\, (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{O}(\mathcal{H}),\ (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{O}(\mathcal{G}) \right\}$$

Damit erhält man nun den folgenden, wenig überraschenden

4.62 Satz: *Für alle $1 \leqq p < \infty$ ist $\|\ \|_{\mathscr{S}_p}$ eine Norm auf $\mathscr{S}_p(\mathcal{H},\mathcal{G})$.*

Beweis: Wir überprüfen die Normaxiome für $\|\ \|_{\mathscr{S}_p}$:
(i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $\widehat{A} \in \mathscr{S}_p(\mathcal{H},\mathcal{G})$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(z\widehat{A}\psi_n, \varphi_n)|^p = |z|^p \sum_{n=0}^{\infty} |(\widehat{A}\psi_n, \varphi_n)|^p$$

und nach Corollar 4.61 damit $\|z\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_p} = |z|\,\|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_p}$.
(ii) Für alle $\widehat{A}, \widehat{B} \in \mathscr{S}_p(\mathcal{H},\mathcal{G})$ gilt

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{n=0}^{\infty} \left|((\widehat{A}+\widehat{B})\psi_n, \varphi_n)\right|^p\right]^{1/p} &\leqq \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(|(\widehat{A}\psi_n, \varphi_n)| + |(\widehat{B}\psi_n, \varphi_n)|\right)^p\right]^{1/p} \\
&\leqq \left[\sum_{n=0}^{\infty} |(\widehat{A}\psi_n, \varphi_n)|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} |(\widehat{B}\psi_n, \varphi_n)|^p\right]^{1/p} \\
&\leqq \|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_p} + \|\widehat{B}\|_{\mathscr{S}_p}
\end{aligned}$$

und nach Corollar 4.61 damit

$$\|\widehat{A}+\widehat{B}\|_{\mathscr{S}_p} \leqq \|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_p} + \|\widehat{B}\|_{\mathscr{S}_p}.$$

(iii) Ist $\widehat{A} = 0$, dann ist auch $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es folgt $\|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_p} = 0$. Ist umgekehrt $\|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_p} = 0$, dann gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^p = 0$, und da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende reelle Nullfolge ist, folgt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $\widehat{A} = 0$. □

Ein weiterer Hilfssatz liefert einen Vergleich der Schattenklassen-Norm (4.29) mit der gewöhnlichen Operatornorm.

4.63 Lemma: *Für alle $1 \leqq p < \infty$ und alle $\widehat{A} \in \mathscr{S}_p(\mathcal{H},\mathcal{G})$ ist $\|\widehat{A}\| \leqq \|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_p}$.*

Beweis: Mit geeigneten abzählbaren Orthonormalsystemen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ und $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{G}$ erhält man für $\psi\in\mathcal{H}$ mit $\|\psi\|=1$ nach Ungleichung 2.142

$$\|\widehat{A}\,\psi\|^p = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(\psi,\varphi_n)\,\chi_n\right\|^p$$
$$\leqq \sum_{n=0}^{\infty}\|\,a_n\,(\psi,\varphi_n)\,\chi_n\,\|^p = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^p\,|(\psi,\varphi_n)|^p \leqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n^p\,\|\psi\|^p = \|\,\widehat{A}\,\|_{\mathscr{S}_p}^p\,\|\psi\|^p$$

und damit die Behauptung. □

Schließlich brauchen wir noch ein Resultat über den größten singulären Wert eines beliebigen kompakten Operators.

4.64 Corollar: *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die monoton fallend angeordnete Folge der singulären Werte des Operators $\widehat{A}\in\mathscr{C}(\mathcal{H},\mathcal{G})$, dann gilt $a_0=\|\,\widehat{A}\,\|$.*

Beweis: $\widehat{A}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,f_{\varphi_n}\,\chi_n$ sei die Schmidt-Darstellung von $\widehat{A}$. Dann gilt für alle $\psi\in\mathcal{H}$ mit $\|\psi\|=1$ nach Satz 2.140 und Ungleichung 2.161 einerseits

$$\|\widehat{A}\,\psi\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(\psi,\varphi_n)\,\chi_n\right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\|\,a_n\,(\psi,\varphi_n)\,\chi_n\,\|^2 \leqq a_0^2\sum_{n=0}^{\infty}|(\psi,\varphi_n)|^2 \leqq a_0^2.$$

Andererseits ist nach Satz 3.11 (ii) und Corollar 4.56

$$\|\,\widehat{A}\,\|^2 = \|\widehat{A}^*\widehat{A}\,\| \geqq \|\,\widehat{A}^*\widehat{A}\,\varphi_0\,\| = \|a_0^2\,\varphi_0\| = a_0^2.$$ □

Damit stehen alle erforderlichen Mittel zur Verfügung, um die oben angekündigte, ebenfalls naheliegende Eigenschaft der $\mathscr{S}_p$-Räume zu beweisen.

4.65 Satz: *Sind $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ Hilberträume, dann ist $\mathscr{S}_p(\mathcal{H},\mathcal{G})$ mit der Norm $\|\ \|_{\mathscr{S}_p}$ für alle $1\leqq p<\infty$ ein Banachraum.*

Beweis: $(\widehat{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gemäß der Norm $\|\ \|_{\mathscr{S}_p}$ eine Cauchyfolge in $\mathscr{S}_p(\mathcal{H},\mathcal{G})$; für jedes $n\in\mathbb{N}$ sei außerdem $\big(a_j^{(n)}\big)_{j\in\mathbb{N}}$ die Folge der singulären Werte von $\widehat{A}_n$ sowie $\big(b_j^{(n)}\big)_{j\in\mathbb{N}}$ diejenige von $\widehat{A}-\widehat{A}_n$ und $\big(b_j^{(mn)}\big)$ diejenige von $\widehat{A}_m-\widehat{A}_n$. Da $\mathscr{C}(\mathcal{H},\mathcal{G})$ ein Banachraum ist, gibt es ein $\widehat{A}\in\mathscr{C}(\mathcal{H},\mathcal{G})$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}\|\,\widehat{A}-\widehat{A}_n\,\|=0$. Wir zeigen nun, daß $\widehat{A}$ zur p-ten Schattenklasse von $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ gehört. Dazu seien $\widehat{B},\widehat{C}\in\mathscr{C}(\mathcal{H},\mathcal{G})$; für beliebige $\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_{n+m}$ gilt damit

$$\sup\Big\{\,\|\,(\,\widehat{B}+\widehat{C}\,)\,\psi\|\ \Big|\ \psi\in\mathcal{H},\ \|\psi\|=1,\ (\psi,\psi_j)=0,\ j=0,1,\ldots,n+m\Big\}$$
$$\leqq \sup\Big\{\,\|\widehat{B}\,\psi\|+\|\widehat{C}\,\psi\|\ \Big|\ \psi\in\mathcal{H},\ \|\psi\|=1,\ (\psi,\psi_j)=0,\ j=0,1,\ldots,n+m\Big\}.$$

Sind außerdem $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folgen der singulären Werte der Operatoren $\widehat{B}, \widehat{C}$ und $\widehat{B}+\widehat{C}$. dann folgt nach Satz 4.53 und der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d_{n+m+1} &\leqq \inf_{\substack{\psi_j\in\mathcal{H}\\ j=0,1,\dots,n}} \sup\left\{ \|\widehat{B}\,\psi\| \;\middle|\; \psi\in\mathcal{H},\ \|\psi\|=1,\ (\psi,\psi_j)=0,\ j=0,1,\dots,n\right\} \\ &\quad + \inf_{\substack{\psi_j\in\mathcal{H}\\ j=n,\dots,n+m}} \sup\left\{ \|\widehat{C}\,\psi\| \;\middle|\; \psi\in\mathcal{H},\ \|\psi\|=1,\ (\psi,\psi_j)=0,\ j=n,\dots,n+m\right\} \\ &= b_{n+1}+c_{m+1}. \end{aligned}$$

Damit gilt für $\widehat{B}=\widehat{A}_n$ und $\widehat{C}=\widehat{A}-\widehat{A}_n$ jeweils $a_m \leqq a_m^{(n)}+b_0^{(n)} = a_m^{(n)}+\|\,\widehat{A}-\widehat{A}_n\|$ und analog $a_m^{(n)} \leqq a_m+\|\,\widehat{A}-\widehat{A}_n\|$ für alle $m\in\mathbb{N}$. Mit der Dreiecksungleichung liefert das $|\,a_m-a_m^{(n)}\,| \leqq \|\,\widehat{A}-\widehat{A}_m\,\|$ für alle $m\in\mathbb{N}$, und nach Voraussetzung folgt hieraus $\lim\limits_{n\to\infty} a_m^{(n)} = a_m$ für alle $m\in\mathbb{N}$. Es folgt

$$\|\,\widehat{A}\,\|_{\mathscr{S}_p}^p = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^p = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(a_m^{(n)}\right)^p = \lim_{n\to\infty}\|\widehat{A}_n\|_{\mathscr{S}_p}^p,$$

also ist $\widehat{A}\in\mathscr{S}_p(\mathcal{H},\mathcal{G})$. Wir müssen noch zeigen, daß $(\widehat{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch in der Norm $\|\ \|_{\mathscr{S}_p}$ gegen $\widehat{A}$ konvergiert. Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $N\in\mathbb{N}$, sodaß $\|\,\widehat{A}_m-\widehat{A}_n\,\|_{\mathscr{S}_p}<\varepsilon$ für $m,n\geqq N$. Folglich ist für alle $n\geqq N$

$$\|\,\widehat{A}-\widehat{A}_n\,\|_{\mathscr{S}_p}^p = \sum_{j=0}^{\infty}\left(b_j^{(n)}\right)^p = \lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(b_j^{(mn)}\right)^p < \varepsilon,$$

das heißt, es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\|\,\widehat{A}-\widehat{A}_n\,\|_{\mathscr{S}_p}=0$. Somit sind die $\mathscr{S}_p(\mathcal{H},\mathcal{G})$ vollständig. □

Ergänzend betrachten wir ein Resultat für den Fall $\mathcal{H}=\mathcal{G}$, und zwar eine Ungleichung, die eine Relation zwischen den Eigenwerten und den singulären Werten kompakter Operatoren liefert. Sie wird sich im übernächsten Abschnitt, wo es generell um diesen Fall geht, als nützlich erweisen.

4.66 Satz:[21] *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei die Folge der singulären Werte und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die nach aufsteigenden Beträgen und algebraischer Vielfachheit geordnete Folge der nicht verschwindenden Eigenwerte von $\widehat{A}\in\mathscr{C}(\mathcal{H})$. Dann gilt für alle $1\leqq p<\infty$*

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n|^p \leqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n^p.$$

[21] Dieses Resultat ist ein Spezialfall eines allgemeineren, von Weyl gefundenen Satzes, wonach

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(|\lambda_n|) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} f(a_n)$$

gilt, wenn f eine Funktion ist mit $f(0)=0$ und $f(x)\geqq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, für die $f(e^t)$ auf ganz $\mathbb{R}$ konvex ist [387]. Der hier vorgeführte Beweis stammt von Simon [299].

Beweis: Zu jedem λ_n wird nach Lemma 4.10 durch

$$\widehat{P}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (\,\widehat{A} - \zeta\,)^{-1} d\zeta$$

ein spektraler Projektor von $\widehat{A}$ definiert. Dann läßt sich zu $\widehat{A} \restriction \operatorname{ran} \widehat{P}$ eine Jordansche Normalform angeben, das heißt, es gibt eine Familie $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ linear unabhängiger Vektoren in $\mathcal{H}$ sowie eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in {}^{\mathbb{N}^*}\{0,1\}$ mit $\widehat{A}\,\psi_n = \lambda_n\,\psi_n + b_n\,\psi_{n-1}$. Aus $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erhält man mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens[22] ein Orthonormalsystem $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$; dann gilt $\varphi_n = \sum_{j=0}^{n} a_{n\,j}\,\psi_j$ mit geeigneten $a_{n\,j}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es folgt

$$\widehat{A}\,\varphi_n = \sum_{j=0}^{n} a_{nj}\,\widehat{A}\,\psi_j = \sum_{j=0}^{n} a_{n\,j}\,(\,\lambda_j\,\psi_j + b_j\,\psi_{j-1}\,) = \lambda_n\,\varphi_n + \sum_{j=0}^{n-1} c_{n\,j}\,\psi_j$$

mit $c_{n\,j} = a_{n\,j}\,\lambda_j + b_{j+1}$ sowie

$$(\widehat{A}\,\varphi_n, \varphi_n) = \lambda_n \tag{4.30}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun seien $(\chi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ und $(\xi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ zwei weitere Orthonormalsysteme in $\mathcal{H}$ und $\widehat{A} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\,\xi_m\,f_{\chi_n}$ die zugehörige Schmidt-Darstellung von $\widehat{A}$. Dann erhält man mit (4.30)

$$\lambda_n = \sum_{m=0}^{\infty} (\chi_n, \varphi_m)\,(\varphi_m, \xi_n)\,a_n,$$

daraus weiter für $1 \leqq p, q < \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^p &\leqq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} |\lambda_n|^{p-1}\,|(\chi_n, \varphi_m)\,(\varphi_m, \xi_n)|\,|a_m| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \big[\,|\lambda_n|^{p-1}\,|(\chi_n, \varphi_m)\,(\varphi_m, \xi_n)|^{1/q}\,\big]\,\big[\,|(\chi_n, \varphi_m)\,(\varphi_m, \xi_n)|^{1/p}\,|a_m|\,\big]\end{aligned}$$

und mit Ungleichung 2.80

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^p \leqq \left[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |(\chi_n, \varphi_m)\,(\varphi_m, \xi_n)|\,|\lambda_n|^p\right]^{1/q} \left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} |(\chi_n, \varphi_m)\,(\varphi_m, \xi_n)|\,|a_m|^p\right]^{1/p}.$$

Wiederum Ungleichung 2.80 sowie Ungleichung 2.161 liefern zum einen

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(\chi_n, \varphi_m)\,(\varphi_m, \xi_n)| \leqq \left[\sum_{n=0}^{\infty} |(\chi_n, \varphi_m)|^2\right]^{1/2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} |(\varphi_m, \xi_n)|^2\right]^{1/2} \leqq \|\varphi_m\|^2 = 1$$

und zum andern analog

[22] Siehe Abschnitt 2.3.3.

$$\sum_{m=0}^{\infty} |(\chi_n, \varphi_m)\,(\varphi_m, \xi_n)| \leqq \|\chi_n\|\,\|\xi_n\| = 1,$$

womit

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^p \leqq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^p\right)^{1/q} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^p\right)^{1/p}$$

und daher auch

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^p\right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^p\right)^{1/p}$$

folgt. Das liefert unmittelbar die Behauptung. □

Aus Satz 4.66 folgt für alle $\widehat{A} \in \mathscr{S}_p(\mathcal{H})$ und alle $1 \leqq p < \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^p < \infty;$$

damit gilt für die Folge der nichtverschwindenden Eigenwerte eines jeden Schatten-Klassen-Operators stets $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ für alle $1 \leqq p \leqq \infty$.

Im Rest des vorliegenden Abschnitts sammeln wir spezielle Eigenschaften der beiden Klassen $\mathscr{S}_1(\mathcal{H},\mathcal{G}) \subset \mathscr{S}_2(\mathcal{H},\mathcal{G})$. Nach Satz 4.65 handelt es sich dabei um Banachräume[23] mit den Normen

$$\|\,\widehat{A}\,\|_{\mathscr{S}_1} := \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

beziehungsweise

$$\|\,\widehat{A}\,\|_{\mathscr{S}_2} := \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2}$$

für $\widehat{A} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n f_{\varphi_n}$; letztere nennt man auch *Hilbert-Schmidt-Norm* von $\widehat{A}$. Die Elemente dieser beiden Räume lassen sich jeweils universell charakterisieren. Für Hilbert-Schmidt-Operatoren leistet das der folgende

4.67 Satz: *Für jeden beschränkten Operator $\widehat{A}$ von einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ auf einen Hilbertraum $\mathcal{G}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gibt eine Orthonormalbasis $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ von $\mathcal{H}$ mit $\sum\limits_{\gamma<\Gamma} \|\,\widehat{A}\varphi_\gamma\,\|^2 < \infty$.

(ii) Für jede Orthonormalbasis $(\psi_\eta)_{\eta<\Gamma}$ von $\mathcal{H}$ ist $\sum\limits_{\eta<\Gamma} \|\,\widehat{A}\psi_\eta\,\|^2 < \infty$.

(iii) $\widehat{A} \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H})$.

[23] Für den Fall $p = 2$ präzisieren wir das im nächsten Abschnitt.

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii): $(\chi_\lambda)_{\lambda<\Lambda}$ sei eine Orthonormalbasis in $\mathcal{G}$. Dann folgt mit (i) nach Satz 2.163 (iii)

$$\sum_{\lambda<\Lambda} \| \widehat{A}^* \chi_\lambda \|^2 = \sum_{\gamma<\Gamma} \sum_{\lambda<\Lambda} |(\widehat{A}^* \chi_\lambda, \varphi_\gamma)|^2 = \sum_{\gamma<\Gamma} \sum_{\lambda<\Lambda} |(\chi_\lambda, \widehat{A} \varphi_\gamma)|^2 = \sum_{\gamma<\Gamma} \| \widehat{A} \varphi_\gamma \|^2 < \infty.$$

Daher gilt analog auch für jede andere und damit überhaupt für jede Orthonormalbasis $(\psi_\eta)_{\eta<\Gamma}$ von $\mathcal{H}$

$$\sum_{\eta<\Gamma} \| \widehat{A} \psi_\eta \|^2 = \sum_{\lambda<\Lambda} \| \widehat{A}^* \chi_\lambda \|^2 < \infty. \tag{4.31}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): $(\psi_\eta)_{\eta<\Gamma}$ sei eine beliebige Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$, außerdem J eine endliche Teilmenge von Γ und $\widehat{B} := \sum\limits_{j\in J} \widehat{A} \psi_j \, f_{\psi_j}$. Dann gilt $\widehat{B} \in \mathscr{F}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ sowie für alle $\psi \in \mathcal{H}$ nach Ungleichung 2.80 und Satz 2.163 (iii)

$$\| (\widehat{A} - \widehat{B}) \psi \| = \left\| \left(\sum_{\gamma<\Gamma} \widehat{A} \psi_\gamma \, f_{\psi_\gamma} - \sum_{j\in J} \widehat{A} \psi_j \, f_{\psi_j} \right) \psi \right\| = \left\| \sum_{\substack{\gamma<\Gamma \\ \gamma\notin J}} (\psi, \psi_\gamma) \, \widehat{A} \psi_\gamma \right\|$$

$$\leqq \left(\sum_{\substack{\gamma<\Gamma \\ \gamma\notin J}} \| \widehat{A} \psi_\gamma \|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{\gamma<\Gamma \\ \gamma\notin J}} |(\psi, \psi_\gamma)|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{\substack{\gamma<\Gamma \\ \gamma\notin J}} \| \widehat{A} \psi_\gamma \|^2 \right)^{1/2} \|\psi\|.$$

Durch sukzessives Erweitern des Orthonormalsystems $(\psi_j)_{j\in J}$ mit Elementen der Orthonormalbasis $(\psi_\eta)_{\eta<\Gamma}$ erhalten wir eine Folge $(\widehat{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{F}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$; bei geeigneter Numerierung der ψ_γ, was nach Satz 2.162 stets erlaubt ist, gilt hierfür nach Lemma 2.72

$$\lim_{n\to\infty} \| (\widehat{A} - \widehat{B}_n) \psi \| = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{n<\gamma<\Gamma} \| \widehat{A} \psi_\gamma \|^2 \right)^{1/2} \|\psi\| = 0,$$

und daraus folgt $\widehat{A} \in \overline{\mathscr{F}(\mathcal{H}, \mathcal{G})}$. Damit ist $\widehat{A}$ nach Corollar 4.57 kompakt und besitzt nach Satz 4.52 eine Schmidt-Darstelllung $\widehat{A} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \, \chi_n \, f_{\varphi_n}$ mit abzählbaren Orthonormalsystemen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ und $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{G}$. Nach Corollar 2.167 gibt es eine Orthonormalbasis $(\xi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ in $\mathcal{H}$, die $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält; für diese gilt nach Satz 2.140 und 2.163 (iii)

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma<\Gamma} \| \widehat{A} \xi_\gamma \|^2 &= \sum_{\gamma<\Gamma} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (\xi_\gamma, \varphi_n) \, \chi_n \right\|^2 \\ &= \sum_{\gamma<\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \, |(\xi_\gamma, \varphi_n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \, \|\varphi_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Nach (4.31) ist somit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, und es folgt $\widehat{A} \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Es sei $\widehat{A} \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$, dann besitzt $\widehat{A}$ eine Schmidt-Darstellung, und (4.32) von rechts nach links gelesen liefert die Behauptung. $\square$

Für nukleare Operatoren lassen sich ähnliche Betrachtungen anstellen, wie das nächste, zu Satz 4.67 analoge Resultat zeigt.

4.68 Satz: *Es seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ Hilberträume und $\widehat{A}$ ein beschränkter Operator von $\mathcal{H}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) Es gibt eine Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ und eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{G}$ mit $\widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n f_{\psi_n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \|\psi_n\|\,\|\varphi_n\| < \infty$.

(ii) $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H},\mathcal{G})$.

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii): Betrachte die Folge $(\widehat{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{F}(\mathcal{H},\mathcal{G})$ mit $\widehat{B}_n = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j f_{\psi_j}$. Hiermit gilt für jedes $j \in \mathbb{N}$ und alle $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\|\psi\| = 1$ nach Ungleichung 2.142

$$\| (\widehat{A} - \widehat{B_n})\,\psi \| = \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} (\psi,\psi_j)\,\varphi_j \right\| \leqq \sum_{j=n+1}^{\infty} |(\psi,\psi_j)|\,\|\varphi_j\| \leqq \|\psi\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \|\psi_j\|\,\|\varphi_j\|.$$

Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \| \widehat{A} - \widehat{B_n} \| = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \|\psi_j\|\,\|\varphi_j\| = 0,$$

das heißt, es ist $\widehat{A} \in \overline{\mathscr{F}(\mathcal{H},\mathcal{G})}$, und $\widehat{A}$ ist kompakt. Somit gibt es eine Schmidt-Darstellung $\widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\chi_n\,f_{\xi_n}$ mit abzählbaren Orthonormalsystemen $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ und $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{G}$; hierfür gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\,(\delta_{mn})^2 = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\,(\chi_m,\chi_n)\,(\xi_m,\xi_n) = (\widehat{A}\xi_n,\chi_n),$$

also mit (i) nach den Ungleichungen 2.80 und 2.161

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} a_j &= \sum_{j=0}^{n} (\widehat{A}\xi_j,\chi_j) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{n=0}^{\infty} (\chi_j,\varphi_n)\,(\xi_j,\psi_n) \leqq \sum_{j=0}^{n} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (\chi_j,\varphi_n)\,(\xi_j,\psi_n) \right| \\ &\leqq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} |(\chi_j,\varphi_n)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^{n} |(\xi_j,\psi_n)|^2 \right)^{1/2} \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\|\,\|\psi_n\|. \qquad (4.33)\end{aligned}$$

Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ und $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H},\mathcal{G})$.
(ii) $\Longrightarrow$ (i): Nach Definition 3.30 gibt es abzählbare Orthonormalsysteme $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ und $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{G}$ sowie eine monoton fallende Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, sodaß $\widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\chi_n\,f_{\xi_n}$. Dann erfüllen $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n\,\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n\,\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die geforderten Bedingungen. $\square$

Die in Satz 4.68 (i) definerte Schreibweise heißt *nukleare Darstellung* des Operators $\widehat{A}$. Eine unmittelbare Folgerung aus diesem Satz ist das nachstehende, für den nächsten Abschnitt nützliche

4.69 Corollar: *Für alle Hilberträume $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ ist $\mathscr{F}(\mathcal{H},\mathcal{G})$ dicht in $\mathscr{S}_1(\mathcal{H},\mathcal{G})$.*

Für Spurklasse-Operatoren, also Elemente der Räume $\mathscr{S}_1(\mathcal{H})$, lassen sich noch weitere wichtige Eigenschaften herleiten, da man hier jeweils auch mit nur einem Orthonormalsystem arbeiten kann. Man erhält dadurch beispielsweise den folgenden

4.70 Satz: *Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$. Dann gilt für jede nukleare Darstellung $\widehat{A} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \chi_n\, f_{\psi_n}$ und jede Orthonormalbasis $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ in $\mathcal{H}$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\chi_n, \psi_n) = \sum_{\gamma<\Gamma} (\widehat{A}\varphi_\gamma, \varphi_\gamma).$$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt

$$\sum_{\gamma<\Gamma} (\widehat{A}\varphi_\gamma, \varphi_\gamma) = \sum_{\gamma<\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_\gamma, \psi_n)\,(\chi_n, \varphi_\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\gamma<\Gamma} (\chi_n, \varphi_\gamma)\,(\varphi_\gamma, \psi_n),$$

und damit liefert Corollar 2.164 die Behauptung. □

Für Hilberträume über $\mathbb{C}$ läßt sich die Aussage des vorigen Satzes noch verstärken; hier erweist sich diese als Charakteristikum aller Spurklasse-Operatoren[24].

4.71 Satz: *$\mathcal{H}$ sei ein komplexer Hilbertraum. Dann sind für alle $\widehat{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ folgende Aussagen äquivalent.*

(i) $\widehat{A}$ ist ein Operator der Spurklasse.

(ii) Für jede Orthonormalbasis $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ in $\mathcal{H}$ ist $((\widehat{A}\varphi_\gamma, \varphi_\gamma))_{\gamma<\Gamma}$ summierbar.

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii): Es seien $\widehat{A} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \chi_n\, f_{\psi_n}$ eine nukleare Darstellung und $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Für jede endliche Teilmenge J von Γ gilt nach Ungleichung 2.80

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J} |(\widehat{A}\varphi_j, \varphi_j)| &= \sum_{j\in J} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_j, \psi_n)\,(\chi_n, \varphi_j) \right| \\ &\leqq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j\in J} |\,(\chi_n, \varphi_j)\,(\varphi_j, \psi_n)\,| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \|\chi_n\|\,\|\psi_n\| < \infty.\end{aligned}$$

[24]Für reelle Hilberträume gilt der nachfolgende Satz nicht. Ein Gegenbeispiel finfet man unter anderem in [254].

Folglich ist $((\widehat{A}\,\varphi_\gamma, \varphi_\gamma))_{\gamma<\Gamma}$ summierbar.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Wegen $|(\widehat{A}\,\varphi_\gamma, \varphi_\gamma)| = |(\varphi_\gamma, \widehat{A}^*\,\varphi_\gamma)| = \left|\overline{(\widehat{A}\,\varphi_\gamma, \varphi_\gamma)}\right| = |(\widehat{A}^*\,\varphi_\gamma, \varphi_\gamma)|$ haben mit $\widehat{A}$ auch $\widehat{A}^*$ sowie $\widehat{B} = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{A}^*)$ und $\widehat{C} = \frac{i}{2}(\widehat{A} - \widehat{A}^*)$ die Eigenschaft (ii). Für jedes abzählbare Orthonormalsystem $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ sind daher die Folgen $((\widehat{B}\,\xi_n, \xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $((\widehat{C}\,\xi_n, \xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ summierbar, und damit gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(\widehat{B}\,\xi_n, \xi_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\widehat{C}\,\xi_n, \xi_n) = 0$. Nach Satz 3.34 sind $\widehat{B}$ und $\widehat{C}$ damit kompakt. Sie sind außerdem selbstadjungiert, nach Satz 4.50 gibt es folglich in $\mathcal{H}$ abzählbare Orthonormalsysteme $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\vartheta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Eigenvektoren zu Eigenwerten λ_n beziehungsweise μ_n von $\widehat{B}$ beziehungsweise $\widehat{C}$, sodaß

$$\widehat{B} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\,\eta_n\,f_{\eta_n} \quad \text{und} \quad \widehat{C} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\,\vartheta_n\,f_{\vartheta_n}$$

Nach (ii) gilt hierfür

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n\,(\eta_n, \eta_n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |(\widehat{B}\,\eta_n, \eta_n)| < \infty$$

und analog

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mu_n| < \infty,$$

Damit ist $\widehat{B}, \widehat{C} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ und wegen $\widehat{A} = \widehat{B} - i\,\widehat{C}$ folglich auch $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$. □

4.4.1.3 Die Spur

Bis jetzt sieht es so aus, als sei der Name der Spurklasse-Operatoren ein wenig unmotiviert gewählt; Satz 4.71 ermöglicht jedoch eine Erklärung, wie sie zu ihrem Namen gelangen. Das erfolgt wenig überraschend mit Hilfe der nachfolgenden

4.72 Definition: $\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum und $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}$. Für jeden Operator $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ ist die *Spur* von $\widehat{A}$ definiert durch

$$\operatorname{tr}\widehat{A} := \sum_{\gamma<\Gamma} (\widehat{A}\,\varphi_\gamma, \varphi_\gamma).$$

Das ist die direkte Verallgemeinerung des gleichnamigen Begriffs aus der linearen Algebra, wo sich dahinter die Summe der Diagonalelemente einer quadratischen Matrix versteckt. Dabei ist die Einschränkung auf $\mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ kein Zufall, denn Satz 4.71 zeigt, daß die Spurklasse-Operatoren genau diejenigen Operatoren sind, für welche die Spur einen endlichen Wert hat. Wirklich sinnvoll ist obige Definition allerdings nur, wenn dieser Wert unabhängig von der verwendeten Orthonormalbasis ist.

4.73 Satz: *Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$, dann hat $\operatorname{tr}\widehat{A}$ für jede Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ denselben Wert.*

Beweis: $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ und $(\psi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ seien zwei Orthornormalbasen von $\mathcal{H}$, dann gibt es nach Lemma 3.41 einen unitären Operator $\widehat{U} = \sum\limits_{\lambda<\Gamma} \varphi_\lambda\, f_{\psi_\lambda}$ auf $\mathcal{H}$ mit $\varphi_\gamma = \widehat{U}\,\psi_\gamma$ für alle $\gamma < \Gamma$. Nach Corollar 2.164 gilt damit

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma<\Gamma} (\widehat{A}\,\varphi_\gamma, \varphi_\gamma) &= \sum_{\gamma<\Gamma} (\widehat{A}\,\widehat{U}\,\psi_\gamma, \widehat{U}\,\psi_\gamma) \\
&= \sum_{\gamma<\Gamma}\sum_{\lambda<\Gamma}\sum_{\eta<\Gamma} (\psi_\gamma, \psi_\lambda)\,(\psi_\eta, \psi_\gamma)\,(\widehat{A}\,\varphi_\lambda, \varphi_\eta) \\
&= \sum_{\lambda<\Gamma}\sum_{\eta<\Gamma} (\psi_\eta, \psi_\lambda)\,(\widehat{A}\,\varphi_\lambda, \varphi_\eta) = \sum_{\lambda<\Gamma} (\widehat{A}\,\varphi_\lambda, \psi_\lambda). \qquad \square
\end{aligned}$$

Ist $\widehat{A} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,\chi_n\, f_{\xi_n}$ die Schmidt-Darstellung des Spurklasse-Operators $\widehat{A}$, dann gilt

$$\operatorname{tr}\widehat{A} = \sum_{\gamma<\Gamma} (\widehat{A}\,\varphi_\gamma, \varphi_\gamma) = \sum_{\gamma<\Gamma}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(\chi_n, \varphi_\gamma)\,(\varphi_\gamma, \xi_n),$$

also nach Corollar 2.164

$$\operatorname{tr}\widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(\chi_n, \xi_n). \tag{4.34}$$

Diese Formel ist zur praktischen Berechnung der Spur oft besser geeignet als obige Definition, nicht nur weil sie auch bei Hilberträumen mit überabzählbaren Orthonormalbasen stets eine gewöhnliche abzählbare unendliche Reihe darstellt. Das ist gleichermaßen auch bei einer weiteren Schreibweise für die Spur der Fall. Man erhält sie aus Satz 4.68; danach gilt für jeden Operator $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ mit nuklearer Darstellung $\widehat{A} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \chi_n\, f_{\psi_n}$ die Relation

$$\operatorname{tr}\widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} (\chi_n, \psi_n). \tag{4.35}$$

Von beiden Formeln werden wir demnächst Gebrauch machen.

Der folgende Satz stellt einige wesentliche Eigenschaften der Spur zusammen.

4.74 Satz: *$\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum. Dann gilt für alle $\widehat{A}, \widehat{B} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$*

(i) $\operatorname{tr}\widehat{A}^* = \overline{\operatorname{tr}\widehat{A}}$,

(ii) $\operatorname{tr}(\widehat{A} + \widehat{B}) = \operatorname{tr}\widehat{A} + \operatorname{tr}\widehat{B}$,

(iii) $\operatorname{tr}(\lambda\,\widehat{A}) = \lambda \operatorname{tr}\widehat{A}$ *für alle* $\lambda \geqq 0$,

(iv) $\operatorname{tr}(\widehat{A}\,\widehat{T}) = \operatorname{tr}(\widehat{T}\,\widehat{A})$ *für alle* $\widehat{T} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$;

(v) $\operatorname{tr}(\widehat{U}\widehat{A}\,\widehat{U}^{-1}) = \operatorname{tr}\widehat{A}$ *für jeden unitären Operator* $\widehat{U}$ *auf* $\mathcal{H}$.

Beweis: (i), (ii) und (iii) folgen unmittelbar aus Definition 4.72.
(iv) Mit $\widehat{A} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n f_{\xi_n}$ ist

$$\widehat{A}\widehat{T} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n f_{\widehat{T}^*\xi_n}$$

sowie

$$\widehat{T}\widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{T} \chi_n f_{\xi_n}.$$

Nach Satz 4.59 (ii) gilt $\widehat{A}\widehat{T}, \widehat{T}\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$, und mit (4.34) erhält man daher

$$\operatorname{tr}(\widehat{A}\widehat{T}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\chi_n, \widehat{T}^*\xi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\widehat{T}\chi_n, \xi_n) = \operatorname{tr}(\widehat{T}\widehat{A}).$$

(v) Da ein unitärer Operator $\widehat{U}$ auf $\mathcal{H}$ nach Lemma 3.41 aus jeder Orthonormalbasis $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ wieder eine Orthonormalbasis $(\widehat{U}\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ macht, folgt die Behauptung aus Satz 4.73. □

Offensichtlich besitzt jeder Spurklasse-Operator eine endliche Spur. Man kann jedoch noch mehr zeigen, wofür zunächst etwas Vorbereitung erforderlich ist.

4.75 Lemma: *Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, dann gibt es zu jedem positiv definiten Operator $\widehat{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ genau einen positiv definiten Operator $\widehat{B} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ mit $\widehat{B}^n = \widehat{A}$. Dieser ist mit $\widehat{A}$ vertauschbar.*

Beweis: Ist der Operator $\widehat{A}$ auf $\mathcal{H}$ beschränkt und positiv definit, dann ist er nach Satz 3.2 selbstadjungiert, und nach Satz 4.44 gilt $\sigma(\widehat{A}) \subset [0, \infty)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist folglich die Funktion $f(z) = z^{1/n}$ auf $\sigma(\widehat{A})$ definiert; nach Satz 4.7 und 4.9 definiert das einen linearen positiv definiten Operator $\widehat{B} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ mit $\widehat{B}^n = \widehat{A}$. Ist $\widehat{C}$ ein weiterer positiv definiter Operator mit $\widehat{C}^n = \widehat{A}$, dann folgt mit $g(t) = t^n$ und $h(t) = [\, t\,\chi_{\sigma(\widehat{A})}(t)\,]^{1/n}$ nach Satz 4.7 (iii)

$$\widehat{C} = (gh)(\widehat{C}) = f(\widehat{A}) = \widehat{A}^{1/n}.$$

Die Vertauschbarkeit folgt aus Corollar 4.8. □

Man kann also aus beschränkten positiv definiten Operatoren die n-ten Wurzeln ziehen und schreibt entsprechend symbolisch dafür $\widehat{B} = \widehat{A}^{1/n} = \sqrt[n]{\widehat{A}}$. Damit können wir als weiteres Hilfsmittel in sinnvoller Weise *Betragsoperatoren* einführen.

4.76 Definition: Sind $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ Hilberträume und ist $\widehat{A} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ ein linearer Operator, dann bezeichne $|\widehat{A}| : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ denjenigen Operator, für den $|\widehat{A}|^2 = \widehat{A}^*\widehat{A}$ gilt.

Lemma 4.75 garantiert, daß der Operator $|\widehat{A}|$ jeweils eindeutig bestimmt ist; außerdem sieht man unmittelbar, daß $|\widehat{A}|$ und damit auch $|\widehat{A}|^r$ für alle $r > 0$ positiv definit und somit selbstadjungiert ist[25]. Ist $\widehat{A}$ kompakt, dann sind nach Corollar 4.56 die singulären Werte von $\widehat{A}$ gleichzeitig die nichtverschwindenden Eigenwerte von $|\widehat{A}|$. – Die Bedeutung der Betragsoperatoren liegt unter anderem darin, daß man jeden kompakten Operator zwischen zwei Hilberträumen in einen isometrischen Anteil und einen Betragsanteil zerlegen kann, wie das nächste Resultat zeigt.

4.77 Polarzerlegung:[26] *Sind $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ Hilberträume, dann gibt es zu jedem $\widehat{A} \in \mathscr{C}(\mathcal{H},\mathcal{G})$ ein $\widehat{U} \in \mathscr{L}(\mathcal{H},\mathcal{G})$ mit $\widehat{A} = \widehat{U}\,|\widehat{A}|$, sodaß $\widehat{U} \restriction \ker \widehat{U}^{\perp}$ unitär ist.*

Beweis: Der Operator $\widehat{U}_0 : \operatorname{ran}|\widehat{A}| \longrightarrow \operatorname{ran}\widehat{A}$ sei definiert durch $\widehat{U}_0\,(|\widehat{A}|\,\psi) = \widehat{A}\,\psi$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$. Wegen

$$\|\widehat{A}\,\psi\| = (\widehat{A}\,\psi, \widehat{A}\,\psi) = (\psi, \widehat{A}^{*}\widehat{A}\,\psi) = (\psi, |\widehat{A}|^2\,\psi) = (|\widehat{A}|\,\psi, |\widehat{A}|\,\psi) = \big\|\,|\widehat{A}|\,\psi\,\big\|.$$

ist $\widehat{U}_0$ auf $\operatorname{ran}|\widehat{A}|$ isometrisch. $\widehat{U}_0$ läßt sich zu einer Isometrie $\overline{U}_0 : \overline{\operatorname{ran}|\widehat{A}|} \longrightarrow \overline{\operatorname{ran}\widehat{A}}$ erweitern, und folglich erhält man mit

$$\widehat{U}\,\psi = \begin{cases} \overline{U}_0\,\psi & \text{für} \quad \psi \in \overline{\operatorname{ran}|\widehat{A}|} \\ 0 & \text{für} \quad \psi \in \ker\widehat{A} \end{cases}$$

den gewünschten unitären Operator. □

Wegen $\ker\widehat{A} = \ker|\widehat{A}|$ ist $\widehat{U}$ für jedes $\widehat{A} \in \mathscr{C}(\mathcal{H},\mathcal{G})$ eindeutig festgelegt. Lemma 4.75 für $n = 2$ sowie Satz 4.77 werden wir in Abschnitt 4.4.2.5 verallgemeinern. – Für Operatoren der Spurklasse lassen sich $|\widehat{A}|$ und $|\widehat{A}|^2$ mit Hilfe der Schmidt-Darstellung in einfacher Weise berechnen. Dazu führen wir analog zu den Funktionalen f_ψ mit $f_\varphi(\psi) = (\psi, \varphi)$ Funktionale $\tilde{f}_\varphi$ ein, die durch $\tilde{f}_\varphi(\psi) = (\varphi, \psi)$ definiert sind.

4.78 Lemma: *Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ mit Schmidt-Darstellung $\widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\chi_n\,f_{\varphi_n}$, dann gilt $|\widehat{A}| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\chi_n\,\tilde{f}_{\chi_n}$ und $|\widehat{A}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\,\chi_n\,\tilde{f}_{\chi_n}$.*

Beweis: Für alle $\psi \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned} |\widehat{A}|^2\,\psi = \widehat{A}^{*}\widehat{A}\,\psi &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(\xi_n, \widehat{A}\,\psi)\,\chi_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(\widehat{A}^{*}\xi_n, \psi)\,\chi_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_n\,a_j\,(\xi_j, \xi_n)\,(\chi_j, \psi)\,\chi_n \end{aligned}$$

[25]Die Betragsschreibweise ist hier üblich, aber natürlich irreführend, nicht nur, weil es sich um einen operatorwertigen „Betrag" handelt, sondern auch, weil die Dreiecksungleichung hierfür im allgemeinen nicht gilt.

[26]Hierbei handelt es sich in gewisser Weise um eine Verallgemeinerung der Polardarstellung $z = r\,e^{i\varphi}$ für komplexe Zahlen. Beachte aber die vorige Anmerkung.

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_n\, a_j\, \delta_{jn}\,(\chi_j,\psi)\,\chi_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\,(\chi_n,\psi)\,\chi_n,$$

und daraus folgt $|\widehat{A}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\,\chi_n\,\tilde{f}_{\chi_n}$. Außerdem gilt für alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\chi_n\,\tilde{f}_{\chi_n}\right)^2 \psi &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_n\, a_j\,(\chi_j,\psi)\,(\chi_j,\chi_n)\,\chi_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_n\, a_j\,(\chi_j,\psi)\,\delta_{jn}\,\chi_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\,(\chi_n,\psi)\,\chi_n = |\widehat{A}|^2\,\psi,\end{aligned}$$

und nach Lemma 4.75 folgt daraus $|\widehat{A}| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\chi_n\,\tilde{f}_{\chi_n}$. □

Mit dem Begriff des Operatorbetrags erhalten wir unter anderem einen Zusammenhang zwischen der Spur und der Spurklasse- sowie der Hilbert-Schmidt-Norm.

4.79 Satz: *$\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum. Dann gilt*

(i) $\|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_1} \geqq |\operatorname{tr}\widehat{A}|$ *für alle* $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$*;*

(ii) $\|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_1} = \operatorname{tr}|\widehat{A}|$ *für alle* $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$*;*

(iii) $\|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_2}^2 = \operatorname{tr}|\widehat{A}|^2$ *für alle* $\widehat{A} \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H})$*.*

Beweis: [27] $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ sei eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$, außerdem seien $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abzählbare Orthonormalsysteme in $\mathcal{H}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörige singuläre Folge des Operators $\widehat{A}$.
(i) Ist $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$, dann folgt nach Corollar 2.164

$$\begin{aligned}|\operatorname{tr}\widehat{A}| &= \left|\sum_{\gamma<\Gamma}(\widehat{A}\varphi_\gamma,\varphi_\gamma)\right| = \left|\sum_{\gamma<\Gamma}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(\varphi_\gamma,\xi_n)\,(\chi_n,\varphi_\gamma)\right| \\ &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(\chi_n,\xi_n)\right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|(\chi_n,\xi_n)| \leqq \sum_{n=0}^{\infty}|a_n| = \|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_1}.\end{aligned}$$

(ii) Für $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ gilt nach Lemma 4.78 und Corollar 2.164

$$\operatorname{tr}|\widehat{A}| = \sum_{\gamma<\Gamma}(|\widehat{A}|\,\varphi_\gamma,\varphi_\gamma) = \sum_{\gamma<\Gamma}(\varphi_\gamma,|\widehat{A}|\,\varphi_\gamma)$$

[27] Die Resultate (ii) und (iii) werden gelegentlich gleich als Definitionen der Spurklasse- beziehungsweise der Hilbert-Schmidt-Operatoren sowie deren jeweiliger Normen herangezogen. In dieser Sprechweise sind die Spurklasse-Operatoren genau diejenigen mit $\operatorname{tr}|\widehat{A}| < \infty$ und die Hilbert-Schmidt-Operatoren genau diejenigen mit $\operatorname{tr}|\widehat{A}|^2 < \infty$. Siehe hierzu beispielsweise [296].

$$= \sum_{\gamma<\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (\varphi_\gamma, \chi_n)\, (\chi_n, \varphi_\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (\chi_n, \chi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \|\, \widehat{A}\,\|_{\mathscr{S}_1}.$$

(iii) Für $\widehat{A} \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H})$ gilt analog

$$\operatorname{tr} |\,\widehat{A}\,|^2 = \sum_{\gamma<\Gamma} (|\,\widehat{A}\,|^2\, \varphi_\gamma, \varphi_\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \|\, \widehat{A}\,\|_{\mathscr{S}_2}^2. \qquad \square$$

Aus Satz 4.79 folgt natürlich $|\,\widehat{A}\,| \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ für alle $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ und $|\,\widehat{A}\,| \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H})$ für alle $\widehat{A} \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H})$; außerdem folgt aus den Aussagen (i) und (ii) die Relation

$$|\operatorname{tr} \widehat{A}\,| \leqq \operatorname{tr} |\,\widehat{A}\,|$$

für alle $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$. – Damit können wir nun den in der Bemerkung im Anschluß an Satz 4.58 bereits angedeuteten engen Zusammenhang zwischen Spurklasse- und Hilbert-Schmidt-Operatoren weiter ausbauen.

4.80 Satz: *Es seien $\mathcal{H}$ ein Vektorraum und $\widehat{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$;

(ii) $|\,\widehat{A}\,|^{1/2} \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H})$;

(iii) Es gibt $\widehat{B}_1, \widehat{B}_2 \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H})$ *mit* $\widehat{A} = \widehat{B}_1\, \widehat{B}_2$;

(iv) Es gibt $\widehat{C}_1, \widehat{C}_2 \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H})$ *mit* $|\,\widehat{A}\,| = \widehat{C}_1\, \widehat{C}_2$.

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii): $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ sei eine beliebige Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Dann folgt aus $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$

$$\operatorname{tr} \big|\, |\,\widehat{A}\,|^{1/2}\, \big|^2 = \sum_{\gamma<\Gamma} \Big(\big|\, |\,\widehat{A}\,|^{1/2}\, \big|^2\, \varphi_\gamma, \varphi_\gamma \Big) = \sum_{\gamma<\Gamma} (|\,\widehat{A}\,|\, \varphi_\gamma, \varphi_\gamma) = \operatorname{tr} |\,\widehat{A}\,|,$$

und nach Satz 4.79 (ii) ist daher $|\,\widehat{A}\,|^{1/2} \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H})$.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Nach (ii) ist $|\,\widehat{A}\,|$ und damit auch $\widehat{A}$ aus $\mathscr{S}_1(\mathcal{H})$, folglich ist $\widehat{A}$ kompakt. Nach Satz 4.77 gibt es daher eine Polarzerlegung $\widehat{A} = \widehat{U}\, |\,\widehat{A}\,|$; mit dieser erhält man

$$\widehat{A} = \widehat{U}\, |\,\widehat{A}\,|^{1/2}\, |\,\widehat{A}\,|^{1/2}.$$

Hierbei gilt $\widehat{U}\, |\,\widehat{A}\,|^{1/2} \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H})$ nach Satz 4.59 (ii) und $|\,\widehat{A}\,|^{1/2} \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H})$ nach (ii).
(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Sei $\widehat{A} = \widehat{B}_1\, \widehat{B}_2$ mit $\widehat{B}_1, \widehat{B}_2 \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H})$. Aus $\widehat{A} = \widehat{U}\, |\,\widehat{A}\,|$ folgt nach Satz 4.77

$$|\,\widehat{A}\,| = \widehat{U}^* \widehat{A} = \widehat{U}^* \widehat{B}_1\, \widehat{B}_2;$$

hierbei ist $\widehat{U}^* \widehat{B}_1 \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H})$ nach Satz 4.59 (ii) und $\widehat{B}_2 \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H})$ nach Voraussetzung.

(iv) $\Longrightarrow$ (i): Es seien $|\widehat{A}| = \widehat{C}_1 \widehat{C}_2$ mit $\widehat{C}_1, \widehat{C}_2 \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H})$ und $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}$, dann ist nach Ungleichung 2.80

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}|\widehat{A}| &= \sum_{\gamma<\Gamma} (|\widehat{A}|\varphi_\gamma, \varphi_\gamma) = \sum_{\gamma<\Gamma} (\widehat{C}_1 \widehat{C}_2 \varphi_\gamma, \varphi_\gamma) = \sum_{\gamma<\Gamma} (\widehat{C}_2 \varphi_\gamma, \widehat{C}_1^* \varphi_\gamma) \\ &\leqq \sum_{\gamma<\Gamma} \|\widehat{C}_2 \varphi_\gamma\| \, \|\widehat{C}_1^* \varphi_\gamma\| \leqq \Big(\sum_{\gamma<\Gamma} \|\widehat{C}_2 \varphi_\gamma\|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{\gamma<\Gamma} \|\widehat{C}_1^* \varphi_\gamma\|^2\Big)^{1/2} \\ &= \Big(\sum_{\gamma<\Gamma} (\widehat{C}_2^* \widehat{C}_2 \varphi_\gamma, \varphi_\gamma)\Big)^{1/2} \Big(\sum_{\gamma<\Gamma} (\varphi_\gamma, \widehat{C}_1^* \widehat{C}_1 \varphi_\gamma)\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

$\widehat{C}_1^* \widehat{C}_1$ ist selbstadjungiert, daher folgt nach Satz 4.79 (ii) weiter

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}|\widehat{A}| &\leqq \Big(\sum_{\gamma<\Gamma} (\widehat{C}_2^* \widehat{C}_2 \varphi_\gamma, \varphi_\gamma)\Big)^{1/2} \Big(\sum_{\gamma<\Gamma} (\widehat{C}_1^* \widehat{C}_1 \varphi_\gamma, \varphi_\gamma)\Big)^{1/2} \\ &\leqq \Big(\sum_{\gamma<\Gamma} (|\widehat{C}_2|^2 \varphi_\gamma, \varphi_\gamma)\Big)^{1/2} \Big(\sum_{\gamma<\Gamma} (|\widehat{C}_1|^2 \varphi_\gamma, \varphi_\gamma)\Big)^{1/2} \\ &= (\operatorname{tr}|\widehat{C}_2|^2)^{1/2} (\operatorname{tr}|\widehat{C}_1|^2)^{1/2} = \|\widehat{C}_2\|_{\mathscr{S}_2} \|\widehat{C}_1\|_{\mathscr{S}_2}.\end{aligned}$$

Folglich ist $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$. □

Schreibt man die Aussage von Satz 4.79 (ii) in der Form $\|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_2}^2 = \operatorname{tr}(\widehat{A}^* \widehat{A})$, dann drängt sich hierdurch die Einführung eines Skalarprodukts für Hilbert-Schmidt-Operatoren auf; das bestätigt der folgende

4.81 Satz: *Sind $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ Hilberträume, dann wird durch $\langle \widehat{A}, \widehat{B} \rangle := \operatorname{tr}(\widehat{B}^* \widehat{A})$ für $\widehat{A}, \widehat{B} \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ ein Skalarprodukt auf $\mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ definiert. Dabei gilt $\|\widehat{C}\|_{\mathscr{S}_2}^2 = \langle \widehat{C}, \widehat{C} \rangle$ für $\widehat{C} \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$.*

Beweis: $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ sei eine beliebige Orthonormalbasis in $\mathcal{H}$. Dann gilt
(i) für alle $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C} \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\langle \alpha \widehat{A} + \beta \widehat{B}, \widehat{C} \rangle &= \operatorname{tr}[\widehat{C}^* (\alpha \widehat{A} + \beta \widehat{B})] = \sum_{\gamma<\Gamma} (\widehat{C}^* (\alpha \widehat{A} + \beta \widehat{B}) \varphi_\gamma, \varphi_\gamma) \\ &= \alpha \sum_{\gamma<\Gamma} (\widehat{C}^* \widehat{A} \varphi_\gamma, \varphi_\gamma) + \beta \sum_{\gamma<\Gamma} (\widehat{C}^* \widehat{B} \varphi_\gamma, \varphi_\gamma) \\ &= \alpha \operatorname{tr}(\widehat{C}^* \widehat{A}) + \beta \operatorname{tr}(\widehat{C}^* \widehat{B}) = \alpha \langle \widehat{A}, \widehat{C} \rangle + \beta \langle \widehat{B}, \widehat{C} \rangle;\end{aligned}$$

(ii) für alle $\widehat{A}, \widehat{B} \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$

$$\langle \widehat{A}, \widehat{B} \rangle = \operatorname{tr}(\widehat{B}^* \widehat{A}) = \sum_{\gamma<\Gamma} (\widehat{B}^* \widehat{A} \varphi_\gamma, \varphi_\gamma)$$

$$= \sum_{\gamma<\Gamma} (\varphi_\gamma, \widehat{A}^* \widehat{B}\, \varphi_\gamma) = \overline{\sum_{\gamma<\Gamma} (\widehat{A}^* \widehat{B}\, \varphi_\gamma, \varphi_\gamma)} = \overline{\operatorname{tr}(\widehat{A}^* \widehat{B})} = \overline{\langle\, \widehat{B}, \widehat{A} \rangle};$$

(iii) für alle $\widehat{C} \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ mit $\widehat{C} \neq 0$

$$\langle\, \widehat{C}, \widehat{C}\, \rangle = \operatorname{tr}(\widehat{C}^* \widehat{C}\,) = \operatorname{tr}|\widehat{C}\,|^2 = \|\widehat{C}\,\|^2_{\mathscr{S}_2} > 0. \qquad \square$$

Das Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ macht aus jedem Raum $\mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ nicht einfach nur einen unitären Raum.

4.82 Satz: *Für alle Hilberträume $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ ist $\mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ mit dem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ ebenfalls ein Hilbertraum.*

Beweis: Nach Satz 4.81 ist $\mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ ein unitärer Raum. Nun sei $(\widehat{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ und damit in $\mathscr{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Nach Satz 2.30 gibt es daher ein $\widehat{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ mit $\widehat{A} = \lim_{n\to\infty} \widehat{A}_n$. Nun sei $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ eine beliebige Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Da zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodaß $\|\, \widehat{A}_m - \widehat{A}_n \,\|_{\mathscr{S}_2} \leqq \varepsilon$ gilt für alle $m, n > N$, folgt für alle $q \in \mathbb{N}$ nach Satz 4.79 (ii)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{q} \|\, (\, \widehat{A} - \widehat{A}_m\,)\, \varphi_j \,\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{q} \|\, (\, \widehat{A}_n - \widehat{A}_m\,)\, \varphi_j \,\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{q} (|\, \widehat{A}_n - \widehat{A}_m\,|^2\, \varphi_j, \varphi_j) \\
&\leqq \lim_{n\to\infty} \sum_{\gamma<\Gamma} (|\, \widehat{A}_n - \widehat{A}_m\,|^2\, \varphi_\gamma, \varphi_\gamma) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{tr}|\, \widehat{A}_n - \widehat{A}_m\,|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \|\, \widehat{A}_n - \widehat{A}_m \,\|^2_{\mathscr{S}_2} \leqq \sup_{n\geqq N} \|\, \widehat{A}_n - \widehat{A}_m \,\|^2_{\mathscr{S}_2} \leqq \varepsilon^2
\end{aligned}$$

für alle $m \geqq N$. Damit gilt auch

$$\sum_{\gamma<\Gamma} \|\, (\, \widehat{A} - \widehat{A}_m\,)\, \varphi_\gamma \,\|^2 \leqq \varepsilon^2$$

für alle $m \geqq N$, und nach Satz 4.67 folgt $\widehat{A} - \widehat{A}_m \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Damit ist auch $\widehat{A} \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$, also ist $\mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ vollständig. $\square$

Mit Hilfe von Satz 4.82 läßt sich nun ein bemerkenswertes Dualitätsresultat für die Räume $\mathscr{C}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ und $\mathscr{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ für beliebige Hilberträume $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ beweisen. Das folgende Resultat ist dabei behilflich.

4.83 Lemma: *Für $\widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \chi_n\, f_{\xi_n} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ gilt*

$$\|\, \widehat{A} \,\|_{\mathscr{S}_1} = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\|\, \|\psi_n\| \;\middle|\; \widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n\, f_{\psi_n} \text{ ist eine nukleare Darstellung} \right\}$$

Beweis: Nach (4.33) gilt $\| \widehat{A} \|_{\mathscr{S}_1} \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\| \, \|\psi_n\|$ für jede nukleare Darstellung von $\widehat{A}$. Da die Folgen $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\, a_n \chi_n \,)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls eine nukleare Darstellung von $\widehat{A}$ liefern und hierfür $\| \widehat{A} \|_{\mathscr{S}_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\| \, \|\psi_n\|$ gilt, folgt daraus die Behauptung. □

Damit ermitteln wir nun zunächst den Dualraum von $\mathscr{C}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$.

4.84 Satz: *Sind $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ Hilberträume, dann ist die Abbildung $\mathfrak{T} : \mathscr{S}_1(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \longrightarrow \mathscr{C}(\mathcal{H}, \mathcal{G})'$ mit $(\, \mathfrak{T}\widehat{C} \,) \widehat{A} = \operatorname{tr}(\, \widehat{C} \widehat{A} \,)$ für alle $\widehat{A} \in \mathscr{C}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ und alle $\widehat{C} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ ein isometrischer Isomorphismus.*

Beweis: Der Beweis erfolgt in drei Schritten.
1. Nach Satz 4.74 (ii) und (iii) ist $\mathfrak{T}$ linear. Für $\widehat{C} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ und $\widehat{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ gilt nach Satz 4.59 (ii) $\widehat{C} \widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$. Ist $\widehat{C} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n f_{\psi_n}$ eine beliebige nukleare Darstellung für $\widehat{C}$, dann ist folglich $\widehat{C} \widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n f_{\widehat{A}^* \psi_n}$ eine solche für $\widehat{C} \widehat{A}$. Mit (4.35) sowie Ungleichung 2.142 gilt daher

$$|\, (\, \mathfrak{T}\widehat{C} \,) \widehat{A} \,| = |\, \operatorname{tr}(\widehat{C} \widehat{A}) \,| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_n, \widehat{A}^* \psi_n) \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} (\widehat{A} \varphi_n, \psi_n) \right|$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{\infty} |(\widehat{A} \varphi_n, \psi_n)| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \| \widehat{A} \varphi_n \| \, \|\psi_n\| \leqq \| \widehat{A} \| \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\| \, \|\psi_n\|.$$

für jede nukleare Darstellung von $\widehat{C}$; nach Lemma 4.83 folgt

$$|\, (\, \mathfrak{T}\widehat{C} \,) \widehat{A} \,| \leqq \|\widehat{C}\|_{\mathscr{S}_1} \, \|\widehat{A}\|,$$

und daher ist

$$\| \, \mathfrak{T}\widehat{C} \, \| \leqq \|\widehat{C}\|_{\mathscr{S}_1}.$$

Folglich ist $\mathfrak{T}\widehat{C} \in \mathscr{C}(\mathcal{H}, \mathcal{G})'$ für alle $\widehat{C} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{G}, \mathcal{H})$.
2. Nun sei $g \in \mathscr{C}(\mathcal{H}, \mathcal{G})'$; dann ist $g \restriction \mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G}) \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G})'$. Nach Satz 4.82 und Satz 2.146 gibt es genau ein $\widehat{B} \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ mit $g(\widehat{A}) = \operatorname{tr}(\, \widehat{B}^* \widehat{A} \,)$ für alle $\widehat{A} \in \mathscr{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Nach Lemma 3.37 ist $\widehat{C} := \widehat{B}^* \in \mathscr{S}_2(\mathcal{G}, \mathcal{H})$; hierfür sei $\widehat{C} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \chi_j f_{\varphi_j}$ eine Schmidt-Darstellung mit den Orthonormalbasen $(\varphi_\gamma)_{\gamma < \Gamma}$ von $\mathcal{G}$ und $(\chi_\lambda)_{\lambda < \Lambda}$ von $\mathcal{H}$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei außerdem $\widehat{A}_n = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j f_{\chi_j}$. Nach Konstruktion ist $\widehat{A}_n \in \mathscr{F}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$, und für $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\|\psi\| = 1$ gilt nach Satz 2.140 und Satz 2.163 (iii)

$$\|\widehat{A}_n \psi\|^2 = \left\| \sum_{j=0}^{n} (\psi, \chi_j) \, \varphi_j \right\|^2 = \sum_{j=0}^{n} \| \, (\psi, \chi_j) \, \varphi_j \, \|^2$$

$$= \sum_{j=0}^{n} |(\psi, \chi_j)|^2 \leqq \sum_{\lambda < \Lambda} |(\psi, \chi_\lambda)|^2 = \|\psi\|^2,$$

woraus $\|\widehat{A}_n\| = 1$ und damit $\|g\| \geqq |g(\widehat{A}_n)|$ folgt. Da mit (4.35) und Satz 4.68 für alle $n \in \mathbb{N}$ auch

$$|g(\widehat{A}_n)| = |\operatorname{tr}(\widehat{C}\,\widehat{A}_n)| = \left| \operatorname{tr} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} a_m\, (\varphi_j, \varphi_m)\, \chi_m\, f_{\chi_j} \right|$$

$$= \left| \operatorname{tr} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} a_m\, \delta_{jm}\, \chi_m\, f_{\chi_j} \right| = \left| \operatorname{tr} \sum_{j=0}^{n} a_j\, \chi_j\, f_{\chi_j} \right| = \left| \sum_{j=0}^{n} a_j \right|$$

folgt, erhält man insgesamt

$$\|g\| \geqq \sum_{j=0}^{\infty} a_j = \|\widehat{C}\|_{\mathscr{S}_1}$$

und damit $\widehat{C} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Nach Corollar 4.57 folgt $g = \mathcal{T}\,\widehat{C}$, also ist $\mathcal{T}$ surjektiv.

3. Wegen $\|g\| = \|\,\mathcal{T}\,\widehat{C}\,\| \leqq \|\widehat{C}\|_{\mathscr{S}_1} \leqq \|g\|$ gilt $\|\,\mathcal{T}\,\widehat{C}\,\| = \|\widehat{C}\|_{\mathscr{S}_1}$ für $\widehat{C} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Somit ist $\mathcal{T}$ eine Isometrie und daher auch injektiv. □

Satz 4.84 besagt mit anderen Worten, daß für beliebige Hilberträume $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ der Dualraum $\mathscr{C}(\mathcal{H}, \mathcal{G})'$ mit dem Raum $\mathscr{S}_1(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ elementweise identifiziert werden kann[28].

Wir betrachten nun einen weiteren Dualraum und erhalten dabei ein sich unmittelbar an den vorigen Satz anschließendes Resultat.

4.85 Satz: *Sind $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ Hilberträume, dann ist die Abbildung $\mathcal{T} : \mathscr{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathscr{S}_1(\mathcal{G}, \mathcal{H})'$ mit $(\,\mathcal{T}\,\widehat{A}\,)\,\widehat{C} = tr(\,\widehat{C}\,\widehat{A}\,)$ für alle $\widehat{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ und alle $\widehat{C} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ ein isometrischer Isomorphismus.*

Beweis: Auch hier erfolgt der Beweis in drei Schritten.

1. Zunächst zeigt man analog zu Teil 1 des Beweises von Satz 4.84, daß $\mathcal{T}\,\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{G}, \mathcal{H})'$ gilt für alle $\widehat{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$.

2. Nun sei $g \in \mathscr{S}_1(\mathcal{G}, \mathcal{H})'$. Nach Satz 4.68 gilt $\chi\, f_\xi \in \mathscr{S}_1(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ für $\chi \in \mathcal{H}$ und $\xi \in \mathcal{G}$. Damit definieren wir eine Abbildung $G : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{K}$ mit $G(\chi, \xi) = g(\chi\, f_\xi)$; diese ist nach Konstruktion linear in der ersten und antilinear in der zweiten Variablen und außerdem gilt nach (4.35)

$$|G(\chi, \xi)| = |g(\chi\, f_\xi)| \leqq \|g\|\, \|\chi\, f_\xi\|_{\mathscr{S}_1} \leqq \|g\|\, \|\chi\|\, \|\xi\|$$

Damit ist G beschränkt, also ist für jedes $\xi \in \mathcal{G}$ die Abbildung $\gamma_\xi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ mit $\gamma_\xi(\chi) = G(\chi, \xi)$ ein Element von $\mathcal{H}'$, und folglich gibt es nach Satz 2.146 genau ein $\eta \in \mathcal{H}$ mit $\gamma_\xi(\chi) = (\chi, \eta)$ für alle $\chi \in \mathcal{H}$. Der hierdurch definierte Operator $\widehat{B} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ mit

[28] Das liefert gemeinsam mit mit Satz 4.66 und Satz 2.30 einen alternativen Beweis für den Fall $p = 1$ in Satz 4.65.

$\widehat{B}\,\xi = \eta$ ist nach Konstruktion ein Element von $\mathscr{L}(\mathcal{G},\mathcal{H})$. Für $\widehat{A} := \widehat{B}^* \in \mathscr{L}(\mathcal{H},\mathcal{G})$ gilt dann $\|\,\widehat{A}\,\| \leqq \|g\|$ sowie $g(\chi\, f_\xi) = (\widehat{A}\,\chi,\xi)$ für alle $\chi \in \mathcal{H}$ und alle $\xi \in \mathcal{G}$. Außerdem gibt es nach Satz 4.68 und Corollar 4.69 zu jedem $\widehat{D} \in \mathscr{F}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ Folgen $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{G}$ und $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ sowie ein $n \in \mathbb{N}$, sodaß $\widehat{D} = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j\, f_{\psi_j}$. Daraus folgt $\widehat{D}\,\widehat{A} = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j\, f_{\widehat{A}^*\psi_j}$ und mit Satz 4.68 weiter

$$g(\widehat{D}) = \sum_{j=0}^{n} (\widehat{A}\varphi_j, \psi_j) = \sum_{j=0}^{n} (\varphi_j, \widehat{A}^*\psi_j) = \mathrm{tr}\,(\,\widehat{D}\,\widehat{A}\,).$$

Wiederum nach Corollar 4.69 folgt hieraus $g = \mathfrak{T}\,\widehat{A}$, also ist $\mathfrak{T}$ surjektiv.
3. Wegen $\|g\| = \|\,\mathfrak{T}\,\widehat{A}\,\|_{\mathscr{S}_1} \leqq \|\,\widehat{A}\,\| \leqq \|g\|$ gilt $\|\,\mathfrak{T}\,\widehat{A}\,\|_{\mathscr{S}_1} = \|\,\widehat{A}\,\|$. Somit ist $\mathfrak{T}$ eine Isometrie und damit auch injektiv. □

Nach Satz 4.85 kann für beliebige Hilberträume $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ der Dualraum $\mathscr{S}_1(\mathcal{G},\mathcal{H})'$ mit dem Raum $\mathscr{L}(\mathcal{H},\mathcal{G})$ elementweise identifiziert werden. Satz 4.84 und Satz 4.85 liefern gemeinsam das folgende

4.86 Corollar: *Für beliebige Hilberträume $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ sind $\mathscr{L}(\mathcal{H},\mathcal{G})$ und $\mathscr{C}(\mathcal{H},\mathcal{G})''$ isometrisch isomorph.*

Wie üblich bei unendlichdimensionalen Räumen, die keine Hilberträume sind, schließt sich der Kreislauf somit nicht; durch zweimalige Dualbildung gelangt man von den kompakten Operatoren zu allen beschränkten Operatoren zwischen zwei Hilberträumen.

Nachdem im vorliegenden Abschnitt zwar Folgerungen aus der Spektralzerlegung kompakter Operatoren diskutiert wurden, dabei aber von Spektren und Eigenwerten fast gar nicht die Rede war, rücken diese in den weiteren Abschnitten nun wieder mehr ins Zentrum der Betrachtungen.

4.4.1.4 Unendliche Determinanten

Mit der Determinante verallgemeinern wir nach der Spur gleich einen weiteren wohlbekannten Begriff der linearen Algebra auf die unendlichdimensionale Funktionalanalysis. Für Matrizen $\mathfrak{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist die Determinante bekanntlich diejenige eindeutig bestimmte Abbildung, die linear in jeder Spalte sowie alternierend ist und der Einheitsmatrix den Wert 1 zuordnet. Das kann man beispielsweise in der Gestalt

$$\det \mathfrak{X} = \sum_{\pi\in \mathrm{P}(n)} \mathrm{sign}(\pi)\, x_{1\,\pi(1)}\, x_{2\,\pi(2)} \cdots x_{n\,\pi(n)}$$

schreiben, wobei $\mathrm{P}(n)$ die Gruppe der Permutationen von n Elementen ist und $\mathrm{sign}(\pi)$ das Vorzeichen der Permutation π angibt. Etwas analoges läßt sich natürlich nicht für beliebige lineare Operatoren auf Hilberträumen definieren, aber immerhin für solche, die sich in geeigneter Weise mit Hilfe von Spurklasseoperatoren konstruieren lassen[29]. Um das zu sehen, wiederholen wir zunächst etwas multilineare Algebra, genauergesagt einige Aspekte, die speziell mit Hilberträumen zu tun haben. Sind $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n$ beliebige Hilberträume und $\psi_1 \in \mathcal{H}_1, \psi_2 \in \mathcal{H}_2, \ldots, \psi_n \in \mathcal{H}_n$, dann wird durch

$$\psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \ldots \otimes \psi_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) := (\psi_1, \varphi_1)\,(\psi_2, \varphi_2) \cdots (\psi_n, \varphi_n)$$

für $\varphi_1 \in \mathcal{H}_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_2, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{H}_n$ eine n-lineare Abbildung

$$\psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \ldots \otimes \psi_n : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \ldots \times \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

definiert. Mit

$$(\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \ldots \otimes \chi_n, \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \ldots \otimes \xi_n) = (\chi_1, \xi_1)\,(\chi_2, \xi_2) \cdots (\chi_n, \xi_n) \tag{4.36}$$

erhält man ein Skalarprodukt auf $\mathrm{S} := \operatorname{span}\{\, \psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \ldots \otimes \psi_n \mid \psi_k \in \mathcal{H}_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\,\}$. Die Vervollständigung von S in der durch dieses Skalarprodukt induzierten Topologie nennt man das *Hilbertraum-Tensorprodukt* der Räume $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n$ und schreibt dafür $\bigoplus_{k=1}^{n} \mathcal{H}_k$. Hat man es mit n Kopien ein und desselben Hilbertraums $\mathcal{H}$ zu tun, schreibt man kurz $\bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{H} = \mathcal{H}^{\otimes n}$. In diesem Raum kann man mit der Definition

$$\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\pi \in \mathrm{P}(n)} \operatorname{sign}(\pi)\, \psi_{\pi(1)} \otimes \psi_{\pi(2)} \otimes \ldots \otimes \psi_{\pi(n)}$$

alternierende n-lineare Abbildungen auf $\mathcal{H} \times \ldots \times \mathcal{H}$ konstruieren; die Vervollständigung von $\operatorname{span}\{\, \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n \mid \psi_k \in \mathcal{H}_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\,\}$ wird mit $\mathcal{H}^{\wedge n}$ bezeichnet. Natürlich ist $\mathcal{H}^{\wedge n}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}^{\otimes n}$; genauergesagt gilt

$$\mathcal{H}^{\wedge n} = \{\, \Psi \in \mathcal{H}^{\otimes n} \mid \Psi \text{ alternierend} \,\}.$$

Außerdem setzt man formal $\mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathcal{H}^{\wedge 0} = \mathbb{C}$. Zu jedem $\widehat{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ gehört ein Operator $\widehat{A}^{\otimes n} \in \mathscr{L}(\mathcal{H}^{\otimes n})$, der durch

$$\widehat{A}^{\otimes n}(\psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \ldots \otimes \psi_n) := \widehat{A}\,\psi_1 \otimes \widehat{A}\,\psi_2 \otimes \ldots \otimes \widehat{A}\,\psi_n$$

definiert ist. Nach Konstruktion gilt $\widehat{A}^{\otimes n}\,\mathcal{H}^{\wedge n} \subset \mathcal{H}^{\wedge n}$ für alle $\widehat{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$; entsprechend schreibt man $\widehat{A}^{\otimes n} \restriction \mathcal{H}^{\wedge n} = \widehat{A}^{\wedge n}$. Für $\widehat{A}, \widehat{B} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ gilt hierbei $(\,\widehat{A}\,\widehat{B}\,)^{\otimes n} = \widehat{A}^{\otimes n}\,\widehat{B}^{\otimes n}$ sowie $(\,\widehat{A}\,\widehat{B}\,)^{\wedge n} = \widehat{A}^{\wedge n}\,\widehat{B}^{\wedge n}$. Formal gilt $\widehat{A}^{\otimes 0} = \mathbf{1}$. – Damit kommen wir zum zentralen Begriff des vorliegenden Abschnitts.

[29] Die hier verwendete Definition der Determinante für Operatoren auf unendlichdimensionalen Räumen wurde von Grothendieck gefunden [124]; die zugehörigen Resultate samt ihrer Beweise, welche im vorliegenden Abschnitt zu finden sind, wurden von Barry Simon entdeckt [299], [344], [345].

4.87 Definition: Es sei $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$. Dann heißt

$$\det(1 + \widehat{A}) := \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tr} \widehat{A}^{\wedge n} \tag{4.37}$$

Determinante von $1 + \widehat{A}$.

Dabei muß selbstverständlich zunächst die Frage beantwortet werden, ob die unendliche Reihe in (4.37) überhaupt konvergiert. Eine notwendige, aber nicht hinreichende Voraussetzung dafür ist, daß $\widehat{A}^{\wedge n} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H}^{\wedge n})$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Um das nachzuweisen, betrachten wir die Folge $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ der singulären Werte von $\widehat{A}$; diese sei so angeordnet, daß $a_0 \geqq a_1 \geqq \ldots \geqq 0$ gilt. Dann bilden die nichtverschwindenden Eigenwerte des Operators $|\widehat{A}^{\wedge n}| = |\widehat{A}|^{\wedge n}$ die Folge $(a_{m_1} a_{m_2} \cdots a_{m_n})_{\substack{m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N} \\ m_1 < m_2 < \ldots < m_n}}$, und somit gilt in der Tat

$$\begin{aligned} \|\widehat{A}^{\wedge n}\|_{\mathscr{S}_1} &= \sum_{\substack{m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N} \\ m_1 < m_2 < \ldots < m_n}} a_{m_1} a_{m_2} \cdots a_{m_n} \\ &\leqq \frac{1}{n!} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{m=0}^{\infty} a_{m_1} a_{m_2} \cdots a_{m_n} = \frac{\|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_1}^n}{n!} < \infty. \end{aligned}$$

Darüberhinaus hilft das folgende, wie wir gleich sehen werden auch noch anderweitig nützliche

4.88 Lemma: *Für alle* $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ *gilt* $|\det(1 + \widehat{A})| \leqq \exp \|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_1}$.

Beweis: Mit Satz 4.79 (i) findet man

$$|\det(1 + \widehat{A})| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tr} \widehat{A}^{\wedge n} \right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |\operatorname{tr} \widehat{A}^{\wedge n}| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \|\widehat{A}^{\wedge n}\|_{\mathscr{S}_1} \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_1}^n}{n!}. \qquad \square$$

Mit diesem Lemma folgt unmittelbar die absolute Konvergenz von (4.37). – Genauso schnell erhalten wir eine zweite Abschätzung der Determinante.

4.89 Lemma: *Für alle* $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ *gilt* $|\det(1 + \widehat{A})| \leqq \prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$.

Beweis: Ausmultiplizieren der rechten Seite liefert

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n) = \frac{1}{n!} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{m=0}^{\infty} a_{m_1} a_{m_2} \cdots a_{m_n}.$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Sehr viel aufwendiger ist es zu beweisen, daß aus der Ungleichung in Lemma 4.89 eine Gleichung wird, wenn man die dort auftretenden singulären Werte des Operators $\widehat{A}$ durch dessen Eigenwerte ersetzt. Für dieses und die übrigen im vorliegenden Abschnitt beschriebenen

Resultate sind einige Hilfssätze erforderlich, wovon das erste eine Brücke zur Funktionentheorie darstellt.

4.90 Lemma: *Für $\widehat{A}, \widehat{B}_1, \widehat{B}_2, \ldots, \widehat{B}_n \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ wird durch $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ mit*

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \det\left(1 + \widehat{A} + \sum_{j=1}^{n} z_j\, \widehat{B}_j\right)$$

eine ganze Funktion definiert.

Beweis: Die rechte Seite

$$\det\left(1 + \widehat{A} + \sum_{j=1}^{n} z_j\, \widehat{B}_j\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{tr}\left(\widehat{A} + \sum_{j=1}^{n} z_j\, \widehat{B}_j\right)^{\wedge m}$$

konvergiert absolut und damit auf allen kompakten Teilmengen des $\mathbb{C}^n$ auch gleichmäßig. Als Reihe aus Polynomen ist sie daher eine ganze Funktion der Variablen $z_1, z_2, \ldots, z_n$. □

Außerdem brauchen wir eine weitere Abschätzung.

4.91 Lemma: *Für alle $\widehat{A}, \widehat{B} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ gilt*

$$|\det(1 + \widehat{A}) - \det(1 + \widehat{B})| \leqq \|\widehat{A} - \widehat{B}\|_{\mathscr{S}_1} \exp(\|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_1} + \|\widehat{B}\|_{\mathscr{S}_1} + 1).$$

Beweis:[30] Wir betrachten die Funktion $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$F(\zeta) = \det\left[1 + \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B}) + \zeta(\widehat{A} - \widehat{B})\right]$$

und erhalten hiermit

$$|\det(1 + \widehat{A}) - \det(1 + \widehat{B})| = |F(1/2) - F(-1/2)|.$$

Nach Lemma 4.90 ist F eine ganze Funktion, also erst recht stetig differenzierbar. Somit ist die Differenz auf der rechten Seite durch den Differentialquotienten abschätzbar, das heißt, es gilt

$$|\det(1 + \widehat{A}) - \det(1 + \widehat{B})| \leqq \sup_{t \in [-1/2, 1/2]} |F'(t)|. \tag{4.38}$$

Nun seien $z \in \mathbb{C}$ und $R > 0$ sowie

$$C = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |z - \zeta| = R\} = \{R\, e^{i\theta} \mid 0 \leqq \theta < 2\pi\},$$

dann erhält man mit der Cauchyschen Integralformel für die erste Ableitung und $M = \max_{\zeta \in C} |F(\zeta)|$

[30] Siehe [340].

$$
\begin{aligned}
|F'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{F(R\, e^{i\theta})}{R^2\, e^{2i\theta}}\, R\, d\theta \right| \\
&\leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{F(R\, e^{i\theta})}{R\, e^{2i\theta}} \right| d\theta \leqq \frac{M}{2\pi R} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M}{2\pi R}\, 2\pi = \frac{M}{R}
\end{aligned}
$$

und mit (4.38) weiter

$$
|\det(1+\widehat{A}) - \det(1+\widehat{B})| \leqq \frac{1}{R} \sup_{t\in[-1/2,1/2]} \max_{|t-\zeta|=R} |F(\zeta)| \leqq \frac{1}{R} \sup_{|\zeta|=R+1/2} |F(\zeta)|.
$$

Nach Lemma 4.88 gilt

$$
\begin{aligned}
\det\left[1 + \frac{1}{2}(\widehat{A}+\widehat{B}) + \zeta(\widehat{A}-\widehat{B})\right] &\leqq \exp\left\| \frac{1}{2}(\widehat{A}+\widehat{B}) + \zeta(\widehat{A}-\widehat{B}) \right\|_{\mathscr{S}_1} \\
&\leqq \exp\left[\frac{1}{2} \|\widehat{A}+\widehat{B}\|_{\mathscr{S}_1} + |\zeta|\, \|\widehat{A}-\widehat{B}\|_{\mathscr{S}_1} \right],
\end{aligned}
$$

und damit folgt

$$
\begin{aligned}
|\det(1+\widehat{A}) - \det(1+\widehat{B})| &\leqq \frac{1}{R} \exp\left[\frac{1}{2} \|\widehat{A}+\widehat{B}\|_{\mathscr{S}_1} + \left(R + \frac{1}{2}\right) \|\widehat{A}-\widehat{B}\|_{\mathscr{S}_1} \right] \\
&\leqq \frac{1}{R} \exp\left[\|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_1} + \|\widehat{B}\|_{\mathscr{S}_1} + R\, \|\widehat{A}-\widehat{B}\|_{\mathscr{S}_1} \right].
\end{aligned}
$$

Mit $R = 1/\|\widehat{A}-\widehat{B}\|_{\mathscr{S}_1}$ erhält man die Behauptung. □

Daraus folgt unmittelbar ein

4.92 Corollar: *Das Funktional $f : \mathscr{S}_1(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(\widehat{A}) = \det(1+\widehat{A})$ ist stetig.*

Beweis: Zu $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ sei $(\widehat{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ mit $\lim_{n\to\infty} \|\widehat{A}-\widehat{A}_n\|_{\mathscr{S}_1} = 0$. Nach Lemma 4.91 gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$

$$
|\det(1+\widehat{A}) - \det(1+\widehat{A}_n)| \leqq \|\widehat{A}-\widehat{A}_n\|_{\mathscr{S}_1} \exp\left(\|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_1} + \|\widehat{A}_n\|_{\mathscr{S}_1} + 1 \right)
$$

und somit

$$
\lim_{n\to\infty} |\det(1+\widehat{A}) - \det(1+\widehat{A}_n)| = 0.
$$

□

Damit lassen sich nun auch die restlichen beiden der oben erwähnten Hilfsresultate gewinnen. Das erste ist ein Produktsatz für unendliche Determinanten.

4.93 Lemma: *Für alle $\widehat{A}, \widehat{B} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ gilt*

$$
\det(1+\widehat{A})\, \det(1+\widehat{B}) = \det(1+\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{A}\widehat{B}).
$$

Beweis: Es seien $\widehat{C}, \widehat{D} \in \mathscr{F}(\mathcal{H})$ und $\mathcal{V} = \operatorname{span}[(\ker \widehat{C})^\perp \cup (\ker \widehat{D})^\perp \cup \operatorname{ran} \widehat{C} \cup \operatorname{ran} \widehat{D}]$. Dann ist $\dim \mathcal{V} < \infty$, und außerdem gelten die Inklusionen

$$\widehat{C}\,\mathcal{V} \subset \mathcal{V}, \quad \widehat{C}\,\mathcal{V}^\perp \subset \mathcal{V}^\perp, \quad \widehat{C}\,\mathcal{V} \subset \mathcal{V}, \quad \widehat{C}\,\mathcal{V}^\perp \subset \mathcal{V}^\perp.$$

Hieraus folgt

$$\det(1 + \widehat{A}) = \det(1 + \widehat{A} \restriction \mathcal{V}),$$

$$\det(1 + \widehat{B}) = \det(1 + \widehat{B} \restriction \mathcal{V}),$$

$$\det(1 + \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{A}\widehat{B}) = \det[1 + (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{A}\widehat{B}) \restriction \mathcal{V}],$$

wobei rechts jeweils gewöhnliche endlichdimensionale Determinanten stehen. Für diese gilt die Aussage (i) gemäß der elementaren linearen Algebra, womit (i) für alle $\widehat{C}, \widehat{D} \in \mathscr{F}(\mathcal{H})$ folgt. Nach Corollar 4.92 ist die unendlichdimensionale Determinante stetig, und nach Corollar 4.69 ist $\mathscr{F}(\mathcal{H})$ dicht in $\mathscr{S}_1(\mathcal{H})$. Damit gilt die Behauptung auch für alle $\widehat{A}, \widehat{B} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$. □

Das zweite Hilfsresultat greift einen einfachen Sonderfall der in Lemma 4.90 betrachteten ganzen Funktionen auf.

4.94 Lemma: *Für jedes $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ und jeden Eigenwert λ von $\widehat{A}$ mit algebraischer Vielfachheit n hat die Funktion $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $F(z) = \det(1 + z\widehat{A})$ bei $z = -1/\lambda$ eine Nullstelle n-ter Ordnung.*

Beweis: Es seien λ ein Eigenwert von $\widehat{A}$ mit algebraischer Vielfachheit n und

$$\widehat{P} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (\widehat{A} - \zeta)^{-1} d\zeta$$

ein spektraler Projektor von $\widehat{A}$ zum Wert $-1/\lambda$ nach Lemma 4.10. Dann gilt nach (i)

$$\begin{aligned}\det(1 + z\widehat{A}) &= \det[1 + z\widehat{A}\widehat{P} + z\widehat{A}(1 - \widehat{P}) + z^2\widehat{P}\widehat{A}(1 - \widehat{P})\widehat{A}] \\ &= \det[1 + z\widehat{A}\widehat{P} + z\widehat{A}(1 - \widehat{P}) + z\widehat{A}\widehat{P}\,z\widehat{A}(1 - \widehat{P})] \\ &= \det(1 + z\widehat{A}\widehat{P}) \det[1 + z\widehat{A}(1 - \widehat{P})].\end{aligned}$$

Aus $\lambda \in \sigma(\widehat{A})$ folgt außerdem $\lambda \notin \sigma(\widehat{A}(1 - \widehat{P}))$; wählt man z aus einer genügend kleinen Umgebung von $-1/\lambda$, so ist $1 + z\widehat{A}(1 - \widehat{P})$ damit invertierbar und $\det[1 + z\widehat{A}(1 - \widehat{P})] \neq 0$. Andererseits ist $\widehat{A}\widehat{P} \in \mathscr{F}(\mathcal{H})$ und λ ein Eigenwert von $\widehat{A}\widehat{P}$ mit algebraischer Vielfachheit n, also gilt

$$\operatorname{tr}(\widehat{A}\widehat{P})^{\wedge j} = \binom{n}{j} (-1/\lambda)^n$$

und somit

$$\det(1 + z\widehat{A}\widehat{P}) = (1 + z\lambda)^n.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Ein erster Ertrag der soeben etwas mühsam zusammengetragenen Hilfssätze ist ein Resultat, mit dem man sich sehr schön davon überzeugen kann, daß unendlichdimensionale Determinanten in der Gestalt von Definition 4.87 tatsächlich eine sinnvolle Verallgemeínerung ihrer endlichdimensionalen Verwandten darstellen.

4.95 Satz: *Ist* $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$, *dann ist* $1+\widehat{A}$ *genau dann invertierbar, wenn* $\det(1+\widehat{A}) \neq 0$.

Beweis: „$\Longrightarrow$": $1+\widehat{A}$ sei invertierbar, dann gilt $-\widehat{A}(1+\widehat{A})^{-1} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ sowie

$$1+\widehat{A}-\widehat{A}(1+\widehat{A})^{-1}-\widehat{A}^2(1+\widehat{A})^{-1} = 1+\widehat{A}-\widehat{A}(1+\widehat{A})(1+\widehat{A})^{-1} = 1,$$

und mit (i) folgt

$$\begin{aligned}\det(1+\widehat{A})\det(1+\widehat{A})^{-1} &= \det(1+\widehat{A})\det[1+\widehat{A}(1+\widehat{A})^{-1}]\\ &= \det[1+\widehat{A}-\widehat{A}(1+\widehat{A})^{-1}-\widehat{A}^2(1+\widehat{A})^{-1}] = \det 1 = 1.\end{aligned}$$

Somit ist $\det(1+\widehat{A}) \neq 0$.
„$\Longleftarrow$": Nach Lemma 4.94 ist $\det(1+\eta\widehat{A}\widehat{P}) = 0$ für $\eta = -1/\lambda$. Ist nun $1+\widehat{A}$ nicht invertierbar, dann ist $\lambda = -1$ ein Eigenwert von $\widehat{A}$, folglich gilt $\det(1+\widehat{A}\widehat{P}) = 0$ und damit $\det(1+\widehat{A}) = 0$. □

Nun sind wir auch in der Lage, den bereits angedeuteten Umbau von Ungleichung 4.89 zu einer Gleichung vorzunehmen.

4.96 Satz:[31] *Ist* $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ *und* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *die Folge der nichtverschwindenden Eigenwerte von* $\widehat{A}$, *dann gilt für alle* $z \in \mathbb{C}$

$$\det(1+z\widehat{A}) = \prod_{n=0}^{\infty}(1+z\lambda_n).$$

Beweis: Wir betrachten die Funktion $F:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ mit $F(z) = \det(1+z\widehat{A})$. Nach Lemma 4.88 gilt für sie erstens

$$|F(z)| \leqq \exp(|z|\,\|\widehat{A}\|_{\mathscr{S}_1}).$$

Da die singulären Werte von $\widehat{A}$ eine Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodaß $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n < \varepsilon/2$. Nach Lemma 4.89 gilt

$$\det(1+\widehat{A}) \leqq \prod_{n=0}^{\infty}(1+|z|\,a_n),$$

[31] Gohberg und Krein verwenden die Aussage dieses Satzes als Definition der Determinante für unendlichdimensionale Räume [110]. Eine weitere alternative Definition stammt von Dunford und Schwartz [79] und lautet

$$\det(1+z\widehat{A}) = \exp\{\operatorname{tr}[\ln(1+z\widehat{A})]\}.$$

wegen $1+x \leqq e^x$ für $x \geqq 0$ folgt daher

$$|F(z)| \leqq \prod_{n=0}^{N} (1+|z|\,a_n) \prod_{n=N+1}^{\infty} (1+|z|\,a_n) \leqq \prod_{n=0}^{N} (1+|z|\,a_n) \prod_{n=N+1}^{\infty} \exp(|z|\,a_n)$$
$$= \prod_{n=0}^{N} (1+|z|\,a_n) \exp\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |z|\,a_n\right) < \prod_{n=0}^{N} (1+|z|\,a_n) \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}|z|\right).$$

Da Exponentialfunktionen stets gegen Polynomfunktionen gewinnen, gibt es eine Konstante C, sodaß

$$\prod_{n=0}^{N} (1+|z|\,a_n) < C \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}|z|\right)$$

und damit zweitens

$$|F(z)| \leqq C\, e^{\varepsilon |z|}$$

gilt. Nach Lemma 4.94 hat F drittens Nullstellen bei $z_n = -1/\lambda_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei diese nach Ungleichung 4.66 die Eigenschaft

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|z_n|} < \infty$$

haben, und viertens gilt

$$F(0) = 1.$$

Mit diesen vier Eigenschaften erfüllt F die Voraussetzungen für die Hadamardsche Produktformel, das heißt, es gilt

$$F(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right).$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Als bedeutendes Corollar dieses Satzes erhält man die Verallgemeinerung eines weiteren wohlbekannten Resultats aus der linearen Algebra.

4.97 Satz von Lidskiĭ:[32] *Für jedes $\widehat{A} \in \mathscr{S}_1(\mathcal{H})$ und dessen nichtverschwindende Eigenwerte $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt*

$$\operatorname{tr} \widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n.$$

[32] Benannt nach seinem Entdecker V. B. Lidskiĭ [219]. Der hier beschriebene Beweis stammt von Simon [299], [344], [345]. Eine alternative Vaiante findet sich bei Gohberg und Krein [110]; vergleiche auch [210] und [254].

Beweis: Nach Definition 4.87 gilt für $z \in \mathbb{C}$

$$\det\left(1 + z\widehat{A}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \operatorname{tr} \widehat{A}^{\wedge n};$$

mit Satz 4.96 folgt daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \operatorname{tr} \widehat{A}^{\wedge n} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + z\,\lambda_n\right). \tag{4.39}$$

Ein Koeffizientenvergleich der linken und der rechten Seite liefert für die erste Ordnung in z genau die Behauptung. □

Wenn man in (4.39) nicht nur die erste, sondern auch alle höheren Ordnungen in z vergleicht, erhält man jeweils die Aussage von Satz 4.97 für $\operatorname{tr}\widehat{A}^{\wedge n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$[33]. – Natürlich gilt der soeben bewiesene Satz insbesondere auch für separable Hilberträume und Spurklasse-Operatoren, die zusätzlich selbstadjungiert sind; in diesem Fall läßt sich jedoch auch ein viel einfacherer direkter Beweis angeben. Denn nach Satz 4.50 gibt es dann eine Orthonormalbasis $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Eigenvektoren zu Eigenwerten λ_n von $\widehat{A}$, und damit folgt sofort

$$\operatorname{tr}\widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} (\widehat{A}\varphi_n, \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\,(\varphi_n, \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n.$$

Nach dieser kurzen Rundreise durch die Spektren beschränkter Operatoren wenden wir uns nun im nächsten Abschnitt wieder der Spektraltheorie unbeschränkter Operatoren zu. Dabei werden uns einige der bisher betrachteten Sachverhalte in sehr weit verallgemeinerter Form wieder begegnen.

4.4.2 Der Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren

Wie wir in Abschnitt 4.4.1.1 gesehen haben, weisen kompakte selbstadjungierte Operatoren besonders einfache Spektralzerlegungen auf; in den darauffolgenden Abschnitten stand das im Mittelpunkt, was passiert, wenn man die zweite der beiden Eigenschaften fallenläßt. Nun lassen wir stattdessen die erste Eigenschaft weg und erhalten damit Einblick in denjenigen Teil der Spektraltheorie, der für die Quantenmechanik in allererster Linie von Bedeutung ist[34].

[33] Das ist genau die Äquivalenz der Definitionen der unendlichdimensionalen Determinante von Grothendieck einerseits und Dunford und Schwartz andererseits; vergleiche Anmerkung 31 auf S. 316.

[34] Die Theorie der Spektralzerlegung unbeschränkter selbstadjungierter Operatoren wurde wesentlich und zum Teil unabhängig voneinander von Riesz, Lorch [231], [311], [313], von Neumann [268] und Stone [361] entwickelt. Der Bezug zur Quantenmechanik wurde zuerst durch von Neumann hergestellt, der mit seiner in der Einleitung bereits erwähnten, Maßstäbe setzenden Monographie [273] damit gleichzeitig den Grundstein zur heutigen Form der mathematischen Quantenmechanik legte. Wir orientieren uns in den folgenden Abschnitten zusätzlich zu den genannten Originalarbeiten auch an [228], [314] und [374].

4.4.2.1 Spektralscharen

Wir verschaffen uns zu Beginn des Abschnitts eine provisorische Vorstellung davon, was beim Übergang zu unbeschränkten Operatoren aufgrund der dadurch bewirkten komplizierteren Struktur der Spektren vor sich geht. Dazu betrachten wir zunächst einen Operator $\widehat{A}$ mit diskretem Spektrum aus Eigenwerten $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie die auf die zugehörenden Eigenräume projezierenden Projektoren $\widehat{P}_n$. Nun definieren wir neue Projektoren der Form

$$\widehat{E}_{\lambda_m} := \sum_{n\leqq m} \widehat{P}_n. \tag{4.40}$$

Für diese gilt

$$\widehat{E}_{\lambda_{n+1}} - \widehat{E}_{\lambda_n} := \Delta\,\widehat{E}_n = \widehat{P}_n, \tag{4.41}$$

das heißt, der Projektor $\widehat{E}_\lambda$ projeziert beliebige Elemente von $\mathcal{H}$ auf einen Teilraum von $\mathcal{H}$, der von allen Eigenvektoren zu Eigenwerten aufgespannt wird, die kleiner oder gleich λ sind. Die Spektraldarstellung von $\widehat{A}$ schreibt sich dann

$$\widehat{A} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j\,\Delta\,\widehat{E}_j. \tag{4.42}$$

Offensichtlich führt der Übergang zu einem kontinuierlichen Spektrum zu einer immer weitergehenden Verfeinerung der Menge der Projektoren $\widehat{E}_\lambda$, bis diese schließlich kontinuierlich werden, und damit zu einem Übergang der Summendarstellungen dieser Projektoren zu Integralen

$$\widehat{E}_\lambda := \int \widehat{P}_\lambda\, d\lambda$$

mit den Projektoren

$$\widehat{P}_\lambda := \lim_{\Delta\lambda\to 0} \frac{\widehat{E}_{\lambda+\Delta\lambda} - \widehat{E}_\lambda}{\Delta\lambda} =: \frac{d\widehat{E}_\lambda}{d\lambda}.$$

Der Ausdruck $d\widehat{E}_\lambda = \widehat{P}_\lambda\, d\lambda$ ist dabei in einem noch zu präzisierenden Sinn als infinitesimaler Projektor zu verstehen. Damit liegt es nahe, aus der Spektraldarstellung (4.42) von $\widehat{A}$ in Summenform eine solche in Integralform zu machen, indem man

$$\widehat{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\widehat{E}_\lambda$$

schreibt; auch solche Integrale müssen natürlich erst noch präzise definiert werden. Diese Präzisierungen sind wesentliche Bestandteile des vorliegenden sowie der nächsten drei Abschnitte.

Als erstes halten wir hierzu fest, daß oben die Interpretation der Projektoren $\widehat{E}_\lambda$ als solche, die aus Projektoren auf die Eigenräume eines Operators aufgebaut sind, in keiner Weise zwingend ist. Stattdessen kann man λ einfach als kontinuierlichen Parameter auffassen und erhält so in der beschriebenen Weise eine Familie von Projektoren, die auf mit wachsendem

λ immer größere Unterräume von $\mathcal{H}$ und schließlich auf ganz $\mathcal{H}$ projezieren und damit gegen den Einsoperator konvergieren. Das führt auf die folgende

4.98 Definition: $\mathcal{H}$ sei ein beliebger Hilbertraum. Eine *Spektralschar* ist eine Menge $\{\,\widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty\,\}$ von orthogonalen Projektionsoperatoren auf $\mathcal{H}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\widehat{E}_\mu \geqq \widehat{E}_\lambda \quad \text{für} \quad \mu \geqq \lambda$,

(ii) $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \widehat{E}_{\lambda-\varepsilon} = \widehat{E}_\lambda$,

(iii) $\widehat{E}_{-\infty} = 0,\ \widehat{E}_{+\infty} = \mathbf{1}$.

Die erste Eigenschaft ist äquivalent zu

$$\widehat{E}_\lambda\,\widehat{E}_\mu = \widehat{E}_\mu\,\widehat{E}_\lambda = \widehat{E}_\lambda \quad \text{für} \quad \mu \geqq \lambda.$$

Wir werden im folgenden die verbreitete Schreibweise $\lim\limits_{\varepsilon \nearrow 0}(\,\lambda-\varepsilon\,) = \lambda - 0$ beziehungsweise $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0}(\,\lambda-\varepsilon\,) = \lambda + 0$ verwenden.

Statt Spektralschar sagt man auch *Zerlegung der Einheit*, eine Bezeichnung, die durch Definition 4.98 nahegelegt wird. Ist $\{\,\widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty\,\}$ eine Spektralschar auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\mathcal{H}_\lambda = \{\,\psi \in \mathcal{H} \mid \widehat{E}_\lambda\,\psi = \psi\,\}$$

der Projektionsraum des Projektors $\widehat{E}_\lambda$. Dabei gilt $\mathcal{H}_\lambda \subset \mathcal{H}_\mu$ für $-\infty \leqq \lambda \leqq \mu \leqq \infty$, und außerdem liegt die Vereinigung aller Projektionsräume der Spektralschar dicht im gesamten Hilbertraum, das heißt $\overline{\bigcup\limits_{\lambda \in [-\infty,\infty]} \mathcal{H}_\lambda} = \mathcal{H}$.

Als nächstes überzeugen wir uns davon, daß die oben betrachteten Differenzen von Spektralschar-Elementen tatsächlich auch sinnvoll sind.

4.99 Lemma: *Es seien $\{\,\widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty\,\}$ eine Spektralschar auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $\lambda < \mu$. Dann ist $\widehat{E}_\mu - \widehat{E}_\lambda$ ein orthogonaler Projektor auf $\mathcal{H}$, und für den Projektionsraum $\mathcal{H}_{\mu-\lambda}$ von $\widehat{E}_\mu - \widehat{E}_\lambda$ gilt $\mathcal{H}_{\mu-\lambda} \oplus \mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_\mu$.*

Beweis: Für alle $\lambda < \mu$ gilt

$$(\,\widehat{E}_\mu - \widehat{E}_\lambda\,)^2 = \widehat{E}_\mu^2 - \widehat{E}_\mu\,\widehat{E}_\lambda - \widehat{E}_\lambda\,\widehat{E}_\mu + \widehat{E}_\lambda^2 = \widehat{E}_\mu - \widehat{E}_\lambda - \widehat{E}_\lambda + \widehat{E}_\lambda = \widehat{E}_\mu - \widehat{E}_\lambda.$$

Somit ist $\widehat{E}_\mu - \widehat{E}_\lambda$ ein Projektor. Dabei gilt $(\,\widehat{E}_\mu - \widehat{E}_\lambda\,)^* = \widehat{E}_\mu^* - \widehat{E}_\lambda^* = \widehat{E}_\mu - \widehat{E}_\lambda$, nach Satz 3.30 ist $\widehat{E}_\mu - \widehat{E}_\lambda$ damit orthogonal.

Außerdem gilt für alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$(\,\widehat{E}_\mu - \widehat{E}_\lambda\,)\,\widehat{E}_\lambda\,\psi = (\,\widehat{E}_\mu\,\widehat{E}_\lambda - \widehat{E}_\lambda^2\,)\,\psi = (\,\widehat{E}_\lambda - \widehat{E}_\lambda\,)\,\psi = 0;$$

es folgt $\mathcal{H}_\lambda \subset \mathcal{H}_{\mu-\lambda}^\perp$ und damit $\mathcal{H}_{\mu-\lambda} \perp \mathcal{H}_\lambda$. Mit $\widehat{E}_\mu = \widehat{E}_\mu - \widehat{E}_\lambda + \widehat{E}_\lambda$ erhält man dann $\mathcal{H}_{\mu-\lambda} \oplus \mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_\mu$. $\square$

Wesentlich für die Verwendung des Begriffs der Spektralschar im Zusammenhang mit kontinuierlichen Spektren ist natürlich die kontinuierliche Struktur der Spektralscharen selbst. Dabei fällt auf, daß in Definition 4.98 (ii) nur linksseitig-stetige Abhängigkeit der Projektoren vom Parameter λ verlangt wird. Wir zeigen nun, daß das automatisch auch von rechts der Fall ist und daher nicht eigens postuliert weden muß.

4.100 Lemma: $\{\widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty\}$ *sei eine Spektralschar auf einem Hilbertraum* $\mathcal{H}$. *Dann gibt es zu jedem* $\mu \in \mathbb{R}$ *einen orthogonalen Projektor* $\widehat{E}_{\mu+0} \in \{\widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty\}$ *mit* $\lim\limits_{\lambda \searrow \mu} \widehat{E}_\lambda = \widehat{E}_{\mu+0}$.

Beweis: 1. Wir betrachten eine monoton fallende reelle Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \mu$. Nach Definition 4.98 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n > N$ und alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$\|\widehat{E}_{\lambda_n}\psi - \widehat{E}_{\lambda_m}\psi\| < \varepsilon.$$

Folglich ist $(\widehat{E}_{\lambda_n}\psi)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ eine Cauchy-Folge, und damit gibt es ein $\varphi_\psi \in \mathcal{H}$ mit $\varphi_\psi = \lim\limits_{n\to\infty} \widehat{E}_{\lambda_n}\psi$. Ist $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere monoton fallende reelle Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_n = \mu$, dann gibt es Folgen $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} N_n = \lim\limits_{n\to\infty} M_n = \infty$ sowie $\lambda_{N_n} \leqq \lambda_n \leqq \lambda_{M_n}$ und $\lambda_{N_n} \leqq \nu_n \leqq \lambda_{M_n}$. Es folgt

$$\begin{aligned}\|\widehat{E}_{\lambda_n}\psi - \widehat{E}_{\nu_n}\psi\| &= \|\widehat{E}_{\lambda_n}\widehat{E}_{\lambda_{N_n}}\psi - \widehat{E}_{\lambda_n}\widehat{E}_{\lambda_{M_n}}\psi - \widehat{E}_{\nu_n}\widehat{E}_{\lambda_{N_n}}\psi + \widehat{E}_{\nu_n}\widehat{E}_{\lambda_{M_n}}\psi\| \\ &= \|(\widehat{E}_{\lambda_n} - \widehat{E}_{\nu_n})(\widehat{E}_{\lambda_{N_n}} - \widehat{E}_{\lambda_{M_n}})\psi\| \\ &\leqq \|\widehat{E}_{\lambda_n} - \widehat{E}_{\nu_n}\|\,\|(\widehat{E}_{\lambda_{N_n}} - \widehat{E}_{\lambda_{M_n}})\psi\| \leqq \|\widehat{E}_{\lambda_{N_n}}\psi - \widehat{E}_{\lambda_{M_n}}\psi\| \leqq \varepsilon\end{aligned}$$

für alle $n \leqq N$ und damit $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{E}_{\nu_n}\psi = \lim\limits_{n\to\infty} \widehat{E}_{\lambda_n}\psi = \varphi$, das heißt, die Folge $(\widehat{E}_{\lambda_n}\psi)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert unabhängig von der Wahl der Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen denselben, nur von ψ abhängigen Vektor φ_ψ. Damit erhalten wir einen Operator $\widehat{E}_{\mu+0} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ mit $\widehat{E}_{\mu+0}\,\psi = \varphi_\psi$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$. Dieser ist nach Konstruktion linear, und es gilt $\lim\limits_{\lambda\searrow\mu} \widehat{E}_\lambda = \widehat{E}_{\mu+0}$.

2. Für alle $\psi \in \mathcal{H}$ gilt $\|\widehat{E}_{\mu+0}\psi\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|\widehat{E}_{\lambda_n}\psi\| \leqq \lim\limits_{n\to\infty} \|\widehat{E}_{\lambda_n}\|\,\|\psi\| \leqq \|\psi\|$, folglich ist $\widehat{E}_{\mu+0} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$.

3. Für alle $\lambda > \mu$ gilt

$$\widehat{E}_{\mu+0} = \lim_{\nu\searrow\mu} \widehat{E}_\nu\psi = \lim_{\nu\searrow\mu} \widehat{E}_\lambda\,\widehat{E}_\nu\psi = \widehat{E}_\lambda\,\widehat{E}_{\mu+0}\,\psi$$

und damit für alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$\widehat{E}^2_{\mu+0}\,\psi = \lim_{\nu\searrow\mu} \widehat{E}_\nu\,\widehat{E}_{\mu+0}\,\psi = \widehat{E}_{\mu+0}\,\psi,$$

das heißt, es ist $\widehat{E}^2_{\mu+0} = \widehat{E}_{\mu+0}$. Folglich ist $\widehat{E}_{\mu+0}$ ein Projektor.

4. Schließlich gilt für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$

$$(\widehat{E}_{\mu+0}\,\psi, \varphi) = \lim_{\lambda \searrow \mu} (\widehat{E}_\lambda \psi, \varphi) = \lim_{\lambda \searrow \mu} (\widehat{E}_\lambda \psi, \widehat{E}_\lambda \varphi) = (\psi, \widehat{E}_{\mu+0}\,\varphi) = (\widehat{E}^*_{\mu+0}\psi, \varphi).$$

Weil $\widehat{E}_{\mu+0}$ beschränkt ist, folgt daraus $\widehat{E}_{\mu+0} = \widehat{E}^*_{\mu+0}$, das heißt, $\widehat{E}_{\mu+0}$ ist orthogonal. □

Für den Projektionsraum von $\widehat{E}_{\mu+0}$ gilt $\mathcal{H}_{\mu+0} \subset \mathcal{H}_\lambda$, falls $\mu < \lambda$ und $\mathcal{H}_{\mu+0} \supset \mathcal{H}_\lambda$, falls $\mu > \lambda$. Nach Lemma 4.99 ist außerdem für alle $\lambda \leqq \mu$ auch $\widehat{E}_{\mu+0} - \widehat{E}_\lambda$ ein orthogonaler Projektor, und für dessen Projektionsraum gilt $\mathcal{H}_{\mu-\lambda+0} \oplus \mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_{\mu+0}$. Für alle $\lambda > \mu$ ist entsprechend $\widehat{E}_\lambda - \widehat{E}_{\mu+0}$ ein orthogonaler Projektor, und für den zugehörigen Projektionsraum gilt $\mathcal{H}_{\lambda-\mu-0} \oplus \mathcal{H}_{\mu+0} = \mathcal{H}_\lambda$. Von dieser Zurückführung orthogonaler Projektoren auf Spektralscharen werden wir gleich ausgiebig Gebrauch machen.

Im nächsten Abschnitt geht es nun darum, einen Zusammenhang zwischen selbstadjungierten Operatoren sowie deren Spektren einerseits und Spektralscharen andererseits herzustellen, unter anderem auch um deren Namen zu rechtfertigen.

4.4.2.2 Spektralzerlegung unbeschränkter selbstadjungierter Operatoren

Zuallererst müssen wir dafür sorgen, daß die oben ziemlich informell eingeführten Integrale eine saubere Definition erhalten[35]. Das tun wir, auch mit Blick auf den nächsten Abschnitt, gleich in verallgemeinerter Form, indem wir einen beliebigen komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und darauf eine beliebige Spektralschar $\{\,\widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty\,\}$ betrachten, sowie auf zweierlei Art und Weise, einerseits elementar und andererseits maßtheoretisch. Beide Varianten erweisen sich in jeweils anderen Kontexten als praktisch, wie ihr jeweiliger Einsatz in den nachfolgend beschriebenen Beweisen zeigt. Für die erste Variante [374] sei $\mathscr{G}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, die stückweise stetig und auf jedem beschränkten Intervall beschränkt sind; dabei sei vorausgesetzt, daß die Menge der Unstetigkeitsstellen jeweils eine Nullmenge ist. Wir beachten dabei, daß es in $\mathscr{G}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ auch unbeschränkte Funktionen gibt. Ist $f \in \mathscr{G}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und (a, b) ein offenes Intervall, auf dem f beschränkt ist, dann läßt sich f zu einer auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetigen und damit dort insbesondere gleichmäßig stetigen Funktion $\widetilde{f}$ ergänzen. Außerdem sei $\mathfrak{Z}[a, b]$ die Menge aller Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$. Damit bilden wir zu einer beliebigen Zerlegung $Z_n = \{\, a = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n = b \,\} \in \mathfrak{Z}[a, b]$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$ eine *Zerlegungssumme* $S_{\widehat{E}_\lambda \psi}$; wir wählen hierfür zu jedem $j = 0, 1, \ldots, n$ ein $\lambda_j \in [a_j, a_{j+1}]$ und schreiben

$$S_{\widehat{E}_\lambda \psi}([a, b], Z_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{f}(\lambda_j)\,(\,\widehat{E}_{\lambda_{j+1}}\psi - \widehat{E}_{\lambda_j}\psi\,).$$

Nun definieren wir das *Riemann-Stieltjes-Integral* von f über $[a, b]$ als Grenzwert über immer feinere Zerlegungen von $[a, b]$ gemäß

$$\int_a^b f(\lambda)\, d\widehat{E}_\lambda \psi = \lim_{n \to \infty} S_{\widehat{E}_\lambda \psi}([a, b], Z_n). \tag{4.43}$$

[35] Vergleiche hierzu Abschnitt 1.2.2.

$\widehat{E}_\lambda$ ist für alle $\lambda \in [-\infty, \infty]$ ein stetiger Operator auf $\mathcal{H}$ mit $\|\widehat{E}_\lambda\psi\| = \|\,\widehat{E}_\lambda\,\widehat{E}_\mu\psi\,\| \leqq \|\widehat{E}_\mu\psi\|$ für alle $\lambda, \mu \in [-\infty, \infty]$ mit $\lambda \leqq \mu$ und alle $\psi \in \mathcal{H}$; somit ist $g(\lambda) = \|\widehat{E}_\lambda\psi\|^2$ eine reelle, nichtnegative, monoton steigende Funktion, die zudem nach Definition 4.98 (ii) auf ganz $\mathbb{R}$ linksseitig stetig ist. Folglich existiert der Genzwert (4.43), und er ist unabhängig von der Auswahl der Zerlegungen Z_n für $n \to \infty$ und der Punkte λ_j [36]. Analog erhält man reellwertige Integrale der Form

$$\int\limits_a^b f(\lambda)\, d\,\|\widehat{E}_\lambda\psi\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{f}(\lambda_j)\,(\,\|\widehat{E}_{\lambda_{j+1}}\psi\|^2 - \|\widehat{E}_{\lambda_j}\psi\|^2\,).$$

Hierbei gilt nach Konstruktion und Satz 2.140

$$\left\|\int\limits_a^b f(\lambda)\, d\widehat{E}_\lambda\psi\right\|^2 = \left\|\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{f}(\lambda_j)\,(\,\widehat{E}_{\lambda_{j+1}}\psi - \widehat{E}_{\lambda_j}\psi\,)\right\|^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{f}(\lambda_j)\,(\,\widehat{E}_{\lambda_{j+1}}\psi - \widehat{E}_{\lambda_j}\psi\,)\right\|^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} |\widetilde{f}(\lambda_j)|^2\,\|\,\widehat{E}_{\lambda_{j+1}}\psi - \widehat{E}_{\lambda_j}\psi\,\|^2 = \int\limits_a^b |f(\lambda)|^2\, d\,\|\widehat{E}_\lambda\psi\|^2;$$

das ist eine kontinuierliche Version vom Satz des Pythagoras.

Für unsere Zwecke von besonderer Bedeutung sind wie oben angedeutet *uneigentliche Integrale*, die wir in der üblichen Weise gemäß

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\widehat{E}_\lambda\psi = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \int\limits_a^b f(\lambda)\, d\widehat{E}_\lambda\psi \tag{4.44}$$

definieren. Derselbe Grenzübergang führt dann unmittelbar mit

$$\left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\widehat{E}_\lambda\psi\right\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\, d\,\|\widehat{E}_\lambda\psi\|^2 \tag{4.45}$$

wieder auf einen kontinuierlichen Satz des Pythagoras. Damit erhalten wir den folgenden Existenzsatz für uneigentliche Integrale.

4.101 Satz: *$\mathcal{H}$ sei ein komplexer Hilbertraum, $\{\,\widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty\,\}$ eine Spektralschar auf $\mathcal{H}$ und $f \in \mathscr{G}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Dann existiert das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\widehat{E}_\lambda\psi$ genau dann, wenn $\psi \in \left\{ \varphi \in \mathcal{H} \;\middle|\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\, d\,\|\widehat{E}_\lambda\psi\|^2 < \infty \right\}$ gilt.*

[36] Das folgt aus Standardresultaten der Integrationstheorie; siehe beispielsweise [374].

Mit der zweiten Variante landen wir direkt bei solchen Integralen [384]. Dazu seien $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ die Borel-Algebra und μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Wir definieren zu jedem $\psi \in \mathcal{H}$ eine Funktion $\rho_{\psi,\widehat{E}} : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\rho_{\psi,\widehat{E}}(\lambda) = \|\widehat{E}_\lambda \psi\|^2$$

und erhalten dadurch zu jedem $\psi \in \mathcal{H}$ mit

$$\mu_{\psi,\widehat{E}}(\mathrm{B}) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathrm{B}}\, \rho_{\psi,\widehat{E}}\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathrm{B}}\, d\, \|\widehat{E}_\lambda \psi\|^2 \tag{4.46}$$

für alle $\mathrm{B} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ein Lebesgue-Stieltjes-Maß auf $\mathbb{R}$. Funktionen, die $\mu_{\psi,\widehat{E}}$-meßbar sind für alle $\psi \in \mathcal{H}$ heißen $\widehat{E}$-meßbar. – Damit können wir in üblicher Weise ein Lebesgue-Stieltjes-Integral konstruieren. Für Intervalle $\mathcal{I}_j = (x_j, x_{j+1}]$ und Treppenfunktionen $g(t) = \sum_j c_j\, \chi_{\mathcal{I}_j}$ gilt dabei

$$\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d\widehat{E}_\lambda = \sum_j c_j\, \mu_{\psi,\widehat{E}}(\mathcal{I}_j) = \sum_j c_j\, (\, \widehat{E}_{x_{j+1}} - \widehat{E}_{x_j}\,).$$

Für beliebige $\widehat{E}$-meßbare Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt es definitionsgemäß zu jedem $\psi \in \mathcal{H}$, für das $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mu_{\psi,\widehat{E}})$ ist, eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, die in der $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mu_{\psi,\widehat{E}})$-Norm gegen f konvergiert. Da die $\widehat{E}_\lambda$ orthogonale Projektoren sind, gilt nach Satz 2.140 außerdem

$$\begin{aligned}
\lim_{n,m\to\infty} \left\| \int_{\mathbb{R}} g_m(\lambda)\, d\widehat{E}_\lambda \psi - \int_{\mathbb{R}} g_n(\lambda)\, d\widehat{E}_\lambda \psi \right\|^2 &= \lim_{n,m\to\infty} \left\| \int_{\mathbb{R}} (\, g_m(\lambda) - g_n(\lambda)\,)\, d\widehat{E}_\lambda \psi \right\|^2 \\
&= \lim_{n,m\to\infty} \left\| \sum_j (\, c_{m,j} - c_{n,j}\,)\, (\, \widehat{E}_{x_{j+1}} - \widehat{E}_{x_j}\,) \right\|^2 \\
&= \lim_{n,m\to\infty} \sum_j |\, c_{m,j} - c_{n,j}\,|^2\, (\, \widehat{E}^2_{x_{j+1}} - \widehat{E}^2_{x_j}\,) \\
&= \lim_{n,m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |\, f_m(\lambda) - f_n(\lambda)\,|^2\, d\, \|\widehat{E}_\lambda \psi\|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Folglich definieren wir für $\mu_{\psi,\widehat{E}}$-meßbare Funktionen f

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\widehat{E}_\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(\lambda)\, d\widehat{E}_\lambda.$$

Diese Definition ist natürlich unabhängig von der Wahl der Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dabei gilt analog zu oben

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\widehat{E}_\lambda \psi \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \int_{\mathbb{R}} g_n(\lambda)\, d\widehat{E}_\lambda \psi \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_j c_{n,j}\, (\, \widehat{E}_{x_{j+1}} - \widehat{E}_{x_j}\,) \right\|^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_j |c_{n,j}|^2 \,(\, \widehat{E}^2_{x_{j+1}} - \widehat{E}^2_{x_j}\,) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |g_n(\lambda)|^2 \, d\, \|\widehat{E}_\lambda \psi\|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 \, d\, \|\widehat{E}_\lambda \psi\|^2,$$

das heißt, die Aussage von Satz 4.101 gilt unverändert.

Von entscheidender Bedeutung ist nun, daß durch Integrale, wie sie soeben betrachtet wurden, lineare Operatoren definiert werden, und zwar nicht einfach irgendwelche beliebige [384]. Das ist Gegenstand vom nächsten

4.102 Satz: *Es seien* $\{\, \widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty \,\}$ *eine Spektralschar auf einem Hilbertraum* $\mathcal{H}$ *und* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *eine* $\widehat{E}$*-meßbare Funktion. Dann gilt folgendes.*

(i) Durch $\widehat{F}_f := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\widehat{E}_\lambda$ *wird ein normaler Operator auf* $\mathcal{H}$ *definiert;*

(ii) dom $\widehat{F}_f = \left\{ \varphi \in \mathcal{H} \;\middle|\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 \, d\, \|\widehat{E}_\lambda \psi\|^2 < \infty \right\}$*;*

(iii) $\widehat{F}^*_f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\lambda)}\, d\widehat{E}_\lambda$*;*

(iv) dom $\widehat{F}_f =$ dom $\widehat{F}^*_f$

(v) ist f *reellwertig, dann ist* $\widehat{F}_f$ *selbstadjungiert;*

(vi) gilt $f(\lambda) \geqq 0$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$*, dann ist* $\widehat{F}_f$ *positiv definit;*

(vii) ist f *fast überall beschränkt, dann ist* $\widehat{F}_f$ *beschränkt;*

(viii) sind f *und* g *zwei* $\widehat{E}$*-meßbare Funktionen, dann gilt* $\widehat{F}_f \widehat{F}_g = \widehat{F}_{fg}$*.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß $\widehat{F}_f$ dicht definiert und linear ist. Dazu schreiben wir im folgenden $\mathcal{A} := \left\{ \varphi \in \mathcal{H} \;\middle|\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 \, d\, \|\widehat{E}_\lambda \psi\|^2 < \infty \right\}$.

1. Satz 4.101 liefert dom $\widehat{F}_f = \mathcal{A}$, und aus der Definition des Lebesgue-Stieltjes-Integrals folgt, daß $\mathcal{A}$ ein Unterraum von $\mathcal{H}$ ist. Außerdem gilt nach Definition 4.98 und (4.45) für $-\infty < a < b < \infty$ und alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 \, d\, \|\, \widehat{E}_\lambda \,(\, \widehat{E}_b - \widehat{E}_a \,)\, \psi \,\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 \, d\, \|\, \widehat{E}_\lambda \,(\, \widehat{E}_b - \widehat{E}_a \,)\, \psi \,\|^2$$

$$= \int\limits_a^b |f(\lambda)|^2 \, d\, \|\, \widehat{E}_\lambda \,(\, \widehat{E}_b - \widehat{E}_a \,)\, \psi \,\|^2,$$

und damit $(\widehat{E}_b - \widehat{E}_a)\psi \in \mathcal{A}$. Wählt man beliebige divergente reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so erhält man zu jedem $\psi \in \mathcal{H}$ mit $((\widehat{E}_b - \widehat{E}_a)\psi)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$, für die $\lim\limits_{n\to\infty}(\widehat{E}_{b_n} - \widehat{E}_{a_n})\psi = \psi$ gilt. Folglich ist $\mathcal{A}$ dicht in $\mathcal{H}$.

2. Es seien $\psi, \varphi \in \mathcal{A}$; zunächst sei außerdem f beschränkt und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge von Treppenfunktionen, für die $(\mu_{\psi,\widehat{E}} + \mu_{\psi,\widehat{E}})$-fast überall $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\lambda) = f(\lambda)$ gelte für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Damit gilt dasselbe auch $\mu_{\psi,\widehat{E}}$-, $\mu_{\varphi,\widehat{E}}$- sowie $\mu_{\psi+\varphi,\widehat{E}}$-fast überall und dazu $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ in $\mathscr{L}^2(\mathbb{R},\mu_{\psi,\widehat{E}})$, $\mathscr{L}^2(\mathbb{R},\mu_{\varphi,\widehat{E}})$ und $\mathscr{L}^2(\mathbb{R},\mu_{\psi+\varphi,\widehat{E}})$. Das liefert zusammen mit dem in 1. bewiesenen für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{A}$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\widehat{F}_f(\alpha\psi + \beta\varphi) &= \lim_{n\to\infty}\left[\widehat{F}_{f_n}(\alpha\psi + \beta\varphi)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\alpha\widehat{F}_{f_n}(\psi) + \beta\widehat{F}_{f_n}(\varphi)\right] \\ &= \alpha\lim_{n\to\infty}\widehat{F}_{f_n}\psi + \beta\lim_{n\to\infty}\widehat{F}_{f_n}\varphi = \alpha\widehat{F}_f\psi + \beta\widehat{F}_f\varphi.\end{aligned}$$

Nun sei f eine beliebige $\widehat{E}$-meßbare Funktion; weiter sei die Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$g_n(\zeta) = \begin{cases}\zeta & \text{für } |\zeta| \leqq n,\\ 0 & \text{für } |\zeta| > n.\end{cases}$$

Dann ist $g_n \circ f$ beschränkt für alle $n \in \mathbb{N}$; folglich gilt für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{A}$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|g_n(f(\lambda))|^2\,\|\widehat{E}_\lambda(\alpha\psi + \beta\varphi)\|^2\right]^{1/2} &= \|\widehat{F}_{g_n\circ f}(\alpha\psi + \beta\varphi)\| \\ = \|\alpha\widehat{F}_{g_n\circ f}\psi + \beta\widehat{F}_{g_n\circ f}\varphi\| &\leqq |\alpha|\,\|\widehat{F}_{g_n\circ f}\psi\| + |\beta|\,\|\widehat{F}_{g_n\circ f}\varphi\|\end{aligned}$$

und somit auch

$$\begin{aligned}&\left[\int_{-\infty}^{\infty}|g_n(f(\lambda))|^2\,\|\widehat{E}_\lambda(\alpha\psi + \beta\varphi)\|^2\right]^{1/2} \\ &\leqq |\alpha|\left[\int_{-\infty}^{\infty}|g_n(f(\lambda))|^2\,\|\widehat{E}_\lambda\psi\|^2\right]^{1/2} + |\beta|\left[\int_{-\infty}^{\infty}|g_n(f(\lambda))|^2\,\|\widehat{E}_\lambda\varphi\|^2\right]^{1/2} \\ &\leqq |\alpha|\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2\,\|\widehat{E}_\lambda\psi\|^2\right]^{1/2} + |\beta|\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2\,\|\widehat{E}_\lambda\varphi\|^2\right]^{1/2} \\ &= |\alpha|\,\|\widehat{F}_f\psi\| + |\beta|\,\|\widehat{F}_f\varphi\| < \infty.\end{aligned}$$

Die Folge $(|g_n \circ f|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend und konvergiert punktweise gegen $|f|$, nach Satz 1.23 gilt daher $\lim\limits_{n\to\infty}(g_n \circ f) = f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R},\mu_{\alpha\psi+\beta\varphi,\widehat{E}})$. Es folgt $\alpha\psi + \beta\varphi \in \mathcal{A}$ sowie

$$\begin{aligned}\widehat{F}_f(\alpha\psi + \beta\varphi) &= \lim_{n\to\infty}\widehat{F}_{g_n\circ f}(\alpha\psi + \beta\varphi) \\ &= \alpha\lim_{n\to\infty}\widehat{F}_{g_n\circ f}\psi + \beta\lim_{n\to\infty}\widehat{F}_{g_n\circ f}\varphi = \alpha\widehat{F}_f\psi + \beta\widehat{F}_f\varphi,\end{aligned}$$

das heißt, $\widehat{F}_f$ ist linear.
(iii), (iv) Nach Satz 4.101 gilt dom $\widehat{F}_{\overline{f}} =$ dom $\widehat{F}_f$. Für alle $\psi, \varphi \in$ dom $\widehat{F}_f$ gilt damit

$$(\varphi, \widehat{F}_f\,\psi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,d\,(\varphi, \widehat{E}_\lambda\psi) = \overline{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\lambda)}\;d\,(\psi, \widehat{E}_\lambda\varphi)} = \overline{(\psi, \widehat{F}_{\overline{f}}\,\varphi)} = (\widehat{F}_{\overline{f}}\,\varphi, \psi),$$

Folglich ist dom $\widehat{F}_f^* \supset$ dom $\widehat{F}_{\overline{f}}$. Umgekehrt sei $\varphi \in$ dom $\widehat{F}_{\overline{f}}$, außerdem sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben definiert und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$h_n(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\zeta| \leqq n, \\ 0 & \text{für } |\zeta| > n. \end{cases}$$

Dann gilt für alle $\psi \in$ dom $\widehat{F}_f$ und alle $m \in \mathbb{N}$

$$(\widehat{F}_{h_m\circ f}\,\widehat{F}_f^*\,\varphi, \psi) = (\varphi, \widehat{F}_f\,\widehat{F}_{h_m\circ f}\,\psi) = \lim_{n\to\infty} (\varphi, \widehat{F}_{g_n\circ f}\,\widehat{F}_{h_m\circ f}\,\psi) = \lim_{n\to\infty} (\widehat{F}_{\overline{g_n\circ f}}\;\varphi, \widehat{F}_{h_m\circ f}\,\psi)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\widehat{F}_{g_n\circ\overline{f}}\,\varphi, \widehat{F}_{h_m\circ f}\,\psi) = \lim_{n\to\infty} (\widehat{F}_{h_m\circ f}\,\widehat{F}_{g_n\circ\overline{f}}\,\varphi, \psi) = (\widehat{F}_{g_m\circ\overline{f}}\,\varphi, \psi),$$

also auch

$$\widehat{F}_f^*\,\varphi = \lim_{m\to\infty} \widehat{F}_{h_m\circ f}\,\widehat{F}_f^*\,\varphi = \lim_{m\to\infty} \widehat{F}_{g_m\circ\overline{f}}\,\varphi$$

und daher $\varphi \in$ dom $\widehat{F}_{\overline{f}}$. Folglich ist dom $\widehat{F}_f^* \subset$ dom $\widehat{F}_{\overline{f}}$; insgesamt gilt somit
dom $\widehat{F}_f^* =$ dom $\widehat{F}_{\overline{f}}$ und

$$\widehat{F}_f^* = \widehat{F}_{\overline{f}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\lambda)}\,d\widehat{E}_\lambda. \tag{4.47}$$

(i) Für alle $\psi \in$ dom $\widehat{F}_f$ gilt

$$\|\,\widehat{F}_f^*\,\psi\,\|^2 = \|\,\widehat{F}_{\overline{f}}\,\psi\,\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\,d\,\|\widehat{E}_\lambda\psi\|^2 = \|\,\widehat{F}_f\,\psi\,\|^2,$$

nach Satz 3.16 ist $\widehat{F}_f$ damit normal.
(v) Folgt aus (i), (iv) und (4.47).
(vi) $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine die Funktion f approximierende Folge von Treppenfunktionen mit $g_n(\lambda) \geqq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Das bedeutet, daß die g_n wie oben in der Form $g_n = \sum\limits_j c_j\,\chi_{\mathfrak{J}_j}$ schreibbar sind, wobei hier $c_{n,j} \geqq 0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle auftretenden Indices j. Für alle $\psi \in$ dom $\widehat{F}_f$ gilt damit

$$(\widehat{F}_f\,\psi, \psi) = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,d\widehat{E}\,\psi, \psi\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_n(\lambda)\,d\widehat{E}\,\psi, \psi\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_j c_{n,j}\,(\,\widehat{E}_{x_{j+1}} - \widehat{E}_{x_j}\,)\,\psi, \psi\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_j c_{n,j} \, ((\, \widehat{E}_{x_{j+1}} - \widehat{E}_{x_j}\,)\, \psi, \psi) = \lim_{n\to\infty} \sum_j c_{n,j} \, \|\, (\, \widehat{E}_{x_{j+1}} - \widehat{E}_{x_j}\,)\, \psi\, \|^2 \geqq 0.$$

(vii) Für alle $\psi \in \mathcal{H}$ gilt

$$\mu_{\psi,\widehat{E}}(\mathbb{R}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\, \|\, \widehat{E}_\lambda \psi\, \|^2 = \|\, \widehat{E}_\infty \psi\, \|^2 = \|\psi\|^2 < \infty$$

Ist f fast überall beschränkt, dann gilt folglich $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mu_{\psi,\widehat{E}})$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$, also ist $\operatorname{dom} \widehat{F}_f = \mathcal{H}$, und nach Satz 3.5 ist damit $\widehat{F}_f$ beschränkt.

(viii) Wir wählen zu f und g zwei Folgen $(h_n^{(f)})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_m^{(g)})_{\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen der Form $h_n^{(f)} = \sum\limits_{i=0}^{N_n^{(f)}} c_{i,n}^{(f)} \chi_{Z_{i,n}^{(f)}}$ beziehungsweise $h_m^{(g)} = \sum\limits_{j=0}^{N_m^{(g)}} c_{j,m}^{(g)} \chi_{Z_{j,m}^{(g)}}$, jeweils mit geeigneten Zerlegungen von $\mathbb{R}$, sodaß $\lim\limits_{n\to\infty} h_n^{(f)} = f$ und $\lim\limits_{m\to\infty} h_m^{(g)} = g$; außerdem sei $(Z_q)_{0\leqq q\leqq N}$ die Familie der Zerlegungen von $\mathbb{R}$, die in der Form $Z_q = Z_{i,n}^{(f)} \cap Z_{j,m}^{(g)}$ geschrieben werden können mit $0 \leqq i \leqq N_n^{(f)}$ und $0 \leqq i \leqq N_m^{(f)}$. Dann gilt für alle $\psi \in \operatorname{ran} \widehat{F}_g \cap \operatorname{dom} \widehat{F}_g \cap \operatorname{dom} \widehat{F}_f$ mit geeignet gewählten Koeffizienten $c_q^{(f)}$ und $c_q^{(g)}$

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_f\, \widehat{F}_g\, \psi &= \left[\, \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\widehat{E} \right] \left[\, \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, d\widehat{E}\, \psi \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \left[\, \sum_{i=0}^{N_n^{(f)}} c_{i,n}^{(f)} \chi_{Z_{i,n}^{(f)}}(\lambda)\, \widehat{E}(Z_{i,n}^{(f)}) \right] \left[\, \sum_{j=0}^{N_m^{(g)}} c_{j,m}^{(g)} \chi_{Z_{j,m}^{(g)}}(\lambda)\, \widehat{E}(Z_{j,m}^{(g)})\, \psi \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{N_n^{(f)}} \sum_{j=0}^{k} c_{i,n}^{(f)}\, c_{(k-j),m}^{(g)} \chi_{Z_{i,n}^{(f)}}(\lambda)\, \chi_{Z_{(k-j),m}^{(g)}}(\lambda)\, \widehat{E}(Z_{i,n}^{(f)})\, \widehat{E}(Z_{(k-j),m}^{(g)})\, \psi \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{N_n^{(f)}} \sum_{j=0}^{k} c_{i,n}^{(f)}\, c_{(k-j),m}^{(g)} \chi_{Z_{i,n}^{(f)} \cap Z_{(k-j),m}^{(g)}}(\lambda)\, \widehat{E}(Z_{i,n}^{(f)} \cap Z_{(k-j),m}^{(g)})\, \psi \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{q=0}^{N} c_q^{(f)}\, c_q^{(g)} \chi_{Z_q}(\lambda)\, \widehat{E}(Z_q)\, \psi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, g(\lambda)\, \widehat{E}\, \psi = \widehat{F}_{fg}\, \psi. \qquad \square
\end{aligned}$$

Operatoren, wie sie in Satz 4.102 beschrieben werden, nennt man *Spektraloperatoren*[37]. Wir werden diesen Begriff weiter unten noch etwas verallgemeinern.

Wir betrachten nun die einfachsten nichttrivialen Beispiele für Spektraloperatoren. Auf dieses stößt man, wenn man die Aussage von Satz 4.50 von kompakten auf beliebige beschränkte selbstadjungierte Operatoren ausdehnt.

[37] Diese Bezeichnung wurde von Riesz geprägt [311].

4.103 Satz: *Ist $\widehat{A}$ ein beschränkter symmetrischer Operator auf einem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Spektralschar $\{\,\widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty\,\}$ auf $\mathcal{H}$ mit*

$$\widehat{A}^n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \, d\widehat{E}_\lambda \tag{4.48}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: [38] Der Beweis erfolgt in vier Schritten.
1. Wir betrachten zunächst die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathscr{L}(\mathcal{H})[X]$, die jedem reellen Polynom $p(\xi) = \sum_{j=0}^{n} c_j\,\xi^j$ den Operator $p(\widehat{A}\,) = \sum_{j=0}^{n} c_j\,\widehat{A}^j$ zuordnet. Nach Konstruktion ist $p(\widehat{A}\,)$ linear, beschränkt und symmetrisch; außerdem gilt $\Phi(\rho\, p(\xi)) = \rho\, p(\widehat{A}\,)$ für alle $\rho \in \mathbb{R}$ sowie $\Phi(p(\xi)+q(\xi)) = p(\widehat{A}\,)+q(\widehat{A}\,)$ und $\Phi(p(\xi)\,q(\xi)) = p(\widehat{A}\,)\,q(\widehat{A}\,)$ für alle $p, q \in \mathbb{R}[X]$. Nun seien $m < M$ die zu $\widehat{A}$ gehörenden Konstanten nach Satz 4.44. Jedes $p \in \mathbb{R}[X|$ ist in der Form

$$p(\xi) = c \prod_i (\,\xi - a_i\,) \prod_j (\,b_j - \lambda\,) \prod_k [\,(\,\xi - s_k\,)^2 + t_k^2\,]$$

darstellbar mit $c, a_i, b_j, s_k, t_k \in \mathbb{R}$ und $c \geqq 0$, $a_i \leqq m$, $b_j \geqq M$. Für $m \leqq \xi \leqq M$ sind dabei alle Faktoren positiv, daher ist $p(\widehat{A}\,)$ ein positiver Operator. Außerdem folgt aus $p(\xi) \geqq q(\lambda)$ für alle $m \leqq \lambda \leqq M$ auch $p(\widehat{A}\,) \geqq q(\widehat{A}\,)$, das heißt, die Abbildung Φ ist monoton und auch $p(\widehat{A}\,) - q(\widehat{A}\,)$ ist ein eindeutig bestimmter beschränkter symmetrischer positiver Operator.
2. Nun wenden wir die Abbildung Φ auf Stufenfunktionen an; dazu sei für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion θ_λ definiert durch

$$\theta_\lambda(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \xi \leqq \lambda \vee \lambda \geqq M \\ 0 & \text{für} \quad \xi > \lambda \vee \lambda < m. \end{cases}$$

Wir setzen $\theta_\lambda(\widehat{A}\,) := \widehat{E}_\lambda$ und betrachten die Menge $\{\,\widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty\,\}$. Wir zeigen, daß diese eine Spektralschar auf $\mathcal{H}$ ist. Erstens gilt $\theta_\lambda^2(\xi) = \theta_\lambda(\xi)$ für alle $-\infty \leqq \lambda \leqq \infty$ und alle $\xi \in \mathbb{R}$ und damit auch $\widehat{E}_\lambda^2 = \widehat{E}_\lambda$ für alle $-\infty \leqq \lambda \leqq \infty$ und alle $\widehat{A} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, folglich sind alle $\widehat{E}_\lambda$ Projektoren auf $\mathcal{H}$. Da $\widehat{A}$ symmetrisch ist, gilt $\widehat{E}_\lambda^* = \widehat{E}_\lambda$ für alle $-\infty \leqq \lambda \leqq \infty$, und damit sind die $\widehat{E}_\lambda$ auch orthogonal. Zweitens ist $\theta_\nu(\lambda)\,\theta_\mu(\xi) = \theta_\mu(\xi)\,\theta_\nu(\xi) = \theta_\nu(\xi)$ für $\nu < \xi$, also gilt $\widehat{E}_\nu\,\widehat{E}_\mu = \widehat{E}_\mu\,\widehat{E}_\nu = \widehat{E}_\nu$ für $\nu < \mu$. Drittens sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}[X|$ mit

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(\xi) = \theta_\lambda(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$,

(ii) $p_n(\xi) \geqq \theta_{\lambda+1/n}(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

[38] Der hier gezeigte Beweis wurde von Riesz angegeben [311]. Entdeckt und erstmals bewiesen wurde dieses Resultat von Hilbert [156].

Dann gilt $p_n(\widehat{A}) \geqq \widehat{E}_{\lambda+1/n} \geqq \widehat{E}_\lambda$ für alle $n \in \mathbb{N}$; es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(\widehat{A}) = \widehat{E}_\lambda$ und damit auch $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{E}_{\lambda+1/n} = \widehat{E}_\lambda$. Die Monotonie der Abbildung Φ liefert hiermit $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} \widehat{E}_{\lambda+\varepsilon} = \widehat{E}_\lambda$, also $\widehat{E}_{\lambda+0} = \widehat{E}_\lambda$.

3. Als nächstens zeigen wir die Gültigkeit von (4.48) für $\widehat{A}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \, d\widehat{E}_\lambda = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^m \,(\, \widehat{E}_{\lambda_j} - \widehat{E}_{\lambda_{j-1}} \,) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^m \,[\, \theta_{\lambda_j}(\widehat{A}) - \theta_{\lambda_{j-1}}(\widehat{A}) \,].$$

Nun sei $F_m(\xi) = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^m \,[\, \theta_{\lambda_j}(\xi) - \theta_{\lambda_{j-1}}(\xi) \,]$, dann ist $F_m(\widehat{A})$ ein eindeutig definierter beschränkter symmetrischer Operator. In jedem Intervall $(\lambda_{j-1}, \lambda_j\,]$ gilt $F_m(\xi) = \lambda_j^m$; hieraus folgt für $\xi \in (\lambda_{j-1}, \lambda_j\,]$

$$|\, F_m(\xi) - \xi^m \,| \leqq \max\{\, |\, x^m - y^m \,| \mid x, y \in (\lambda_{j-1}, \lambda_j\,] \,\} := \delta_m,$$

also $|\, F_m(\widehat{A}) - \widehat{A}^m \,| \leqq \delta_m \mathbf{1}$ und damit $\|\, F_m(\widehat{A}) - \widehat{A}^m \,\| \leqq \delta_m$. Außerdem ist $\lim\limits_{m\to\infty} \delta_m = 0$; das liefert $\lim\limits_{m\to\infty} \|\, F_m(\widehat{A}) - \widehat{A}^m \,\| = 0$, das heißt, es gilt $\lim\limits_{m\to\infty} F_m(\widehat{A}) = \widehat{A}^m$ in der Operatornorm. Daraus folgt (4.48).

4. Schließlich zeigen wir noch die Eindeutigkeit der Darstellung (4.48). Dazu führen wir diese auf ein gewöhnliches Stieltjes-Integral zurück. Zunächst folgt aus (4.48) für jedes $p \in \mathbb{R}[X]$ [39]

$$p(\widehat{A}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(\lambda)\, d\widehat{E}_\lambda$$

und damit für beliebige $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$

$$(p(\widehat{A})\,\psi, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(\lambda)\, d(\widehat{E}_\lambda \psi, \varphi).$$

Nach dem Approximationssatz von Weierstraß[40] ist damit für jede auf dem Intervall $[m, M]$ stetige Funktion f auch das Integral

$$(f(\widehat{A})\,\psi, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(\widehat{E}_\lambda \psi, \varphi)$$

definiert; die linke Seite ist also eine sinnvolle Schreibweise und überdies von der Wahl der $\widehat{E}_\lambda$ unabhängig. Damit ist die Funktion $g(\lambda) := (\widehat{E}_\lambda \psi, \varphi)$ für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ in allen Punkten λ, in denen sie stetig ist, für $m - \varepsilon$ mit genügend kleinem $\varepsilon > 0$ und für M bis auf eine additive

[39] Das werden wir im nächsten Abschnitt wieder aufgreifen und weiter verallgemeinern.

[40] Benannt nach seinem Entdecker Karl Weierstraß [385], [386]. Der Weierstraßsche Approximationssatz besagt folgendes: X *sei eine nichtleere kompakte Teilmenge des* $\mathbb{R}^n$. *Dann läßt sich jede Funktion* $f \in C(X)$ *gleichmäßig durch eine Folge von Polynomen approximieren.*

Konatante eindeutig definiert. Nach Definition 4.98 ist anderseits g von rechts stetig, und es gilt

$$g(M) = (\widehat{E}_M \psi, \varphi) = (\psi, \varphi)$$

Folglich ist die Funktion g und damit auch die Spektralschar $\{ \widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty \}$ eindeutig bestimmt. □

Der Beweis hat mit erbracht, daß man für jeden beschränkten symmetrischen Operator (4.48) durch

$$\widehat{A}^n = \int_{m-0}^{M} \lambda^n \, d\widehat{E}_\lambda$$

ersetzen kann, denn für die Spektralschar $\{ \widehat{E} \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty \}$ gilt wie gezeigt $\widehat{E}_\lambda = 0$ für $\lambda < m$ und $\widehat{E}_\lambda = \mathbf{1}$ für $\lambda \geqq M$. Es genügt daher, $\{ \widehat{E}_\lambda \mid m \leqq \lambda \leqq M \}$ zu betrachten. Man sagt hier auch, die Spektralschar $\{ \widehat{E} \mid m \leqq \lambda \leqq M \}$ *überdecke* das Intervall $[m, M]$.

Wir sehen nun auch, inwiefern Satz 4.103 eine Verallgemeinerung von Satz 4.50 darstellt. Das wurde zu Beginn des vorigen Abschnitts bereits angedeutet, läßt sich nunmehr jedoch unter Verwendung der in diesem Abschnitt dazugekommenen Terminologie präzisieren. Dazu sei $\widehat{A}$ ein kompakter symmetrischer Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$, außerdem $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ eine geeignete Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ aus Eigenvektoren von $\widehat{A}$ und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der nichtverschwindenden Eigenwerte von $\widehat{A}$ mit $m \leqq \lambda_n \leqq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gemäß Satz 4.44. Definiert man nun

$$\widehat{E}_\lambda = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\lambda_n \leqq \lambda} f_{\varphi_n} \varphi_n & \text{für} \quad \lambda < 0, \\ \mathbf{1} - \displaystyle\sum_{\lambda_n > \lambda} f_{\varphi_n} \varphi_n & \text{für} \quad \lambda \leqq 0, \end{cases}$$

wobei die φ_n jeweils Eigenvektoren zu λ_n sind, dann ist $\{ \widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty \}$ eine Spektralschar; dabei ist $\widehat{E}_\lambda$ zwischen zwei Eigenwerten λ_n und λ_{n+1} konstant, und zwar gerade gleich dem Projektor (4.40) mit $\lambda = \lambda_n$. Bei jedem Eigenwert springt $\widehat{E}_\lambda$ jeweils um den Projektor (4.41), und außerdem gilt wieder $\widehat{E}_\lambda = 0$ für $\lambda < m$ sowie $\widehat{E}_\lambda = \mathbf{1}$ für $\lambda \geqq M$. Damit folgt

$$\widehat{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\widehat{E}_\lambda = \int_{m-0}^{M} \lambda \, d\widehat{E}_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \, (\widehat{E}_{\lambda_{n+1}} - \widehat{E}_{\lambda_n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \, f_{\varphi_n} \varphi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \, \widehat{P}_n,$$

wobei $\widehat{P}_n$ jeweils der Projektor auf den Eigenraum des Eigenwerts λ_n ist. Das ist genau die Darstellung (4.24). Die Einschränkung von beschränkten auf kompakte selbstadjungierte Operatoren erlaubt somit, die normalerweise kontinuierlichen Spektralzerlegungen zu diskretisieren.

Richtig interessant wird die Sache natürlich erst, wenn wir auch unbeschränkte Operatoren zulassen; die Überschrift des vorliegenden Abschnitts soll ja auch kein leeres Versprechen sein. Hierzu brauchen wir zunächst drei weitere Hilfssätze [314].

4.104 Lemma: *Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\widehat{A}$ ein abgeschlossener dicht definierter Operator auf $\mathcal{H}$ und $\widehat{B} = (\,1 + \widehat{A}^*\widehat{A}\,)^{-1}$. Dann ist $\widehat{B}$ ein positiv definiter symmetrischer Operator auf $\mathcal{H}$, und es gilt* $\|\widehat{B}\| \leqq 1$.

Beweis: [41] Für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned}(\widehat{B}\,\psi, \varphi) &= (\widehat{B}\,\psi, \widehat{B}^{-1}\widehat{B}\,\varphi) = (\widehat{B}\,\psi, \widehat{B}\,\varphi) + (\widehat{B}\,\psi, \widehat{A}^*\widehat{A}\,\widehat{B}\,\varphi)\\ &= (\widehat{B}\,\psi, \widehat{B}\,\varphi) + (\widehat{A}^*\widehat{A}\,\widehat{B}\,\psi, \widehat{B}\,\varphi) = (\widehat{B}^{-1}\widehat{B}\,\psi, \widehat{B}\,\varphi) = (\psi, \widehat{B}\,\varphi),\end{aligned}$$

das heißt, $\widehat{B}$ ist symmetrisch.
Weiter gilt für alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$(\widehat{B}\,\psi, \psi) = (\widehat{B}\,\psi, \widehat{B}\,\psi) + (\widehat{B}\,\psi, \widehat{A}^*\widehat{A}\,\widehat{B}\,\psi) = (\widehat{B}\,\psi, \widehat{B}\,\psi) + (\widehat{A}\,\widehat{B}\,\psi, \widehat{A}\,\widehat{B}\,\psi) \geqq 0,$$

also ist $\widehat{B}$ positiv definit.
Nun betrachten wir den Hilbertraum $\mathscr{H} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ mit dem Skalarprodukt $\langle\{\psi, \chi\}, \{\varphi, \xi\}\rangle = (\psi, \varphi) + (\chi, \xi)$ sowie den Graphen $\Gamma(\widehat{A}\,) \subset \mathscr{H}$ von $\widehat{A}$. Außerdem definieren wir den Operator $\mathbf{C} : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ durch $\mathbf{C}\,\{\psi, \varphi\} = \{\varphi, -\psi\}$ für $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$. Mit diesem gilt für alle $\psi, \varphi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{C}\,\{\psi, \widehat{A}\,\psi\}, \{\varphi, \widehat{A}^*\varphi\}\rangle &= \langle\{\widehat{A}\,\psi, -\psi\}, \{\varphi, \widehat{A}^*\varphi\}\rangle\\ &= (\widehat{A}\,\psi, \varphi) - (\psi, \widehat{A}^*\varphi) = (\widehat{A}\,\psi, \varphi) - (\widehat{A}\,\psi, \varphi) = 0,\end{aligned}$$

und somit ist $\Gamma(\widehat{A}^*)$ das orthogonale Komplement des Abschlusses von $\mathbf{C}\,\Gamma(\widehat{A}\,)$. Folglich gibt es für jeden Vektor $\psi \in \mathcal{H}$ eindeutig bestimmte Vektoren $\varphi \in \operatorname{dom}\widehat{A}^*$ und $\chi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$, sodaß der Vektor $\{\psi, 0\} \in \mathscr{H}$ in der Form

$$\{\psi, 0\} = \{\varphi, \widehat{A}^*\varphi\} + \{\widehat{A}\,\chi, -\chi\} \tag{4.49}$$

darstellbar ist. Daraus folgt zunächst nach Satz 2.140

$$\begin{aligned}\|\psi\|^2 &= \|\{\psi, 0\}\|^2 = \|\,\{\varphi, \widehat{A}^*\varphi\} + \{\widehat{A}\,\chi, -\chi\}\,\|^2\\ &= \|\{\varphi, \widehat{A}^*\varphi\}\|^2 + \|\{\widehat{A}\,\chi, -\chi\}\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\widehat{A}^*\varphi\|^2 + \|\widehat{A}\,\chi\|^2 + \|\chi\|^2\end{aligned} \tag{4.50}$$

Ein Vergleich der Komponenten bei Gleichung (4.49) liefert außerdem $\psi = \varphi + \widehat{A}\,\chi$ und $\widehat{A}^*\varphi = \chi$, insgesamt also $\psi = (\,1 + \widehat{A}^*\widehat{A}\,)\,\varphi$. Damit gilt

$$\widehat{B}\,\psi = \varphi \tag{4.51}$$

und mit (4.50) folgt

$$\|\widehat{B}\,\psi\|^2 = \|\varphi\|^2 \leqq \|\psi\|^2,$$

also $\|\widehat{B}\| \leqq 1$. □

[41] Der hier gezeigte Beweis stammt von J. von Neumann [270].

4.105 Lemma: *Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und sind $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ vertauschbare positiv definite beschränkte symmetrische Operatoren auf $\mathcal{H}$, dann ist auch $\widehat{A}\,\widehat{B}$ ein positiv definiter beschränkter symmetrischer Operator auf $\mathcal{H}$.*

Beweis: Nach Lemma 4.75 gibt es zu $\widehat{B}$ einen eindeutig bestimmten Operator $\widehat{B}^{1/2}$. Dieser ist nach Corollar 4.8 mit $\widehat{B}$ und daher nach Voraussetzung auch mit $\widehat{A}$ vertauschbar. Somit gilt für jedes $\psi \in \mathcal{H}$

$$(\widehat{A}\,\widehat{B}\,\psi, \psi) = (\widehat{A}\,\widehat{B}^{1/2}\widehat{B}^{1/2}\,\psi, \psi) = (\widehat{B}^{1/2}\widehat{A}\,\widehat{B}^{1/2}\,\psi, \psi) = (\widehat{A}\,\widehat{B}^{1/2}\,\psi, \widehat{B}^{1/2}\,\psi) \geqq 0,$$

folglich ist $\widehat{A}\,\widehat{B}$ positiv definit und nach Satz 3.2 symmetrisch. □

4.106 Lemma: *Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise orthogonaler Unterräume von $\mathcal{H}$ mit $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n = \mathcal{H}$ und $(\widehat{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Projektoren von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}_n$. Dann gibt es zu jeder Folge $(\widehat{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ linearer Operatoren auf $\mathcal{H}$, für die für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch $\widehat{A}_n \restriction \mathcal{H}_n$ ein beschränkter symmetrischer Endomorphismus auf $\mathcal{H}_n$ definiert wird, genau einen selbstadjungierten Operator $\widehat{A}$ auf $\mathcal{H}$ mit den folgenden Eigenschaften.*

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\widehat{A} \restriction \mathcal{H}_n = \widehat{A}_n$,

(ii) es gilt $\operatorname{dom} \widehat{A} = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} \| \widehat{A}_n \widehat{P}_n \psi \|^2 < \infty \right\}$,

(iii) für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ *gilt* $\widehat{A}\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{A}_n \widehat{P}_n \psi$.

Beweis: Zunächst zur Existenz: Durch (iii) wird ein linearer Operator auf $\mathcal{H}$ definiert. (i) folgt unmittelbar aus (iii); nach Satz 2.140 sind (ii) und (iii) aquivalent. $\widehat{A}$ ist dicht definiert, denn mit

$$\mathcal{D} := \left\{ \psi \in \mathcal{H} \;\middle|\; \psi = \sum_{j=0}^{n} \widehat{P}_j\,\varphi,\ \varphi \in \mathcal{H},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

gibt es eine in $\mathcal{H}$ dichte Menge mit $\mathcal{D} \subset \operatorname{dom} \widehat{A}$. Für alle $\psi, \varphi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}(\widehat{A}\psi, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\widehat{A}_n \widehat{P}_n \psi, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\widehat{A}_n \widehat{P}_n \psi, \widehat{P}_n \varphi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\widehat{P}_n \psi, \widehat{A}_n \widehat{P}_n \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi, \widehat{A}_n \widehat{P}_n \varphi) = (\psi, \widehat{A}\varphi);\end{aligned}$$

folglich ist $\widehat{A}$ symmetrisch, und es gilt $\widehat{A} \subseteqq \widehat{A}^*$. Auf der anderen Seite gilt für $\varphi \in \operatorname{dom} \widehat{A}^*$ und $n \in \mathbb{N}$ für alle $\psi \in \mathcal{H}_n$

$$(\psi, \widehat{A}_n \widehat{P}_n \varphi) = (\widehat{A}_n \psi, \widehat{P}_n \varphi) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \widehat{A}_m \widehat{P}_m \psi, \widehat{P}_n \varphi \right)$$

$$= (\widehat{A}\psi, \widehat{P}_n\varphi)) = (\psi, \widehat{A}^*\widehat{P}_n\varphi) = (\psi, \widehat{P}_n\widehat{A}^*\varphi) \tag{4.52}$$

und damit $\widehat{A}_n\widehat{P}_n\varphi = \widehat{P}_n\widehat{A}^*\varphi$; das wiederum liefert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\widehat{A}_n\widehat{P}_n\varphi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\widehat{P}_n\widehat{A}^*\varphi\|^2 = \|\widehat{A}^*\varphi\|^2,$$

also $\varphi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$. Zusätzlich gilt

$$\widehat{A}\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{A}_n\widehat{P}_n\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{P}_n\widehat{A}^*\varphi = \widehat{A}^*\varphi,$$

also $\widehat{A} \supseteqq \widehat{A}^*$ und damit insgesamt $\widehat{A} = \widehat{A}^*$. Nun zur Eindeutigkeit: $\widehat{B}$ sei ein beliebiger weiterer Operator mit den oben geforderten Eigenschaften. $\widehat{B}$ ist nach Voraussetzung selbstadjungiert, also abgeschlossen, folglich gilt $\widehat{B}\psi = \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{B}\widehat{P}_n\psi = \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{A}_n\widehat{P}_n\psi = \widehat{A}\psi$ für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$, damit $\operatorname{dom}\widehat{B} \supseteqq \operatorname{dom}\widehat{A}$, das heißt, es liegt eine selbstadjungierte Erweiterung $\widehat{B} \supseteqq \widehat{A}$ vor. Nun ist aber $\widehat{A}$ schon selbstadjungiert, folglich gilt $\widehat{B} = \widehat{A}$. □

Entscheidend ist bei obigem Hilfssatz, daß die Operatoren $\widehat{A}_n$ zwar für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt sind, der Operator $\widehat{A}$ jedoch im allgemeinen unbeschränkt ist[42]. Damit können wir die Spektraldarstellung auf unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren ausdehnen.

4.107 Spektralsatz: *Für jeden selbstadjungierten Operator $\widehat{A}$ auf einem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Spektralschar $\{\,\widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty\,\}$, mit der für diesen Operator eine Spektraldarstellung*

$$\widehat{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\widehat{E}_\lambda \tag{4.53}$$

möglich ist. Umgekehrt wird für jede Spektralschar durch (4.53) in eindeutiger Weise ein selbstadjungierter Operator definiert. Dabei gilt

$$\operatorname{dom}\widehat{A} = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d\,\|\widehat{E}_\lambda\psi\|^2 < \infty \right\}.$$

Beweis: [43] Wir zeigen erstens, daß eine Spektralschar mit der behaupteten Eigenschaft existiert. Dazu sei $\widehat{B} = (\,1 + \widehat{A}^2\,)^{-1}$. Nach Lemma 4.104 ist $\widehat{B}$ positiv definit und symmetrisch,

[42] Das ist er genau dann, wenn die reelle Folge $(\|\widehat{A}_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist.

[43] Der hier gezeigte Beweis stammt von Riesz und Lorch [313], [314]; siehe auch [228] und [374]. Erstmals bewiesen wurde dieser Satz durch von Neuman, der die Spektralzerlegung unbeschränkter selbstadjungierter Operatoren mit Hilfe der Cayley-Tramsformierten auf diejenige unitärer Operatoren zurückführte [268]. Zum Spektralsatz für unitäre Operatoren siehe Abschnitt 4.4.3.

und es gilt $\|\widehat{B}\| \leqq 1$. Nach Satz 4.44 ist daher $\sigma(\widehat{B}) \subset [0,1]$, und nach Satz 4.103 gibt es somit eine das Intervall $[0,1]$ überdeckende Spektralschar $\{\, \widehat{F}_\lambda \mid 0 \leqq \lambda \leqq 1 \,\}$ mit

$$\widehat{B} = \int_{-0}^{1} \lambda \, d\widehat{F}_\lambda.$$

Betrachten wir nun die Folge $(\widehat{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von orthogonalen Projektoren mit $\widehat{P}_n = \widehat{F}_{1/n} - \widehat{F}_{1/(n+1)}$, so erhalten wir zunächst $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \widehat{P}_n = \widehat{F}_1 - \widehat{F}_0$. Dabei gilt einerseits $\widehat{F}_1 = \mathbf{1}$; andererseits ist

$$\widehat{F}_\lambda \widehat{F}_0 = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \lambda < 0 \\ \widehat{F}_0 & \text{für} \quad \lambda \geqq 0 \end{cases}$$

und damit

$$\widehat{F}_0 = \widehat{B}^{-1} \widehat{B}\, \widehat{F}_0 = \widehat{B}^{-1} \int_{-0}^{1} \lambda \, d\widehat{F}_\lambda \, \widehat{F}_0 = 0,$$

also folgt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \widehat{P}_n = \mathbf{1}$. Somit sind die Projektionsräume $\mathcal{P}_n$ der $\widehat{P}_n$ paarweise orthogonal, und es gilt $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n = \mathcal{H}$. Als nächstes ist nun zu zeigen, daß die Einschränkungen $\widehat{A} \restriction \mathcal{P}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt und symmetrisch sind. Dazu drücken wir sie mit Hilfe der durch die reellen Funktionen

$$f_n(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\xi} & \text{für} \quad \dfrac{1}{n+1} < \xi \leqq \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

vermöge der im Beweis von Satz 4.103 definierten Abbildung Φ erzeugten Folge $(f_n(\widehat{B}))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkter und symmetrischer Operatoren sowie des ebenfalls beschränkten symmetrischen Operators $\widehat{C} = \widehat{A}\,\widehat{B}$ aus. Dabei gilt einerseits

$$\xi\, f_n(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \dfrac{1}{n+1} < \xi \leqq \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

also

$$\widehat{B}\, f_n(\widehat{B}) = f_n(\widehat{B})\, \widehat{B} = \widehat{P}_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; andererseits liefern (4.49) und (4.51)

$$\widehat{C}\, \psi = \chi,$$

mit (4.50) folgt daher

$$\|\, \widehat{C}\, \psi \,\|^2 = \|\chi\|^2 \leqq \|\psi\|^2,$$

und somit ist auch $\|\widehat{C}\| \leqq 1$. Weiter gilt

$$\widehat{B}\widehat{A} = \widehat{B}\,\widehat{A}\,(\,1 + \widehat{A}^2\,)\,\widehat{B} = \widehat{B}\,(\,1 + \widehat{A}^2\,)\,\widehat{A}\,\widehat{B} \subseteqq \widehat{A}\,\widehat{B}$$

und damit auch

$$\widehat{B}\,\widehat{C} = \widehat{B}\,\widehat{A}\,\widehat{B} \subseteqq \widehat{A}\,\widehat{B}\,\widehat{B} = \widehat{C}\,\widehat{B}.$$

Da $\widehat{B}$ und $\widehat{C}$ und somit auch $\widehat{B}\,\widehat{C}$ beschränkt sind, folgt daraus

$$\widehat{B}\,\widehat{C} = \widehat{C}\,\widehat{B}.$$

Das liefert

$$\widehat{A}\,\widehat{P}_n = \widehat{A}\,\widehat{B}\,f_n(\widehat{B}) = \widehat{C}\,f_n(\widehat{B})$$

sowie

$$\widehat{P}_n\,\widehat{A} = f_n(\widehat{B})\,\widehat{B}\,\widehat{A} = f_n(\widehat{B})\,\widehat{A}\,\widehat{B} = f_n(\widehat{B})\,\widehat{C},$$

nach Lemma 4.105 sind somit $\widehat{A}$ und $\widehat{P}_n$ vertauschbar, und $\widehat{A}\,\widehat{P}_n$ ist ein beschränkter symmetrischer Operator auf $\mathcal{H}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind folglich die Operatoren $\widehat{A}_n := \widehat{A} \upharpoonright \mathcal{P}_n$ beschränkt und symmetrisch. Nach Satz 4.103 gibt es daher auf jedem Raum $\mathcal{P}_n$ eine Spektralschar $\{\,\widehat{E}_{n,\lambda} \mid m_n \leqq \lambda \leqq M_n\,\}$, wobei $m_n < M_n \in \mathbb{R}$ jeweils die durch Satz 4.44 definierten Konstanten sind. Nach Lemma 4.106 wiederum existiert dann eine Familie $\{\,\widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty\,\}$ selbstadjungierter Operatoren auf $\mathcal{H}$ mit $\widehat{E}_\lambda \upharpoonright \mathcal{P}_n = \widehat{E}_{n,\lambda}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die gleichzeitig eine ganz $\mathbb{R}$ überdeckende Spektralschar auf $\mathcal{H}$ ist. Nun gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\psi \in \mathcal{P}_n$ definitionsgemäß $\widehat{E}_\lambda\psi = \widehat{E}_{n,\lambda}\psi$, und außerdem ist $\widehat{E}_\lambda\psi = \widehat{E}_\mu\psi$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda, \mu < m_n$ oder $\lambda, \mu \geqq M_n$. Daraus folgt für jede reelle Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ mit $\lim\limits_{m\to-\infty} a_m = -\infty$ und $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = \infty$ sowie alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $\psi \in \mathcal{P}_n$ nach Satz 4.103

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\widehat{E}_\lambda\psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int\limits_{a_m}^{a_{m+1}} \lambda\, d\widehat{E}_\lambda\psi = \int\limits_{m_n-0}^{M_n} \lambda\, d\widehat{E}_\lambda\psi = \int\limits_{m_n-0}^{M_n} \lambda\, d\widehat{E}_{n,\lambda}\psi = \widehat{A}_n\psi = \widehat{A}\,\psi, \tag{4.54}$$

sofern das Integral auf der linken Seite existiert. In diesem Fall stimmen also dieses Integral und der Operator $\widehat{A}$ auf jedem Raum $\mathcal{P}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit auf ganz $\mathcal{H}$ überein, das heißt, auf ganz $\mathcal{H}$ gilt (4.53).

Um die Existenz von (4.53) zu beweisen, zeigen wir nun zweitens, daß hierdurch für jede beliebige Spektralschar $\{\,\widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty\,\}$ auf $\mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator definiert wird. Dazu betrachten wir wieder eine reelle Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ mit den oben beschriebenen Eigenschaften, dazu die Folge $(\widehat{Q}_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ orthogonaler Projektoren mit $\widehat{Q}_m = \widehat{E}_{a_{m+1}} - \widehat{E}_{a_m}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ sowie die Folge $(\mathcal{Q}_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ der jeweils zugehörigen Projektionsräume. Wieder gilt dabei $\bigoplus\limits_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{Q}_m = \mathcal{H}$. Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ sei

$$\widehat{T}_m = \int\limits_{a_m}^{a_{m+1}} \lambda\, d\widehat{E}_\lambda, \tag{4.55}$$

dann gilt für alle $\psi \in \mathcal{Q}_m$ nach (4.45)

$$\|\widehat{T}_m\psi\|^2 = \left\| \int\limits_{a_m}^{a_{m+1}} \lambda \, d\widehat{E}_\lambda \psi \right\|^2 = \int\limits_{a_m}^{a_{m+1}} |\lambda|^2 \, d \, \|\widehat{E}_\lambda \psi\|^2 < \infty$$

sowie

$$(\widehat{T}_m\psi, \psi) = \int\limits_{a_m}^{a_{m+1}} \lambda \, d\,(\widehat{E}_\lambda \psi, \psi) \in \mathbb{R},$$

das heißt, jedes $\widehat{T}_m$ ist ein beschränkter symmetrischer Operator auf $\mathcal{Q}_m$. Nach Lemma 4.106 gibt es somit einen eindeutig bestimmten selbstadjungierten Operator $\widehat{T}$ auf $\mathcal{H}$ mit $\widehat{T} \restriction \mathcal{Q}_m = \widehat{T}_m$ für alle $m \in \mathbb{Z}$, und für diesen erhält man analog zu (4.54)

$$\widehat{T} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\widehat{E}_\lambda.$$

Drittens zeigen wir die Eindeutigkeit der Darstellung (4.53). Dazu sei $\{ \widehat{G}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty \}$ eine beliebige Spektralschar auf $\mathcal{H}$ mit $\widehat{A} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\widehat{G}_\lambda$ und $(a_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ wieder eine reelle Folge wie oben. Dann gilt einerseits für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ und alle $-\infty \leqq \mu \leqq \infty$

$$\begin{aligned} \widehat{A}\,\widehat{G}_\mu\psi &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\widehat{G}_\lambda \widehat{G}_\mu \psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int\limits_{a_m}^{a_{m+1}} \lambda \, d\widehat{G}_\lambda (\, \widehat{G}_{a_{m+1}} - \widehat{G}_{a_m} \,)\, \widehat{G}_\mu \psi \\ &= \widehat{G}_\mu \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int\limits_{a_m}^{a_{m+1}} \lambda \, d\widehat{G}_\lambda (\, \widehat{G}_{a_{m+1}} - \widehat{G}_{a_m} \,)\, \psi = \widehat{G}_\mu \widehat{A}\, \psi, \end{aligned}$$

das heißt, $\widehat{A}$ ist mit allen $\widehat{G}$ vertauschbar, und da $\widehat{A}$ ohnehin mit allen $\widehat{E}_\lambda$ vertauschbar ist, sind auch alle $\widehat{E}_\lambda$ mit allen $\widehat{G}_\mu$ vertauschbar. Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ gilt daher auf $\mathcal{Q}_m$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\widehat{E}_\lambda \restriction \mathcal{Q}_m = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\widehat{G}_\lambda \restriction \mathcal{Q}_m = \widehat{A}\,\widehat{Q}_m,$$

und nach Lemma 4.106 folgt hieraus $\widehat{E}_\lambda = \widehat{G}_\lambda$ für alle $-\infty \leqq \lambda \leqq \infty$ auf ganz $\mathcal{H}$.

Schließlich beweisen wir viertens obige Aussage über die Definitionsmenge von Operatoren der Form (4.53). Nach (4.54) und Satz 2.140 existiert das Integral in (4.53), wenn die Reihe $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \left\| \int\limits_{a_m}^{a_{m+1}} \lambda \, d\widehat{E}_\lambda \psi \right\|^2$ konvergiert. Hierbei gilt

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\| \int\limits_{a_m}^{a_{m+1}} \lambda \, d\widehat{E}_\lambda \psi \right\|^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{a_m}^{a_{m+1}} \lambda \, d\widehat{E}_\lambda \psi, \int\limits_{a_m}^{a_{m+1}} \lambda \, d\widehat{E}_\lambda \psi \right)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{a_m}^{a_{m+1}} \lambda^2 \, d\,(\widehat{E}_\lambda \psi, \widehat{E}_\lambda \psi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{a_m}^{a_{m+1}} \lambda^2 \, d\,\|\widehat{E}_\lambda \psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d\,\|\widehat{E}_\lambda \psi\|^2$$

für alle $m \in \mathbb{Z}$ und alle $\psi \in \mathcal{Q}_m$. Daraus folgt die Behauptung. □

Die Spektralschar eines gegebenen selbstadjungierten Operators läßt sich explizit konstruieren; wie das geht, verrät die

4.108 Stonesche Formel:[44] *Ist $\widehat{A}$ ein beliebiger selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum und $\{\, \widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty \}$ die zugehörige Spektralschar, dann gilt für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$(\varphi, \widehat{E}_\lambda \psi) = \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\lambda+\delta} \big(\varphi, ((\,\widehat{A} - t - i\,\varepsilon\,)^{-1} - (\,\widehat{A} - t + i\,\varepsilon\,)^{-1})\,\psi\big)\, dt.$$

Beweis: Für jedes $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt einerseits

$$(\,\widehat{A} - \zeta\,) \int_{\mathbb{R}} \frac{d\widehat{E}_\lambda}{\lambda - \zeta} = \int_{\mathbb{R}} d\widehat{E}_\lambda = \widehat{E}_\infty = \mathbf{1},$$

andererseits

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\widehat{E}_\lambda}{\lambda - \zeta} (\,\widehat{A} - \zeta\,) = \mathbf{1} \restriction \operatorname{dom} \widehat{A}$$

und damit

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\widehat{E}_\lambda}{\lambda - \zeta} = (\,\widehat{A} - \zeta\,)^{-1}.$$

Daraus folgt für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$

$$(\varphi, (\,\widehat{A} - \zeta\,)^{-1}\,\psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\,(\varphi, \widehat{E}_\lambda \psi)}{\lambda - \zeta}.$$

Schreibt man $\alpha_1(\zeta) = \mathfrak{Re}\,(\varphi, (\,\widehat{A} - \zeta\,)^{-1}\,\psi)$ und $\alpha_2(\zeta) = \mathfrak{Im}\,(\varphi, (\,\widehat{A} - \zeta\,)^{-1}\,\psi)$ sowie $\beta_1(\lambda) = \mathfrak{Re}\,(\varphi, \widehat{E}_\lambda \psi)$ und $\beta_2(\lambda) = \mathfrak{Im}\,(\varphi, \widehat{E}_\lambda \psi)$, dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Im}\; \alpha_1(\,t + i\,\varepsilon\,) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{Im} \left(\frac{1}{\lambda - t - i\,\varepsilon} \right) d\,\beta_1(\lambda) \\
&= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - t - i\,\varepsilon} - \frac{1}{\lambda - t + i\,\varepsilon} \right) d\,\beta_1(\lambda)
\end{aligned}$$

[44] Benannt nach ihrem Entdecker M. H. Stone [361].

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(t-\lambda)^2+\varepsilon^2}\, d\beta_1(\lambda).$$

Mit Satz 1.25 folgt für jedes $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t} \mathfrak{Im}\, \alpha_1(t+i\varepsilon)\, ds &= \int_{-\infty}^{s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(t-\lambda)^2+\varepsilon^2}\, d\beta_1(\lambda)\, ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{s} \frac{\varepsilon}{(t-\lambda)^2+\varepsilon^2}\, dt\, d\beta_1(\lambda) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{(s-\lambda)/\varepsilon} \frac{1}{x^2+1}\, dx\, d\beta_1(\lambda) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\arctan \frac{s-\lambda}{\varepsilon} + \frac{\pi}{2} \right) d\beta_1(\lambda).
\end{aligned}$$

Für den Integranden von obigem Integral gilt

$$\left| \arctan \frac{s-\lambda}{\varepsilon} + \frac{\pi}{2} \right| \leqq \pi$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ sowie

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\arctan \frac{s-\lambda}{\varepsilon} + \frac{\pi}{2} \right) = \begin{cases} \pi & \text{für } s > \lambda \\ \pi/2 & \text{für } s = \lambda \\ 0 & \text{für } s < \lambda; \end{cases}$$

nach Satz 1.21 folgt daher

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-\infty}^{s} \mathfrak{Im}\, \alpha_1(t+i\varepsilon)\, dt = \frac{\pi}{2} \left[\beta_1(s) + \beta_1(s-0) \right]$$

und mit Eigenschaft (ii) von Definition 4.98 weiter

$$\begin{aligned}
\beta_1(\lambda) &= \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\lambda+\delta} \mathfrak{Im}\, \alpha_1(t+i\varepsilon)\, dt \\
&= \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\lambda+\delta} \left[\alpha_1(t+i\varepsilon) - \alpha_1(t-i\varepsilon) \right] dt. \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$\beta_2(\lambda) = \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda+\delta} \left[\alpha_2(t+i\varepsilon) - \alpha_2(t-i\varepsilon) \right] dt. \qquad (4.57)$$

(4.56) und (4.57) liefern zusammengenommen die Behauptung. □

Völlig unklar ist bis jetzt noch der sich durch die Terminologie unmißverständlich andeutende Zusammenhang zwischen Spektralscharen und Spektraldarstellungen selbstadjungierter Operatoren einerseits und deren Spektren andererseits; hier besteht somit weiterer Klärungsbedarf[45]. Dazu brauchen wir zunächst wieder eine

4.109 Definition: $\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum und $\widehat{A}$ ein beliebiger selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$, außerdem sei $\{\widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \lambda\}$ die durch $\widehat{A}$ eindeutig bestimmte Spektralschar.

(i) λ heißt *Konstanzpunkt* von $\{\widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \lambda\}$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt so daß $\widehat{E}_{\lambda+\varepsilon} - \widehat{E}_{\lambda-\varepsilon} = 0$ gilt;

(ii) λ heißt *Wachstumspunkt*, wenn es kein Konstanzpunkt ist;

(iii) Wachstumspunkte heißen *Sprungpunkte*, sofern $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} (\widehat{E}_\lambda - \widehat{E}_{\lambda-\varepsilon}) \neq 0$ ist;

(iv) Wachstumspunkte heißen *Stetigkeitspunkte* oder *Punkte stetigen Wachstums*, falls $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} (\widehat{E}_\lambda - \widehat{E}_{\lambda-\varepsilon}) = 0$.

Diese vier Begriffe lassen sich jeweils unmittelbar anschaulich deuten. λ ist ein Konstanzpunkt der Spektralschar, wenn deren Projektoren in einer Umgebung von λ alle auf denselben Teilraum von $\mathcal{H}$ projezieren, ein Wachstumspunkt, wenn sich die Projektoren bei jeder noch so kleinen Variation von λ ebenfalls ändern, ein Sprungpunkt, wenn sich die Projektoren an der Stelle λ unstetig ändern, und ein Stetigkeitspunkt, falls die Projektoren sich stetig mit λ ändern. – Der folgende Satz beantwortet nun genau die oben gestellte Frage.

4.110 Satz: *$\mathcal{H}$ sei ein komplexer Hilbertraum und $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$.*
(i) Die Sprungpunkte der Spektralschar von $\widehat{A}$ sind genau die Eigenwerte von $\widehat{A}$.
(ii) Die Konstanzpunkte der Spektralschar von $\widehat{A}$ sind genau die regulären Punkte von $\widehat{A}$.

Beweis: (i) $\mu \in \mathbb{C}$ sei ein Sprungpunkt der Spektralschar von $\widehat{A}$. Dann springt die Spektralschar bei μ um einen Projektor $\widehat{P}_\mu$; dessen Projektionsraum sei $\mathcal{H}_\mu$. Für jedes $\psi \in \mathcal{H}_\mu$ gilt dann

$$\widehat{A}\psi = \widehat{A}\,\widehat{P}_\mu\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\widehat{E}_\lambda \widehat{P}_\mu\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, \widehat{P}_\lambda \widehat{P}_\mu \psi\, d\lambda = \mu\, \widehat{P}_\mu\psi = \mu\,\psi.$$

Ist umgekehrt μ ein Eigenwert von $\widehat{A}$ mit Eigenvektor $\psi \neq 0$, dann folgt für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} 0 = \|(\widehat{A} - \mu)\psi\|^2 &= \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \mu)\, d\widehat{E}_\lambda \psi \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\mu)^2\, d\,\|\widehat{E}_\lambda\psi\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} (\lambda-\mu)^2\, d\,\|\widehat{E}_\lambda\psi\|^2 + \int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon} (\lambda-\mu)^2\, d\,\|\widehat{E}_\lambda\psi\|^2 + \int_{\mu+\varepsilon}^{\infty} (\lambda-\mu)^2\, d\,\|\widehat{E}_\lambda\psi\|^2. \end{aligned}$$

[45]Wir orientieren uns hier teilweise an [121].

Alle drei Integrale auf der rechten Seite sind positiv und müssen daher einzeln verschwinden. Aus dem ersten Integral folgt

$$0 = \int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} (\lambda - \mu)^2 \, d\, \|\widehat{E}_\lambda \psi\|^2 \geqq \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} d\, \|\widehat{E}_\lambda \psi\|^2 = \varepsilon^2 \, \|\widehat{E}_{\mu-\varepsilon}\psi\|^2,$$

und wir erhalten

$$\widehat{E}_{\mu-\varepsilon}\psi = 0. \tag{4.58}$$

Analog folgt aus dem dritten Integral

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\mu+\varepsilon}^{\infty} (\lambda - \mu)^2 \, d\, \|\widehat{E}_\lambda \psi\|^2 &\geqq \varepsilon^2 \int_{\mu+\varepsilon}^{\infty} d\, \|\widehat{E}_\lambda \psi\|^2 \\ &= \varepsilon^2 \, (\|\psi\|^2 - \|\widehat{E}_{\mu+\varepsilon}\, \psi\|^2) = \varepsilon^2 \, \|\, \psi - \widehat{E}_{\mu+\varepsilon}\, \psi\, \|^2; \end{aligned}$$

diesmal erhalten wir

$$\widehat{E}_{\mu+\varepsilon}\psi = \psi. \tag{4.59}$$

Aus (4.58) und (4.59) folgt $\lim_{\varepsilon \to 0} [\, (\, \widehat{E}_\mu - \widehat{E}_{\mu-\varepsilon}\,)\, \psi\,] = \psi$, und weil nach Voraussetzung $\psi \neq 0$ ist, folgt daraus $\lim_{\varepsilon \to 0} (\, \widehat{E}_\mu - \widehat{E}_{\mu-\varepsilon}\,) \neq 0$.

(ii) $\mu \in \mathbb{C}$ sei ein Konstanzpunkt der Spektralschar von $\widehat{A}$. Dann gilt für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$

$$\|\, (\, \widehat{A} - \mu\,)\, \psi\, \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \mu)^2 \, d\, \|\widehat{E}_\lambda \psi\rangle\|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} (\lambda - \mu)^2 \, d\, \|\widehat{E}_\lambda \psi\|^2 + \int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon} (\lambda - \mu)^2 \, d\, \|\widehat{E}_\lambda \psi\|^2 + \int_{\mu+\varepsilon}^{\infty} (\lambda - \mu)^2 \, d\, \|\widehat{E}_\lambda \psi\|^2,$$

Das mittlere der drei Integrale verschwindet; analog zu oben erhält man daher die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\, (\, \widehat{A} - \mu\,)\, \psi\, \|^2 &\geqq \varepsilon^2 \left[\, \|\widehat{E}_{\mu-\varepsilon}\psi\|^2 + \|\psi\|^2 - \|\widehat{E}_{\mu+\varepsilon}\psi\|^2\, \right] \\ &\geqq \varepsilon^2 \left[\, \|\psi\|^2 - \|\, (\, \widehat{E}_{\mu+\varepsilon} - \widehat{E}_{\mu-\varepsilon}\,)\, \psi\, \|^2\, \right], \end{aligned}$$

wegen $\widehat{E}_{\mu+\varepsilon} - \widehat{E}_{\mu-\varepsilon} = 0$ folgt daraus

$$\|\, (\, \widehat{A} - \mu\,)\, \psi\, \|^2 \geqq \varepsilon^2 \, \|\psi\|^2,$$

und nach Corollar 4.40 (ii) gilt damit $\mu \in \rho(\widehat{A}\,)$. Nun sei μ als regulär vorausgesetzt, dann gilt $\|\, (\, \widehat{A} - \mu\,)\, \| \geqq \delta\, \|\psi\|$ für ein geeignetes $\delta > 0$. Wäre μ nun kein Konstanzpunkt, so würde die Spektralschar dort springen, es gäbe also ein ε mit $0 < \varepsilon < \delta$, so daß $\widehat{E}_{\mu+\varepsilon} - \widehat{E}_{\mu-\varepsilon} \neq 0$ ist. Jetzt verwenden wir gerade diesen Projektor und wählen $\psi =: (\, \widehat{E}_{\mu+\varepsilon} - \widehat{E}_{\mu-\varepsilon}\,)\, \varphi$ mit irgendeinem $\varphi \in \mathcal{H}$. Nach Voraussetzung ist dann

$$\|\, (\, \widehat{A} - \mu\,)\, (\, \widehat{E}_{\mu+\varepsilon} - \widehat{E}_{\mu-\varepsilon}\,)\, \varphi\, \|^2 \geqq \delta^2 \, \|\, (\, \widehat{E}_{\mu+\varepsilon} - \widehat{E}_{\mu-\varepsilon}\,)\, \varphi\, \|^2;$$

andererseits gilt jedoch

$$\| (\widehat{A} - \mu) (\widehat{E}_{\mu+\varepsilon} - \widehat{E}_{\mu-\varepsilon}) \varphi \|^2 = \int\limits_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon} (\lambda - \mu)^2 \, d \, \| \widehat{E}_\lambda \varphi \|^2 \leqq \varepsilon^2 \, \| (\widehat{E}_{\mu+\varepsilon} - \widehat{E}_{\mu-\varepsilon}) \, |\varphi\rangle \, \|^2 ,$$

womit $\delta \leqq \varepsilon$ folgt – ein Widerspruch. □

Zusammenfassend können wir damit die Resolventenmenge und das Spektrum eines beliebigen selbstadjungierten Operators mit Hilfe von dessen Spektralschar wie folgt charakterisieren:

(i) Die Menge der Konstanzpunkte der Spektralschar eines selbstadjungierten Operators bildet dessen Resolventenmenge,

(ii) die Menge der Wachstumspunkte bildet dessen Spektrum,

(iii) die Sprungpunkte sind hierbei die Elemente des diskreten Spektrums und

(iv) die anderen Wachstumspunkte sind die Elemente desjenigen Bereichs des kontinuierlichen Spektrums, der keine Eigenwerte enthält.

Der in (iv) angesprochene Teil des kontinuierlichen Spektrums eines selbstadjungierten Operators $\widehat{A}$, der keine Eigenwerte enthält, heißt *essentielles Spektrum* $\sigma_{\mathsf{E}}(\widehat{A}\,)$. Ein Punkt λ gehört somit genau dann zum essentiellen Spektrum, falls $\dim \left[(\widehat{E}_{\lambda+\varepsilon} - \widehat{E}_{\lambda-\varepsilon}) \, \mathcal{H} \right] = \infty$ gilt für alle $\varepsilon > 0$.

Wir schließen den vorliegenden Abschnitt mit einer weiteren ergänzenden Bemerkung, diesesmal mit Blick auf Satz 4.34. Dessen Aussage erhält man nun für den Sonderfall selbstadjungierter Operatoren sozusagen gratis.

4.111 Corollar: *Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$, dann gilt $\sigma(\widehat{A}\,) \neq \emptyset$.*

Beweis: Nach Satz 4.107 gehört zu $\widehat{A}$ eine Spektralschar $\{ \widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty \}$; nach Satz 4.110 sind deren Wachstumspunkte die Elemente von $\sigma(\widehat{A}\,)$. Nach Definition 4.98 gilt $\widehat{E}_{-\infty} = 0$ und $\widehat{E}_\infty = \mathbf{1}$, und da die Spektralschar irgendwie von 0 auf $\mathbf{1}$ wachsen muß, geht es nicht ohne Wachstumspunkte. □

4.4.2.3 Funktionen von Operatoren

In diesem Abschnitt greifen wir den Beginn des vorigen erneut auf. Dort deutete sich gewissermaßen als Nebenprodukt eine Möglichkeit an, aus gewöhnlichen komplexwertigen Funktionen operatorwertige Funktionen zu basteln. Das wurde in Abschnitt 3.1 mit Hilfe von Potenzreihen bewerkstelligt. Spektraldarstellungen kann man nun dazu verwenden, operatorwertige Funktionen für eine sehr viel größere Klasse von Funktionen zu definieren. Dabei müssen die verwendeten komplexen Funktionen nicht in Potenzreihen entwickelbar sein, es genügt, wenn sie zur Klasse $\mathscr{G}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gehören beziehungsweise $\widehat{E}$-meßbar sind. Die Operatoren, die als Argumente dienen sollen, müssen selbstadjungiert und dürfen unbeschränkt sein.

Alle erforderlichen Hilfsmittel stehen bereits zur Verfügung. Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$ mit Spektralschar $\{\, \widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty \,\}$ und F eine $\widehat{E}$-meßbare Funktion, dann definieren wir

$$\widehat{F}(\widehat{A}) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, d\widehat{E}_\lambda \tag{4.60}$$

und erhalten damit operatorwertige Funktionen[46]. Damit können wir nun insbesondere auch denjenigen Teil von Satz 4.103 auf unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren verallgemeinern, der bis jetzt in diesem Abschnitt noch nicht berücksichtigt wurde.

4.112 Satz: *Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$, dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$*

$$\widehat{A}^n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \, d\widehat{E}_\lambda.$$

Als nützliches Nebenprodukt folgt hieraus, daß alle Iterationen $\widehat{A}^2, \widehat{A}^3, \ldots$ eines selbstadjungierten Operators $\widehat{A}$ ebenfalls selbstadjungiert sind.

Der Fall $n = 0$ liefert

$$\mathbf{1} = \int_{-\infty}^{\infty} d\widehat{E}_\lambda;$$

das ist die *Vollständigkeitsrelation* für die Spektralschar $\{\, \widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty \,\}$ und stellt eine Verallgemeinerung von Satz 2.165 dar. Damit gilt für beliebige $\psi \in \mathcal{H}$

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} d\widehat{E}_\lambda \psi.$$

Entsprechend funktioniert die Bildung von Skalarprodukten mit Hilfe der Spektralschar; für $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ erhält man

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\,(\varphi, \widehat{E}_\lambda \psi),$$

und Normen von Vektoren schreiben sich folglich

$$\|\psi\|^2 = (\psi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\,(\psi, \widehat{E}_\lambda \psi).$$

[46] Für selbstadjungierte beschränkte Operatoren fällt diese Definition operatorwertiger Funktionen mit der Definition (3.1) über Potenzreihen zusammen.

Ein weiteres spezielles, aber wichtiges Beispiel ist die Resolvente eines selbstadjungierten Operators $\widehat{A}$. Auch diese läßt sich mit Hilfe der Spektraldarstellung schreiben; für sie folgt unmittelbar

$$\widehat{R}(\zeta) = (\,\widehat{A} - \zeta\,)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\widehat{E}_\lambda}{\lambda - \zeta}.$$

Anhand von (4.60) erkennt man sofort den folgenden Sachverhalt:

4.113 Satz: *Ist F eine $\widehat{E}$-meßbare Funktion, $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator und $\widehat{A}\,\psi = \lambda\,\psi$, so folgt daraus $F(\widehat{A}\,)\,\psi = F(\lambda)\,\psi$.*

Das heißt, Eigenvektoren selbstadjungierter Operatoren bleiben das auch für über die Spektralscharen dieser Operatoren definierte operatorwertige Funktionen, und die zugehörigen Eigenwerte erhält man durch die entsprechenden Funktionswerte der Eigenwerte der ursprünglichen Operatoren.

Für stetig differenzierbare Funktionen kann man nun auch Ableitungen von operatorwertigen Funktionen nach selbstadjungierten Operatoren definieren gemäß

$$\frac{dF(\widehat{A})}{d\widehat{A}} := \int_{-\infty}^{\infty} F'(\lambda)\,d\widehat{E}_\lambda.$$

Für das Beispiel der e-Funktion

$$e^{\,k\widehat{A}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\,k\lambda}\,d\widehat{E}_\lambda$$

erhält man so die Ableitung

$$\frac{d\,e^{\;k\widehat{A}}}{d\widehat{A}} = k\,e^{\,k\widehat{A}},$$

für eine Polynomfunktion

$$\sum_{j=0}^{n} b_j\,\widehat{A}^j = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} b_j\,\lambda^j\,d\widehat{E}_\lambda$$

dagegen die Ableitung

$$\frac{d}{d\widehat{A}} \sum_{j=0}^{n} b_j\,\widehat{A}^j = \sum_{j=0}^{n} j\,b_j\,\widehat{A}^{j-1}.$$

Näheres hierzu findet man beispielsweise in [117].

4.4.2.4 Spektralmaße und Spektralintegrale

Der in den vorigen beiden Abschnitten gewählte Zugang zu Spektraldarstellungen und Spektraloperatoren sowie insbesondere die Definition von aus Spektralscharen konstruierten Maßen gemäß (4.46) läßt die Möglichkeit erkennen, die Sache von einem sehr viel allgemeineren maßtheoretischen Standpunkt aus aufzuziehen[47]. Ausgangspunkt dafür ist folgende

[47] Weiterführende Informationen hierzu findet man unter anderem in [135], [160] und [254].

4.114 Definition: Es seien $\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra über einer Menge M und $\mathscr{P}(\mathcal{H})$ die Menge der Projektoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann nennen wir eine Funktion $\widehat{E} : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathscr{P}(\mathcal{H})$ ein *Spektralmaß*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\widehat{E}(\emptyset) = 0$,

(ii) $\widehat{E}(\mathrm{M}) = \mathbf{1}$,

(iii) $\widehat{E}\big(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n\big)\,\psi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \widehat{E}(\mathrm{A}_n)\,\psi$ für jede abzählbare Familie disjunkter Mengen $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{S}$ und alle $\psi \in \mathcal{H}$.

Spektralmaße, die auf den Borelmengen über $\mathbb{R}$ definiert sind, nennt man reelle Spektralmaße, solche, die auf den Borelmengen über $\mathbb{C}$ definiert sind, komplexe Spektralmaße. Das sind jedoch nur Spezialfälle; Spektralmaße können auf beliebigen σ-Algebren über beliebigen Mengen definiert werden.

Da Spektralmaße projektorwertige Abbildungen und daher auf Vektoren anwendbar sind, kann man auch hier weitere Maße analog zu (4.46) definieren. Wir erhalten auf diese Weise zu einem Spektralmaß $\widehat{E}$ für beliebige $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ vektor-, komplex- und reellwertige Maße der Form

$$\mu_\psi := \widehat{E}\,\psi,$$

$$\mu_{\varphi,\psi} := (\widehat{E}\,\varphi, \psi),$$

$$|\mu_{\varphi,\psi}| := |(\widehat{E}\,\varphi, \psi)|$$

und

$$\mu_{\psi,\psi} := (\widehat{E}\,\psi, \psi) = \|\,\widehat{E}\,\psi\,\|^2.$$

Diese lassen sich über ihre Träger in naheliegender Weise zueinander in Beziehung setzen.

4.115 Lemma: *Es seien* M *eine Menge,* $\mathcal{H}$ *ein Hilbertraum,* $\widehat{E}$ *ein Spektralmaß auf* M *mit Werten in* $\mathscr{P}(\mathcal{H})$ *und* $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$*. Dann gilt*

(i) $\operatorname{supp} \mu_{\psi,\varphi} \subset \operatorname{supp} |\mu_{\psi,\varphi}| \subset \operatorname{supp} \widehat{E}$;

(ii) $\operatorname{supp} \mu_\psi \subset \operatorname{supp} \widehat{E}$.

Beweis: (i) Ist $x \in \mathrm{M} \setminus \operatorname{supp} \widehat{E}$, dann gibt es eine offene Teilmenge X von M mit $x \in \mathrm{X}$ und $\widehat{E}(\mathrm{X}) = 0$. Für alle $\mathrm{B} \in \mathfrak{B}(\mathrm{M})$ mit $\mathrm{B} \subset \mathrm{X}$ ist damit ebenfalls $\widehat{E}(\mathrm{B}) = 0$, und es folgt

$$\begin{aligned} \mu_{\psi,\varphi}(\mathrm{B}) &= \int_{\mathrm{B}} d\mu_{\psi,\varphi} = \int_{\mathrm{X}} \chi_{\mathrm{B}}\, d\mu_{\psi,\varphi} \\ &= \int_{\mathrm{X}} \chi_{\mathrm{B}}\, d\,(\widehat{E}\,\psi, \varphi) = \Big(\psi, \int_{\mathrm{X}} \chi_{\mathrm{B}}\, d\widehat{E}\,\varphi\Big) = (\psi, \widehat{E}(\mathrm{B})\,\varphi) = 0. \end{aligned}$$

Wegen $|\mu_{\psi,\varphi}|(\mathsf{X}) = 0$ gilt $x \in \mathsf{M} \setminus \operatorname{supp} |\mu_{\psi,\varphi}|$ und damit $\operatorname{supp} |\mu_{\psi,\varphi}| \subset \operatorname{supp} \widehat{E}$. Da außerdem $|\mu_{\psi,\varphi}|(\mathsf{Y}) \geqq |\mu_{\psi,\varphi}(\mathsf{Y})|$ für alle $\mathsf{Y} \in \mathfrak{B}(\mathsf{M})$, gilt auch $\operatorname{supp} \mu_{\psi,\varphi} \subset \operatorname{supp} |\mu_{\psi,\varphi}|$, also insgesamt $\operatorname{supp} \mu_{\psi,\varphi} \subset \operatorname{supp} |\mu_{\psi,\varphi}| \subset \operatorname{supp} \widehat{E}$.
(ii) Für $x \in \mathsf{M} \setminus \operatorname{supp} \widehat{E}$ gilt mit den gleichen Bezeichnungen wie und analog zu oben

$$\mu_\psi(\mathsf{B}) = (\psi, \widehat{E}(\mathsf{B})\,\psi) = 0$$

und damit $x \in \mathsf{M} \setminus \operatorname{supp} \mu_\psi$. Daraus folgt $\operatorname{supp} \mu_\psi \subset \operatorname{supp} \widehat{E}$. □

Auf der Basis der Spektralmaße können wir nun in der üblichen Weise[48] operatorwertige Integrale für in geeigneter Weise integrierbare Funktionen definieren. Dazu seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, M eine Menge mit einer σ-Algebra $\mathfrak{S}$ und $\widehat{E}$ ein Spektralmaß auf M mit Werten in $\mathscr{P}(\mathcal{H})$; außerdem sei $\mathscr{I}(\widehat{E}, \mathsf{M}, \mathbb{C})$ die Menge der $\widehat{E}$-einfachen komplexwertigen Funktionen auf der Menge M. Ist χ_{A} die charakteristische Funktion der Menge A und $\{\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots, \mathsf{M}_n\}$ eine disjunkte $\widehat{E}$-meßbare Zerlegung von M, so erhält man für $g = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j\, \chi_{\mathsf{M}_j} \in \mathscr{I}(\widehat{E}, \mathsf{M}, \mathbb{C})$ mit $\widehat{E}$ ein Integral gemäß der Definition

$$\int\limits_{\mathsf{M}} g\, d\widehat{E} := \sum_{j=1}^{n} c_j\, \widehat{E}(\mathsf{M}_j).$$

Eine Funktion $f : \mathsf{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *$\widehat{E}$-meßbar*, wenn $f^{-1}(\mathsf{B}) \in \mathfrak{S}$ gilt für jede Borelmenge $\mathsf{B} \in \mathfrak{P}(\mathbb{C})$. Zu jeder $\widehat{E}$-meßbaren Funktion f gibt es eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{I}(\widehat{E}, \mathsf{M}, \mathbb{C})$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} |\, f(x) - g_n(x)\,| = 0$ für $\widehat{E}$-fast alle $x \in \mathsf{M}$. Wir formulieren damit die folgende, naheliegende

4.116 Definition $\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum, M eine Menge und $\widehat{E}$ ein Spektralmaß M mit Werten in $\mathscr{P}(\mathcal{H})$. Eine Funktion $f : \mathsf{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *$\widehat{E}$-integrierbar*, wenn sie $\widehat{E}$-meßbar ist und es für jede f approximierende Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{I}(\widehat{E}, \mathsf{M}, \mathbb{C})$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ gibt, sodaß

$$\int\limits_{\mathsf{M}} |\, g_m - g_n\,|\, d\widehat{E} < \varepsilon$$

gilt für alle $m, n \geqq N(\varepsilon)$. In diesem Fall heißt der Grenzwert

$$\int\limits_{\mathsf{M}} f\, d\widehat{E} := \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathsf{M}} g_n\, d\widehat{E}$$

Integral von f über M.

Solche Integrale nennt man *Spektralintegrale*. Sie stellen eine Verallgemeinerung der in den vorangehenden Abschnitten mit Hilfe von Spektralscharen definierten Integrale dar. Auch für

[48] Siehe Abschnitt 1.2.2.

sie gilt konstruktionsbedingt für alle $\psi \in \operatorname{dom} \int\limits_{\mathrm{M}} f \, d\widehat{E}$

$$\left\| \int\limits_{\mathrm{M}} f(\lambda) \, d\widehat{E} \, \psi \right\|^2 = \int\limits_{\mathrm{M}} |f(\lambda)|^2 \, d \, \|\widehat{E} \, \psi \, \|^2.$$

das liefert in Analogie zu Satz 4.101 das folgende Resultat.

4.117 Satz: *Es seien* M *eine Menge,* $\mathcal{H}$ *ein Hilbertraum,* $\widehat{E} : \mathrm{M} \longrightarrow \mathscr{P}(\mathcal{H})$ *ein Spektralmaß und* f *eine* $\widehat{E}$*-meßbare Funktion. Dann existiert das Integral* $\int\limits_{\mathrm{M}} f(\lambda) \, d\widehat{E}$ *genau dann, wenn* $\psi \in \left\{ \varphi \in \mathcal{H} \;\middle|\; \int\limits_{\mathrm{M}} |f(\lambda)|^2 \, d \, \| \, \widehat{E} \, \varphi \, \|^2 < \infty \right\}$ *gilt.*

Damit können wir Satz 4.102 zu einer Version für Spektralintegrale umformulieren, und zwar, da wir hier nicht mehr auf die für Spektralscharen wesentliche Anordnung derselben angewiesen sind, gleich für sehr allgemeine Spektralmaße [260].

4.118 Satz: M *sei eine beliebige Menge und* $\mathfrak{S}$ *eine* σ*-Algebra auf* M, *außerdem seien* $\mathcal{H}$ *ein komplexer Hilbertraum und* $\widehat{E}$ *ein Spektralmaß auf* $\mathcal{H}$*. Dann gilt für jede* $\widehat{E}$*-meßbare Funktion* $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ *folgendes.*

(i) Durch $\widehat{F}_f := \int\limits_{\mathrm{M}} f(\lambda) \, d\widehat{E}$ *wird ein abgeschlossener Operator auf* $\mathcal{H}$ *definiert;*

(ii) $\operatorname{dom} \widehat{F}_f = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \;\middle|\; \int\limits_{\mathrm{M}} |f(\lambda)|^2 \, d \, \| \, \widehat{E} \, \psi \, \|^2 < \infty \right\}$;

(iii) $\widehat{F}_f^* = \widehat{F}_{\overline{f}} = \int\limits_{\mathrm{M}} \overline{f(\lambda)} \, d\widehat{E}$;

(iv) $\operatorname{dom} \widehat{F}_f = \operatorname{dom} \widehat{F}_f^*$;

(v) ist f *reellwertig, dann ist* $\widehat{F}_f$ *selbstadjungiert;*

(vi) gilt $f(\lambda) \geqq 0$ *für alle* $\lambda \in \mathrm{M}$*, dann ist* $\widehat{F}_f$ *positiv definit;*

(vii) ist f *fast überall beschränkt, dann ist* $\widehat{F}_f$ *beschränkt;*

(viii) sind f *und* g *zwei* $\widehat{E}$*-meßbare Funktionen, dann gilt* $\widehat{F}_f \, \widehat{F}_g = \widehat{F}_{fg}$.

Beweis: (i) Die Linearität von $\widehat{F}_f$ folgt unmittelbar aus Definition 4.116. Wir schreiben nun $\mathcal{A} = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \;\middle|\; \int\limits_{\mathrm{M}} |f(\lambda)|^2 \, d \, \| \, \widehat{E} \, \psi \, \|^2 < \infty \right\}$ und betrachten eine Folge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} \psi_n = \psi \in \mathcal{H}$ sowie den Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} \widehat{F}_f \, \psi_n =: \varphi$. Außerdem definieren wir eine Folge von Mengen $(\mathrm{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{S}$ durch $\mathrm{A}_n = \{ \lambda \in \mathrm{M} \mid |f(\lambda)| < n \}$ sowie eine Folge $(\widehat{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$

beschränkter Operatoren auf $\mathcal{H}$ durch $\widehat{T}_n = \int\limits_{\mathrm{M}} \chi_{\mathrm{A}_n}(\lambda)\, f(\lambda)\, d\widehat{E}$. Ist $(\widehat{P}_{\mathrm{A}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der orthogonalen Projektionen auf die A_n, dann gilt

$$\widehat{T}_n\,\psi = \lim_{n\to\infty} \widehat{P}_{\mathrm{A}_n}\,\widehat{T}\,\psi_n = \widehat{P}_{\mathrm{A}_n}\,\varphi,$$

damit

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{T}_n\,\psi = \varphi$$

und weiter

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathrm{M}} \chi_{\mathrm{A}_n}(\lambda)\,|f(\lambda)|^2\, d\,\|\,\widehat{E}\,\psi\,\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|\,\widehat{T}_n\,\psi\,\|^2 = \|\varphi\|^2.$$

Nach Satz 1.23 ist daher $f \in \mathscr{L}^2(\mathrm{M}, \mu_\psi)$, also gilt $\psi \in \mathcal{A}$ und somit $\widehat{F}_f\,\psi = \varphi$. Folglich ist $\widehat{F}_f$ abgeschlossen.

(ii) Folgt aus Satz 4.117.

(iii) Es seien $\psi \in \mathrm{dom}\,\widehat{F}_f$ und $\varphi \in \mathrm{dom}\,\widehat{F}_{\overline{f}}$, außerdem sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge fast überall beschränkter Funktionen aus $\mathscr{L}^2(\mathrm{M}, \mu_\psi)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Wählt man zu jedem f_n eine Folge $(h_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen der Form $h_{n,m} = \sum\limits_{j=0}^{N_{n,m}} c_{j,n,m}\,\chi_{\mathrm{Z}_{j,n,m}}$ mit geeigneten Zerlegungen von M, sodaß $\lim\limits_{m\to\infty} h_{n,m} = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
(\varphi, \widehat{F}_f\,\psi) &= \Bigl(\varphi, \int\limits_{\mathrm{M}} f(\lambda)\, d\widehat{E}\,\psi\Bigr) = \lim_{n\to\infty}\Bigl(\varphi, \int\limits_{\mathrm{M}} f_n(\lambda)\, d\widehat{E}\,\psi\Bigr)\\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Bigl(\varphi, \int\limits_{\mathrm{M}} h_{n,m}(\lambda)\, d\widehat{E}\,\psi\Bigr)\\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{N_{n,m}} (\varphi, c_{j,n,m}\,\chi_{\mathrm{Z}_{j,n,m}}(\lambda)\,\widehat{E}(\mathrm{Z}_{j,n,m})\,\psi)\\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{N_{n,m}} (\overline{c}_{j,n,m}\,\chi_{\mathrm{Z}_{j,n,m}}(\lambda)\,\widehat{E}(\mathrm{Z}_{j,n,m})\,\varphi, \psi) = (\widehat{F}_{\overline{f}}\,\varphi, \psi)
\end{aligned}$$

und damit $\widehat{F}_{\overline{f}} \subset \widehat{F}_f^*$. Sind umgekehrt $(\widehat{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\widehat{P}_{\mathrm{A}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben definiert und ist $\psi \in \mathrm{dom}\,\widehat{F}_f^*$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|\,\widehat{T}_n^*\,\psi\,\|^2 = (\psi, \widehat{T}_n\,\widehat{T}_n^*\,\psi) = (\psi, \widehat{T}\,\widehat{P}_{\mathrm{A}_n}\,\widehat{T}_n^*\,\psi) = (\psi, \widehat{T}\,\widehat{T}_n^*\,\psi) = (\widehat{T}^*\,\psi, \widehat{T}_n^*\,\psi),$$

also nach Ungleichung 2.142

$$\|\,\widehat{T}_n^*\,\psi\,\|^2 \leqq \|\,\widehat{T}^*\,\psi\,\|\,\|\,\widehat{T}_n^*\,\psi\,\|$$

und damit

$$\|\,\widehat{T}_n^*\,\psi\,\| \leqq \|\,\widehat{T}^*\,\psi\,\|.$$

Daraus folgt wiederum

$$\left\| \int_{\mathrm{M}} \chi_{\mathrm{A}_n}(\lambda)\, \overline{f(\lambda)}\, d\widehat{E}\, \psi \right\|^2 = \int_{\mathrm{M}} \chi_{\mathrm{A}_n}(\lambda)\, |\overline{f(\lambda)}|^2\, d\, \| \widehat{E}\, \psi \|^2 \leqq \| \widehat{T}^* \psi \|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; nach Satz 1.23 gilt somit $\int_{\mathrm{M}} |f(\lambda)|^2\, d\, \| \widehat{E}\, \psi \|^2 < \infty$, also $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{F}_{\overline{f}}$. Das liefert $\operatorname{dom} \widehat{F}_f^* \subset \operatorname{dom} \widehat{F}_{\overline{f}}$ und damit $\widehat{F}_f^* \subset \widehat{F}_{\overline{f}}$.

(iv) Folgt aus (ii).

(v) Folgt aus (i), (iii) und (iv).

(vi) Gilt $f(\lambda) \geqq 0$ für alle $\lambda \in \mathrm{M}$, dann folgt mit den Bezeichnungen von oben $c_{j,n,m} \geqq 0$ für alle $j = 0, 1, \ldots, N_{n,m}$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$ und damit für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{F}_f$

$$(\widehat{F}_f\, \psi, \psi) = \left(\int_{\mathrm{M}} f(\lambda)\, d\widehat{E}\, \psi, \psi \right) = \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} \sum_{j=0}^{N_{n,m}} (c_{j,n,m}\, \chi_{\mathrm{Z}_{j,n,m}}(\lambda)\, \widehat{E}(\mathrm{Z}_{j,n,m})\, \psi, \psi)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} \sum_{j=1}^{N_{n,m}} c_{j,n,m}\, \chi_{\mathrm{Z}_{j,n,m}}(\lambda)\, \| \widehat{E}(\mathrm{Z}_{j,n,m})\, \psi \|^2 \geqq 0.$$

(vii) Für alle $\psi \in \mathcal{H}$ gilt $\mu_\psi(\mathrm{M}) = \int_{\mathrm{M}} d\, \| \widehat{E}\, \psi \|^2 = \| \widehat{E}(\mathrm{M})\, \psi \|^2 = \|\psi\|^2 < \infty$. Ist f fast überall beschränkt, dann gilt folglich $f \in \mathscr{L}^2(\mathrm{M}, \mu_\psi)$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$, also ist $\operatorname{dom} \widehat{F}_f = \mathcal{H}$, und nach Corollar 2.38 ist $\widehat{F}_f$ beschränkt.

(viii) Wir wählen zu f und g zwei Folgen $(h_n^{(f)})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(h_m^{(g)})_{\in \mathbb{N}}$ einfacher Funktionen der Form $h_n^{(f)} = \sum_{i=0}^{N_n^{(f)}} c_{i,n}^{(f)}\, \chi_{\mathrm{Z}_{i,n}^{(f)}}$ beziehungsweise $h_m^{(g)} = \sum_{j=0}^{N_m^{(g)}} c_{j,m}^{(g)}\, \chi_{\mathrm{Z}_{j,m}^{(g)}}$, jeweils mit geeigneten Zerlegungen von M, sodaß $\lim_{n \to \infty} h_n^{(f)} = f$ und $\lim_{m \to \infty} h_m^{(g)} = g$; außerdem sei $(\mathrm{Z}_q)_{0 \leqq q \leqq N}$ die Familie der Zerlegungen von M, die in der Form $\mathrm{Z}_q = \mathrm{Z}_{i,n}^{(f)} \cap \mathrm{Z}_{j,m}^{(g)}$ geschrieben werden können mit $0 \leqq i \leqq N_n^{(f)}$ und $0 \leqq i \leqq N_m^{(f)}$. Dann gilt für alle $\psi \in \operatorname{ran} \widehat{F}_g \cap \operatorname{dom} \widehat{F}_g \cap \operatorname{dom} \widehat{F}_f$ mit geeignet gewählten Koeffizienten $c_q^{(f)}$ und $c_q^{(g)}$ genau wie im Beweis von Satz 4.102 (viii)

$$\widehat{F}_f\, \widehat{F}_g\, \psi = \left[\int_{\mathrm{M}} f(\lambda)\, d\widehat{E} \right] \left[\int_{\mathrm{M}} g(\lambda)\, d\widehat{E}\, \psi \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} \left[\sum_{i=0}^{N_n^{(f)}} c_{i,n}^{(f)}\, \chi_{\mathrm{Z}_{i,n}^{(f)}}(\lambda)\, \widehat{E}(\mathrm{Z}_{i,n}^{(f)}) \right] \left[\sum_{j=0}^{N_m^{(g)}} c_{j,m}^{(g)}\, \chi_{\mathrm{Z}_{j,m}^{(g)}}(\lambda)\, \widehat{E}(\mathrm{Z}_{j,m}^{(g)})\, \psi \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} \sum_{q=0}^{N} c_q^{(f)}\, c_q^{(g)}\, \chi_{\mathrm{Z}_q}(\lambda)\, \widehat{E}(\mathrm{Z}_q)\, \psi = \int_{\mathrm{M}} f(\lambda)\, g(\lambda)\, \widehat{E}\, \psi = \widehat{F}_{fg}\, \psi. \qquad \square$$

Für $\widehat{E}$-meßbare Funktionen und Operatoren der Form $\widehat{F}_f$ können wir nun wie bei den Spektralscharen Integrale der Form

$$\widehat{F}_f\,\psi = \int_{\mathsf{M}} f(\lambda)\,d\widehat{E}\,\psi,$$

$$(\psi, \widehat{F}_f\,\varphi) = \int_{\mathsf{M}} f(\lambda)\,d\,(\psi, \widehat{E}\,\varphi)$$

oder auch

$$(\psi, \widehat{F}_f\,\psi) = \int_{\mathsf{M}} f(\lambda)\,d\,(\psi, \widehat{E}\,\psi) = \int_{\mathsf{M}} f(\lambda)\,d\,\|\widehat{E}\,\varphi\|^2$$

definieren, wovon wir ausgiebig Gebrauch machen werden.

Um nun den Zusammenhang zwischen Spektralscharen und Spektralmaßen nicht nur über Analogien, sondern auch direkt sichtbar werden zu lassen, wählen wir speziell als Menge M die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und als σ-Algebra $\mathfrak{S}$ die Menge $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ der Borelmengen über $\mathbb{R}$. Ist nun $\{\,\widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty\,\}$ eine Spektralschar, so können wir diese in naheliegender Weise zu einem Spektralmaß E ausbauen. Das funktioniert in völliger Analogie zur Konstruktion des Lebesgue-Maßes[49]. Für gewöhnliche Intervalle setzt man

$$\widehat{E}((\lambda, \mu)) = \widehat{E}_\mu - \widehat{E}_\lambda,$$

für abzählbare Vereinigungen aus paarweise disjunkten offenen Intervallen

$$\widehat{E}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(\lambda_j, \mu_j)\right) = \sum_{j=1}^{\infty}(\widehat{E}_{\mu_j} - \widehat{E}_{\lambda_j})$$

und für beliebige Mengen $\mathsf{B} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

$$\widehat{E}(\mathsf{B}) = \inf\{\,\widehat{E}(\mathsf{B}) \mid \mathsf{A} \subset \mathbb{R} \text{ offen},\ \mathsf{B} \subset \mathsf{A}\,\}.$$

Die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) aus Definition 4.114 sind dabei aufgrund der Konstruktion automatisch erfüllt. Wir können damit Satz 4.107 neu formulieren.

4.119 Spektralsatz:[50] *Für jeden selbstadjungierten Operator $\widehat{A}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes reelles Spektralmaß $\widehat{E}$, sodaß $\widehat{A}$ darstellbar ist in der Form*

$$\widehat{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\,d\widehat{E}; \tag{4.61}$$

umgekehrt ist für jedes reelle Spektralmaß $\widehat{E}$ der durch (4.61) definierte Operator selbstadjungiert.

[49] Siehe Abschnitt 1.2.1.

[50] In dieser Form wurde der Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren erstmals von Halmos formuliert [135].

Auch hier nennt man (4.61) Spektraldarstellung von $\widehat{A}$; wieder erhält man

$$\operatorname{dom}\widehat{A} = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d\,\|\widehat{E}\,\psi\|^2 < \infty \right\}.$$

Aus Satz 4.108 wird nun das folgende Resultat.

4.120 Stonesche Formel: *$\widehat{A}$ sei ein beliebiger selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum, $\widehat{E}$ das zugehörige Spektralmaß, $a, b \in [-\infty, \infty]$ mit $a < b$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\widehat{E}([a,b]) + \widehat{E}((a,b)) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi i} \int_a^b \left[(\widehat{A} - t - i\,\varepsilon)^{-1} - (\widehat{A} - t + i\,\varepsilon)^{-1} \right] dt.$$

Ergänzend erwähnen wir ein Resultat für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren, das für deren beschränkte Verwandte unmittelbar aus Satz 4.44 folgt.

4.121 Satz: *Ein selbstadjungierter Operator $\widehat{A}$ auf einem komplexen Hilbertraum ist genau dann positiv definit, wenn $\sigma(\widehat{A}) \subset \mathbb{R}_0^+$ gilt.*

Beweis: „$\Longrightarrow$": $\widehat{A}$ sei selbstadjungiert und positiv definit und $\widehat{E}$ sei das eindeutig definierte Spektralmaß von $\widehat{A}$. Dann gilt

$$\int_{\sigma(\widehat{A})} \lambda \, d\,(\psi, \widehat{E}\,\psi) \geqq 0 \tag{4.62}$$

für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$. Wegen $(\psi, \widehat{E}\,\psi) \geqq 0$ folgt $\lambda \geqq 0$ für alle $\lambda \in \sigma(\widehat{A})$.
„$\Longleftarrow$": Aus $\sigma(\widehat{A}) \subset \mathbb{R}_0^+$ folgt (4.62) und damit $(\psi, \widehat{A}\,\psi) \geqq 0$ für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$. □

Den in diesem Abschnitt beschriebenen Formalismus verwenden wir nun, um den Spektralsatz weiter zu verallgemeinern.

4.4.2.5 Spektralzerlegung unbeschränkter normaler Operatoren

Satz 4.107 läßt sich mit nur geringen Änderungen von unbeschränkten selbstadjungierten auf unbeschränkte normale Operatoren erweitern; auch hier ist die Beschränkung auf erstere ein im wesentlichen technisches Detail, das insbesondere mit Blick auf die Quantenmechanik von Interesse ist. Wir erhalten damit den allgemeinsten aller Spektralsätze, der alle anderen als Spezialfälle beinhaltet.

Wir beweisen zunächst eine Reihe von Hilfssätzen; beim ersten geht es um das Adjungieren inverser Operatoren.

4.122 Lemma: *Ist $\widehat{A}$ ein linearer Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und existiert $\widehat{A}^{-1}$, dann gilt $(\widehat{A}^*)^{-1} = (\widehat{A}^{-1})^*$.*

Beweis: [51] Wir betrachten wie im Beweis von Lemma 4.104 den Hilbertraum $\mathscr{H} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ mit dem Skalarprodukt $\langle \{\psi, \chi\}, \{\varphi, \xi\} \rangle = (\psi, \varphi) + (\chi, \xi)$. Auf diesem seien die Operatoren $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ definiert durch $\mathbf{B}\{\psi, \varphi\} = \{\varphi, \psi\}$ beziehungsweise $\mathbf{C}\{\psi, \varphi\} = \{\varphi, -\psi\}$ für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$. Dann ist $\Gamma(\widehat{A}^*)$ das orthogonale Komplement des Abschlusses von $\mathbf{C}\,\Gamma(\widehat{A})$; außerdem gilt

$$\Gamma(\widehat{A}^{-1}) = \mathbf{B}\,\Gamma(\widehat{A}) \tag{4.63}$$

sowie

$$\mathbf{B}\,\mathbf{C} = -\mathbf{C}\,\mathbf{B}, \quad \mathbf{B}^2 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{C}^2 = -\mathbf{1}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\Gamma((\widehat{A}^{-1})^*) &= \mathscr{H} \ominus \mathbf{C}\,\Gamma(\widehat{A}^{-1}) = \mathscr{H} \ominus \mathbf{C}\,\mathbf{B}\,\Gamma(\widehat{A}) \\ &= \mathscr{H} \ominus \mathbf{B}\,\mathbf{C}\,\Gamma(\widehat{A}) = \mathbf{B}\,[\,\mathscr{H} \ominus \mathbf{C}\,\Gamma(\widehat{A})\,] = \mathbf{B}\,\Gamma(\widehat{A}^*),\end{aligned}$$

und mit (4.63) erhält man unmittelbar die Behauptung. □

Aus Lemma 4.122 folgt, daß die Inverse eines selbstadjungierten Operators – sofern sie existiert – ebenfalls selbstadjungiert ist.

Der zweite Hilfssatz macht eine Aussage über die Graphen spezieller Einschränkungen abgeschlossener Operatoren [79].

4.123 Lemma: *$\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum und $\widehat{A}$ ein abgeschlossener Operator auf $\mathcal{H}$. Dann gilt $\Gamma(\widehat{A} \restriction \mathrm{dom}\,\widehat{A}^*\widehat{A}) = \Gamma(\widehat{A})$.*

Beweis: Auf $\mathrm{dom}\,\widehat{A}$ ist durch $\langle\!\langle \psi, \varphi \rangle\!\rangle = (\psi, \varphi) + (\widehat{A}\psi, \widehat{A}\varphi)$ ein Skalarprodukt definiert, und da $\widehat{A}$ abgeschlossen ist, wird $\mathrm{dom}\,\widehat{A}$ mit $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ zu einem Hilbertraum. Für jedes $\varphi \in \mathrm{dom}\,\widehat{A}$ wird durch $f(\psi) = (\psi, \varphi)$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{H}$ definiert. Nach Satz 2.146 gibt es daher zu jedem $\varphi \in \mathrm{dom}\,\widehat{A}$ genau ein $\chi_\varphi \in \mathcal{H}$ mit $(\psi, \varphi) = \langle\!\langle \psi, \chi_\varphi \rangle\!\rangle$, das heißt, durch $\widehat{C}_0\,\varphi = \chi_\varphi$ wird ein linearer Operator $\widehat{C}_0 : \mathrm{dom}\,\widehat{A} \longrightarrow \mathrm{dom}\,\widehat{A}$ definiert. Dieser ist nach Corollar 2.143 stetig und nach Lemma 2.27 somit gleichmäßig stetig auf ganz $\mathrm{dom}\,\widehat{A}$, folglich gibt es nach Satz 1.12 genau einen Operator $\widehat{C} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathrm{dom}\,\widehat{A}$ mit $\widehat{C} \restriction \mathrm{dom}\,\widehat{A} = \widehat{C}_0$, der gleichmäßig stetig auf ganz $\mathcal{H}$ ist. Damit gilt außerdem $\langle\!\langle \widehat{C}\,\psi, \varphi \rangle\!\rangle = (\psi, \varphi)$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$ und $\varphi \in \mathrm{dom}\,\widehat{A}$. Wegen $(\psi, \chi_\varphi) = \overline{(\chi_\varphi, \psi)}$ ist $\widehat{C}$ außerdem symmetrisch. Nun sei $\langle\ ,\ \rangle$ das im Beweis von Lemma 4.104 definierte Skalarprodukt auf $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Ist $\mathcal{U}$ das orthogonale Komplement von $\Gamma(\widehat{A} \restriction \mathrm{dom}\,\widehat{A}^*\widehat{A})$ in $\Gamma(\widehat{A})$ bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$, dann gilt $\{\psi, \widehat{A}\,\psi\} \in \mathcal{U}$ genau dann, wenn $\langle \{\psi, \widehat{A}\,\psi\}, \{\varphi, \widehat{A}\,\varphi\} \rangle = \langle\!\langle \psi, \varphi \rangle\!\rangle = 0$ gilt für alle $\varphi \in \mathrm{dom}\,\widehat{A}^*\widehat{A}$, und wegen $\mathrm{ran}\,\widehat{C} = \mathrm{dom}\,\widehat{A}^*\widehat{A}$ folgt daraus $\langle\!\langle \psi, \widehat{C}\,\xi \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \widehat{C}\,\psi, \xi \rangle\!\rangle = 0$ für alle $\xi \in \mathcal{H}$. Das wiederum führt auf $(\psi, \xi) = 0$ für alle $\xi \in \mathcal{H}$ und damit auf $\psi = 0$, das heißt, $\mathcal{U} = \{0\}$. Daraus folgt die Behauptung. □

[51] Auch hier stammt die Beweisidee von J. von Neumann [271].

Der dritte Hilfssatz verallgemeinert Lemma 4.75 für den Spezialfall $n = 2$ auf unbeschränkte Operatoren [31][52].

4.124 Lemma: *$\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum. Dann gibt es zu jedem selbstadjungierten positiv definiten Operator $\widehat{A}$ auf $\mathcal{H}$ genau einen selbstadjungierten positiv definiten Operator $\widehat{B}$ mit $\widehat{A} = \widehat{B}^{\,2}$.*

Beweis: 1. Wir konstruieren zunächst den gesuchten Operator als Grenzwert einer geeigneten Operatorfolge. Zu $\lambda > 0$ setzen wir $\widehat{S}_\lambda = (\lambda + \widehat{A})^{-1}$. Nach Lemma 4.104 ist $\widehat{S}_\lambda$ ein beschränkter positiv definiter symmetrischer Operator auf $\mathcal{H}$. Nach Lemma 4.75 gibt es daher genau einen beschränkten positiv definiten Operator $\widehat{T}_\lambda$ mit $\widehat{T}_\lambda^2 = \widehat{S}_\lambda$. Nach Satz 3.2 ist $\widehat{T}_\lambda$ symmetrisch. Aus

$$\psi = \widehat{S}_\lambda^{-1}\,\widehat{S}_\lambda\psi = (\lambda + \widehat{A})\,\widehat{T}_\lambda^2\,\psi$$

folgt $\ker \widehat{T}_\lambda = \{0\}$, und somit existiert der Operator $\widehat{B}_\lambda := \widehat{T}_\lambda^{-1}$. Nach Voraussetzung ist $\operatorname{dom}(\lambda + \widehat{A})$ dicht in $\mathcal{H}$, wegen $\operatorname{dom}\widehat{B}_\lambda = \operatorname{ran}\widehat{T}_\lambda$ ist es daher auch $\operatorname{dom}\widehat{B}_\lambda$, das heißt, $\widehat{B}_\lambda$ ist dicht definiert. Weiter gilt

$$\widehat{B}_\lambda^* = (\widehat{T}_\lambda^{-1})^* = (\widehat{T}_\lambda^*)^{-1} = \widehat{T}_\lambda^{-1} = \widehat{B}_\lambda,$$

also ist $\widehat{B}_\lambda$ selbstadjungiert. Außerdem sei $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{B}_\lambda$ beliebig und $\varphi = \widehat{B}_\lambda\psi$, dann gilt

$$(\widehat{B}_\lambda\psi, \psi) = (\widehat{B}_\lambda\widehat{T}_\lambda\varphi, \widehat{T}_\lambda\varphi) = (\varphi, \widehat{T}_\lambda\varphi) \geqq 0.$$

Folglich ist $\widehat{B}_\lambda$ positiv definit. Weiter gilt für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$

$$\begin{aligned}\|\,(\lambda + \widehat{A})\,\psi\,\|^2 &= ((\lambda + \widehat{A})\,\psi, (\lambda + \widehat{A})\,\psi) \\ &= \lambda^2\,\|\psi\|^2 + 2\,\lambda\,(\psi, \widehat{A}\,\psi) + \|\widehat{A}\,\psi\|^2 \geqq \lambda^2\,\|\psi\|^2;\end{aligned}$$

daraus folgt

$$\|\,\lambda\widehat{T}_\lambda^2\,\| = \lambda\,\|\,(\lambda + \widehat{A})^{-1}\,\| \leqq 1 \tag{4.64}$$

und weiter

$$\|\,\widehat{A}\,\widehat{T}_\lambda^2\,\| = \|\,1 - \lambda\widehat{T}_\lambda^2\,\| \leqq 1,$$

das heißt, $\widehat{A}\,\widehat{T}_\lambda^2$ ist beschränkt. Für alle $\gamma > 0$ ist daher $(\gamma + \widehat{A})\,\widehat{T}_\lambda^2$ beschränkt und positiv definit, nach Lemma 4.75 gibt es somit den Operator $[\,(\gamma + \widehat{A})\,\widehat{T}_\lambda^2\,]^{1/2}$, und mit $\widehat{T}_\lambda^2 = \widehat{T}_\gamma{}^2\,(\gamma + \widehat{A})\,\widehat{T}_\lambda^2$ folgt

$$\widehat{T}_\lambda = \widehat{T}_\gamma\,[\,(\gamma + \widehat{A})\,\widehat{T}_\lambda^2\,]^{1/2}. \tag{4.65}$$

Analog erhält man

$$\widehat{T}_\gamma = \widehat{T}_\lambda\,[\,(\lambda + \widehat{A})\,\widehat{T}_\gamma^2\,]^{1/2}. \tag{4.66}$$

[52] S. J. Bernau, der Autor dieser Arbeit, erwähnt dabei wiederholt und ausdrücklich den Gutachter derselben, der an einigen Stellen raffinierte Ideen zur Vereinfachung der Druckfassung beigesteuert hat.

(4.65) und (4.66) zusammen liefern $\operatorname{ran}\widehat{T}_\gamma = \operatorname{ran}\widehat{T}_\lambda$ und damit $\operatorname{dom}\widehat{B}_\gamma = \operatorname{dom}\widehat{B}_\lambda$ sowie $\operatorname{dom}\widehat{B}_\gamma\widehat{B}_\lambda = \operatorname{dom}\widehat{B}_\lambda\widehat{B}_\gamma$ für alle $\gamma, \lambda > 0$. Mit $\widehat{T}_\gamma\widehat{T}_\lambda = \widehat{T}_\lambda\widehat{T}_\gamma$ folgt $\widehat{B}_\gamma\widehat{B}_\lambda = \widehat{B}_\lambda\widehat{B}_\gamma$. Für $\lambda > 0$ ist $\lambda + \widehat{A}$ positiv definit, nach Lemma 4.75 ist $(\lambda + \widehat{A})^{1/2}$ folglich ein wohldefinierter beschränkter positiv definiter Operator. Damit gilt $\widehat{B}_\lambda^2 = \lambda + \widehat{A}$ sowie $\operatorname{dom}\widehat{B}_\lambda^2 = \operatorname{dom}\widehat{A}$ für alle $\lambda > 0$. Ist $0 < \gamma < \lambda$, dann gilt

$$\|(\gamma + \widehat{A})\widehat{T}_\lambda^2\| \leqq \|(\lambda + \widehat{A})\widehat{T}_\lambda^2\| = 1,$$

und mit (4.65) und (4.66) folgt $\|\widehat{T}_\lambda\| \leqq \|\widehat{T}_\gamma\|$. Damit erhält man für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$ mit $\varphi = \widehat{B}_\lambda\widehat{B}_\gamma$

$$\begin{aligned}(\widehat{B}_\gamma\widehat{B}_\lambda\psi, \psi) &= (\widehat{B}_\gamma\widehat{B}_\lambda\widehat{T}_\gamma\widehat{T}_\lambda\varphi, \widehat{T}_\gamma\widehat{T}_\lambda\varphi) = (\varphi, \widehat{T}_\gamma\widehat{T}_\lambda\varphi)\\ &\geqq (\varphi, \widehat{T}_\gamma^2\varphi) = (\widehat{T}_\lambda\varphi, \widehat{T}_\lambda\varphi) = (\widehat{B}_\gamma\widehat{T}_\gamma\widehat{T}_\lambda\varphi, \widehat{B}_\gamma\widehat{T}_\gamma\widehat{T}_\lambda\varphi) = (\widehat{B}_\gamma^2\psi, \psi),\end{aligned}$$

also gilt auch

$$\begin{aligned}\|\widehat{B}_\lambda\psi - \widehat{B}_\gamma\psi\|^2 &= (\widehat{B}_\lambda\psi - \widehat{B}_\gamma\psi, \widehat{B}_\lambda\psi - \widehat{B}_\gamma\psi)\\ &= (\widehat{B}_\lambda\psi, \widehat{B}_\lambda\psi) - (\widehat{B}_\lambda\psi, \widehat{B}_\gamma\psi) - (\widehat{B}_\gamma\psi, \widehat{B}_\lambda\psi) + (\widehat{B}_\gamma\psi, \widehat{B}_\gamma\psi)\\ &= (\widehat{B}_\lambda^2\psi, \psi) - 2(\widehat{B}_\gamma\widehat{B}_\lambda\psi, \psi) + (\widehat{B}_\gamma^2\psi, \psi)\\ &\leqq (\widehat{B}_\lambda^2\psi, \psi) - 2(\widehat{B}_\gamma^2\psi, \psi) + (\widehat{B}_\gamma^2\psi, \psi) = (\widehat{B}_\lambda^2\psi, \psi) - (\widehat{B}_\gamma^2\psi, \psi)\\ &= ((\lambda + \widehat{A})\psi, \psi) - ((\gamma + \widehat{A})\psi, \psi) = (\lambda\psi, \psi) - (\gamma\psi, \psi)\\ &= (\lambda - \gamma)\|\psi\|^2. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Nun sei $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{B}_1$. Nach Lemma 4.123 gibt es in $\operatorname{dom}\widehat{B}_\lambda^2$ eine Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n = \psi$ und daher auch $\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{B}_\lambda\psi_n = \widehat{B}_\lambda\psi$ gilt; mit (4.67) gilt

$$\begin{aligned}\|\widehat{B}_\gamma\psi_m - \widehat{B}_\gamma\psi_n\| &= \|\widehat{B}_\gamma\psi_m - \widehat{B}_\lambda\psi_m + \widehat{B}_\lambda\psi_m - \widehat{B}_\lambda\psi_n + \widehat{B}_\lambda\psi_n - \widehat{B}_\gamma\psi_n\|\\ &\leqq \|\widehat{B}_\lambda\psi_m - \widehat{B}_\lambda\psi_n\| + \|(\widehat{B}_\lambda - \widehat{B}_\gamma)(\psi_m - \psi_n)\|\\ &\leqq \|\widehat{B}_\lambda(\psi_m - \psi_n)\| + \sqrt{\lambda - \gamma}\,\|\psi_m - \psi_n\|\end{aligned}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und daher $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|\widehat{B}_\gamma\psi_m - \widehat{B}_\gamma\psi_n\| = 0$. Somit ist $(\widehat{B}_\gamma\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{B}_\gamma\psi_n = \widehat{B}_\gamma\psi$, wenn das für $\widehat{B}_\lambda$ mit $\lambda > \gamma$ der Fall ist. Zusammengenommen folgt

$$\|\widehat{B}_\gamma\psi - \widehat{B}_\lambda\psi\|^2 = \lim_{n\to\infty}\|\widehat{B}_\gamma\psi_n - \widehat{B}_\lambda\psi_n\|^2 \leqq \lim_{n\to\infty}(\gamma - \lambda)\|\psi_n\|^2 = (\gamma - \lambda)\|\psi\|^2$$

und damit

$$\lim_{\lambda\searrow 0}\|\widehat{B}_\gamma\psi - \widehat{B}_\lambda\psi\|^2 \leqq \gamma\|\psi\|^2, \tag{4.68}$$

das heißt, der Grenzwert $\lim\limits_{\lambda\searrow 0} \widehat{B}_\lambda\psi$ existiert. Damit definieren wir den Operator $\widehat{B}$ durch $\widehat{B}\,\psi = \lim\limits_{\lambda\searrow 0} \widehat{B}_\lambda\psi$ für $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{B}_1 = \operatorname{dom} \widehat{B}$.

2. Als nächstes zeigen wir, daß $\widehat{B}$ die gewünschten Eigenschaften aufweist. Zunächst gilt für alle $\psi, \varphi \in \operatorname{dom} \widehat{B}$

$$(\widehat{B}\,\psi, \varphi) = \lim_{\lambda\searrow 0} (\widehat{B}_\lambda\,\psi, \varphi) = \lim_{\lambda\searrow 0} (\psi, \widehat{B}_\lambda\,\varphi) = (\psi, \widehat{B}\,\varphi),$$

das heißt, $\widehat{B}$ ist symmetrisch. Ist $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ und $\lambda, \gamma > 0$, dann gilt $\lim\limits_{\lambda\searrow 0} \widehat{B}_\lambda \widehat{B}_\gamma \psi = \widehat{B}\,\widehat{B}_\gamma\psi$ und damit $\widehat{B}_\gamma \widehat{B}\,\psi = \widehat{B}\,\widehat{B}_\gamma\psi$, und es folgt

$$\begin{aligned}\|\,\widehat{A}\,\psi - \widehat{B}^{\,2}\,\psi\,\| &= \|-\gamma\,\psi + \widehat{B}_\gamma^{\,2}\,\psi - \widehat{B}\,\widehat{B}_\gamma\,\psi + \widehat{B}_\gamma\widehat{B}\,\psi - \widehat{B}^{\,2}\,\psi\,\| \\ &\leqq \gamma\,\|\psi\| + \|\,(\,\widehat{B}_\gamma - \widehat{B}\,)\,\widehat{B}_\gamma\,\psi\,\| + \|\,(\,\widehat{B}_\gamma - \widehat{B}\,)\,\widehat{B}\,\psi\,\|. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Gleichzeitig liefert (4.68)

$$\lim_{\lambda\searrow 0} \|\,(\,\widehat{B}_\gamma \,-\, \widehat{B}\,)\,\psi\,\|^2 \leqq \gamma\,\|\psi\|^2, \tag{4.70}$$

und (4.69) wird damit zu

$$\|\,\widehat{A}\,\psi - \widehat{B}^{\,2}\,\psi\,\| \leqq \gamma\,\|\psi\| + \sqrt{\gamma}\,\|\,\widehat{B}_\gamma\,\psi\,\| + \|\,\widehat{B}\,\psi\,\|.$$

Die rechte Seite verschwindet für $\gamma \searrow 0$, folglich ist $\widehat{A}\,\psi = \widehat{B}^{\,2}\,\psi$ für $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{B}$, das heißt, es gilt $\widehat{A} \subseteqq \widehat{B}^{\,2}$. Wegen $\operatorname{dom} \widehat{A} = \operatorname{dom} \widehat{B}^{\,2}$ folgt $\widehat{A} = \widehat{B}^{\,2}$.
Nun seien $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$, außerdem sei $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\operatorname{dom} \widehat{B}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = \psi$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{B}\,\psi_n = \varphi$. Für $\gamma > 0$ gilt dann mit (4.70)

$$\begin{aligned}\|\,\widehat{B}_\gamma\psi_m - \widehat{B}_\gamma\psi_n\,\| &= \|\,\widehat{B}_\gamma\psi_m - \widehat{B}\,\psi_m + \widehat{B}\,\psi_m - \widehat{B}\,\psi_n + \widehat{B}\,\psi_n - \widehat{B}_\gamma\psi_n\,\| \\ &\leqq \|\,\widehat{B}\,\psi_m - \widehat{B}\,\psi_n\,\| + \|\,(\,\widehat{B}_\gamma - \widehat{B}\,)\,(\,\psi_m - \psi_n\,)\,\| \\ &\leqq \|\,\widehat{B}\,(\,\psi_m - \psi_n\,)\,\| + \sqrt{\gamma}\,\|\,\psi_m - \psi_n\,\| \end{aligned}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$, also ist $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|\,\widehat{B}_\gamma\psi_m - \widehat{B}_\gamma\psi_n\,\| = 0$, und die Folge $(\widehat{B}_\gamma\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Da $\widehat{B}_\gamma$ abgeschlossen ist, gilt außerdem $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{B}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{B}_\gamma\psi_n = \widehat{B}_\gamma\psi$, und wiederum mit (4.70) folgt

$$\|\,\widehat{B}\,\psi - \varphi\,\| = \lim_{n\to\infty} \|\,\widehat{B}\,\psi - \widehat{B}\,\psi_n\,\| \leqq \lim_{n\to\infty} \big[\,\|\,\widehat{B}\,(\,\psi - \psi_n\,)\,\| + \sqrt{\gamma}\,\|\,\psi - \psi_n\,\|\,\big] = 0.$$

Daraus folgt $\widehat{B}\,\psi = \varphi$, das heißt, $\widehat{B}$ ist abgeschlossen. Da $\widehat{B}$ auch symmetrisch ist und außerdem $\widehat{B}^{\,2} = \widehat{A}$ gilt, gibt es nach Lemma 4.123 zu jedem $\chi \in \operatorname{dom} \widehat{B}^*$ eine Folge $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$

in dom $\widehat{B}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_n = \chi$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{B}^* \chi_n = \widehat{B}^* \chi$. Wegen dom $\widehat{B}^2 \subset$ dom $\widehat{B}$ gilt $\widehat{B}^* \chi_n = \widehat{B}\,\chi$ für allle $n \in \mathbb{N}$, und weil $\widehat{B}$ abgeschlossen ist, gilt $\chi \in$ dom $\widehat{B}$. Damit folgt

$$\widehat{B}\,\chi = \lim_{n\to\infty} \widehat{B}\,\chi_n = \lim_{n\to\infty} \widehat{B}^* \chi_n = \widehat{B}^* \chi,$$

das heißt, $\widehat{B}$ ist selbstadjungiert. Für alle $\psi \in$ dom $\widehat{B}$ gilt

$$(\widehat{B}\,\psi, \psi) = \lim_{\lambda \searrow 0} (\widehat{B}_\lambda \psi, \psi) \geqq 0,$$

also ist $\widehat{B}$ auch positiv definit.

3. Schließlich zeigen wir noch die Eindeutigkeit von $\widehat{B}$. Dazu sei $\widehat{C}$ ein weiterer selbstadjungierter positiv definiter Operator mit $\widehat{A} = \widehat{C}^2$. Dann gilt für alle $\psi \in$ dom $\widehat{A}$

$$\begin{aligned} \| (\widehat{B} - \widehat{C})\,\psi \|^2 &= ((\widehat{B} - \widehat{C})\,\psi, \widehat{B}\,\psi) - ((\widehat{B} - \widehat{C})\,\psi, \widehat{C}\,\psi) \\ &= (\widehat{B}\,(\widehat{B} - \widehat{C})\,\psi, \psi) - (\widehat{C}\,(\widehat{B} - \widehat{C})\,\psi, \psi) \end{aligned}$$

oder mit $\varphi = (\widehat{B} - \widehat{C})\,\psi$

$$\| (\widehat{B} - \widehat{C})\,\psi \|^2 = (\widehat{B}\,\varphi, \psi) - (\widehat{C}\,\varphi, \psi). \tag{4.71}$$

Außerdem ist $\widehat{A}\,\widehat{C} = \widehat{C}^3 = \widehat{C}\,\widehat{A}$, das heißt, $\widehat{A}$ und $\widehat{C}$ sind vertauschbar. Damit gilt nach Lemma 4.75 für alle $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \widehat{B}_\lambda \widehat{C} &= \widehat{B}_\lambda^2\, \widehat{B}_\lambda^{-1}\, \widehat{C} = (\lambda + \widehat{A})\, \widehat{B}_\lambda^{-1}\, \widehat{C} \\ &\subseteqq (\lambda + \widehat{A})\, \widehat{C}\, \widehat{B}_\lambda^{-1} = \widehat{C}\,(\lambda + \widehat{A})\, \widehat{B}_\lambda^{-1} = \widehat{C}\, \widehat{B}_\lambda^2\, \widehat{B}_\lambda^{-1} = \widehat{C}\, \widehat{B}_\lambda. \end{aligned}$$

Für $\psi \in$ dom $\widehat{C}$ folgt daraus

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \widehat{C}\, \widehat{B}_\lambda \psi = \lim_{\lambda \searrow 0} \widehat{B}_\lambda \widehat{C}\,\psi = \widehat{B}\,\widehat{C}\,\psi. \tag{4.72}$$

Da $\lim\limits_{\lambda \searrow 0} \widehat{B}_\lambda \psi = \widehat{B}\,\psi$ gilt und $\widehat{C}$ als abgeschlossen vorausgesetzt wird, gilt $\widehat{B}\,\psi \in$ dom $\widehat{C}$, und mit (4.72) folgt

$$\widehat{C}\,\widehat{B}\,\psi = \lim_{\lambda \searrow 0} \widehat{C}\, \widehat{B}_\lambda \psi = \widehat{B}\,\widehat{C}\,\psi,$$

das heißt, es gilt $\widehat{B}\,\widehat{C} \subseteqq \widehat{C}\,\widehat{B}$. Nun sei $\psi \in$ dom $\widehat{C}\,\widehat{B}$, dann gilt für alle $\lambda > 0$

$$\widehat{C}\,\widehat{B}\,\psi = \widehat{C}\,\widehat{B}\,\widehat{B}_\lambda^2\,(\widehat{B}_\lambda^{-1})^2\,\psi = \widehat{B}_\lambda^2\,\widehat{C}\,\widehat{B}\,(\widehat{B}_\lambda^{-1})^2\,\psi,$$

und es folgt $\widehat{B}\,(\widehat{B}_\lambda^{-1})^2\,\psi \in$ dom $\widehat{B}_\lambda \widehat{C} =$ dom $\widehat{B}\,\widehat{C}$. Daher gilt auch

$$\begin{aligned} \widehat{B}\,\widehat{C}\,\widehat{B}\,(\widehat{B}_\lambda^{-1})^2\,\psi &= \widehat{C}\,\widehat{B}^2\,(\widehat{B}_\lambda^{-1})^2\,\psi = \widehat{C}\,\widehat{A}\,(\widehat{B}_\lambda^{-1})^2\,\psi \\ &= \widehat{A}\,\widehat{C}\,(\widehat{B}_\lambda^{-1})^2\,\psi = \widehat{B}^2\,\widehat{C}\,(\widehat{B}_\lambda^{-1})^2\,\psi, \end{aligned}$$

es folgt $(\widehat{B}_\lambda^{-1})^2\,\psi \in \operatorname{dom} \widehat{B}\,\widehat{C}$, also

$$\widehat{C}\,\widehat{B}\,\psi = \widehat{B}_\lambda^2\,\widehat{B}\,\widehat{C}\,(\widehat{B}_\lambda^{-1})^2\,\psi = \widehat{B}\,\widehat{C}\,\widehat{B}_\lambda^2\,(\widehat{B}_\lambda^{-1})^2\,\psi = \widehat{B}\,\widehat{C}\,\psi$$

und somit $\widehat{C}\,\widehat{B} \subseteqq \widehat{B}\,\widehat{C}$. Zusammengenommen erhält man $\widehat{B}\,\widehat{C} = \widehat{C}\,\widehat{B}$. Hieraus folgt für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$

$$(\,\widehat{B} + \widehat{C}\,)\,\varphi = (\,\widehat{B} + \widehat{C}\,)\,(\,\widehat{B} - \widehat{C}\,)\,\psi = (\,\widehat{B}^2 - \widehat{B}\,\widehat{C} + \widehat{C}\,\widehat{B} - \widehat{C}^2\,)\,\psi = 0,$$

also auch

$$0 \leqq (\widehat{B}\,\varphi, \varphi) + (\widehat{C}\,\varphi, \varphi) = ((\,\widehat{B} + \widehat{C}\,)\,\varphi, \varphi) = 0 \tag{4.73}$$

und damit $(\widehat{B}\,\varphi, \varphi) = (\widehat{C}\,\varphi, \varphi) = 0$. Mit Ungleichung 3.3 folgt $(\widehat{B}\,\varphi, \chi) = (\widehat{C}\,\varphi, \xi) = 0$ für alle $\chi \in \operatorname{dom} \widehat{B}$ und alle $\xi \in \operatorname{dom} \widehat{C}$, es gilt daher $\widehat{B}\,\varphi = \widehat{C}\,\varphi = 0$, und mit (4.71) erhält man $\widehat{B}\,\psi = \widehat{C}\,\psi$ für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$. Um das auf $\operatorname{dom} \widehat{B}$ auszudehnen, verwenden wir für $\psi, \varphi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|\,\widehat{B}\,(\,\psi - \varphi\,)\,\|^2 &= (\widehat{B}\,(\,\psi - \varphi\,), \widehat{B}\,(\,\psi - \varphi\,))\\ &= (\widehat{B}^2\,(\,\psi - \varphi\,), \psi - \varphi) \leqq \|\,\widehat{A}\,(\,\psi - \varphi\,)\,\|\,\|\,\psi - \varphi\,\|.\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.123 ist $\Gamma(\widehat{B} \restriction \operatorname{dom} \widehat{A}^2)$ dicht in $\Gamma(\widehat{B} \restriction \operatorname{dom} \widehat{A})$, und da $\overline{\Gamma(\widehat{B} \restriction \operatorname{dom} \widehat{A})} = \Gamma(\widehat{B})$ gilt, folgt $\overline{\Gamma(\widehat{B} \restriction \operatorname{dom} \widehat{A}^2)} = \Gamma(\widehat{B})$; analog schließt man $\overline{\Gamma(\widehat{C} \restriction \operatorname{dom} \widehat{A}^2)} = \Gamma(\widehat{C})$. Wegen $\Gamma(\widehat{B} \restriction \operatorname{dom} \widehat{A}^2) = \Gamma(\widehat{C} \restriction \operatorname{dom} \widehat{A}^2)$ erhalten wir daraus $\Gamma(\widehat{B}) = \Gamma(\widehat{C})$ und somit die Behauptung. □

Auch hier schreiben wir $\widehat{B} = \widehat{A}^{1/2}$.

Der vierte Hilfssatz zeigt, daß Satz 4.77 auch für nicht kompakte Operatoren gilt, wenn diese abgeschlossen sind [51].

4.125 Polarzerlegung: *Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, dann gibt es zu jedem dicht definierten abgeschlossenen Operator $\widehat{A}$ auf $\mathcal{H}$ genau einen positiv definiten selbstadjungierten Operator $|\,\widehat{A}\,|$ und einen unitären Operator $\widehat{U}$ mit $\|\,\widehat{U}\,\varphi\,\| = \|\varphi\|$ für alle $\varphi \in (\,\ker \widehat{U}\,)^\perp$, sodaß $\widehat{A} = \widehat{U}\,|\,\widehat{A}\,|$.*

Beweis: Wir setzen $|\,\widehat{A}\,| := (\,\widehat{A}^*\widehat{A}\,)^{1/2}$ und zeigen zunächst die behaupteten Eigenschaften. Nach Lemma 4.124 existiert $|\,\widehat{A}\,|$ und ist selbstadjungiert und positiv definit. Nach Lemma 4.123 gibt es zu jedem $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ eine Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\operatorname{dom} \widehat{A}^*\widehat{A}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = \psi$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{A}\,\psi_n = \widehat{A}\,\psi$. Daher gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|\,|\,\widehat{A}\,|\,\psi_m - |\,\widehat{A}\,|\,\psi_n\,\|^2 &= (|\,\widehat{A}\,|\,\psi_m - |\,\widehat{A}\,|\,\psi_n, |\,\widehat{A}\,|\,\psi_m - |\,\widehat{A}\,|\,\psi_n)\\ &= (\psi_m - \psi_n, |\,\widehat{A}\,|^2\,(\,\psi_m - \psi_n\,)) = (\psi_m - \psi_n, \widehat{A}^*\widehat{A}\,(\,\psi_m - \psi_n\,))\\ &= (\widehat{A}\,(\,\psi_m - \psi_n\,), \widehat{A}\,(\,\psi_m - \psi_n\,)) = \|\,\widehat{A}\,\psi_m - \widehat{A}\,\psi_n\,\|^2\end{aligned} \tag{4.74}$$

und damit $\lim\limits_{n,m\to\infty} \| \,|\widehat{A}|\,\psi_m - |\widehat{A}|\,\psi_n \| = 0$, und weil $|\widehat{A}|$ nach Satz 3.12 abgeschlossen ist, folgt $\psi \in \operatorname{dom}|\widehat{A}|$ und $\lim\limits_{n\to\infty} |\widehat{A}|\,\psi_n = |\widehat{A}|\,\psi$, das heißt, es gilt $\operatorname{dom}\widehat{A} \subset \operatorname{dom}|\widehat{A}|$. Umgekehrt gilt für alle $\psi \in \operatorname{dom}|\widehat{A}|$ mit (4.74), und weil $\widehat{A}$ abgeschlossen ist, auch $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$. Damit ist $\operatorname{dom}\widehat{A} = \operatorname{dom}|\widehat{A}|$. Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\| \,|\widehat{A}|\,\psi_n \|^2 &= (|\widehat{A}|\,\psi_n, |\widehat{A}|\,\psi_n) = (|\widehat{A}|^2\,\psi_n, \psi_n)\\ &= (\widehat{A}^*\widehat{A}\,\psi_n, \psi_n) = (\widehat{A}\,\psi_n, \widehat{A}\,\psi_n) = \|\widehat{A}\,\psi_n\|^2\end{aligned}$$

und damit $\| \,|\widehat{A}|\,\psi \| = \|\widehat{A}\,\psi\|$ für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$. Nun definieren wir die Abbildung $\widehat{U}_0 : \operatorname{ran}|\widehat{A}| \longrightarrow \operatorname{ran}\widehat{A}$ durch $\widehat{U}_0\,|\widehat{A}|\,\psi = \widehat{A}\,\psi$. Diese ist isometrisch und läßt sich zu einer Abbildung $\widehat{U} : \overline{\operatorname{ran}|\widehat{A}|} \longrightarrow \overline{\operatorname{ran}\widehat{A}}$ fortsetzen, die genau die gewünschten Eigenschaften aufweist. Wegen

$$\widehat{A}^* = (\,\widehat{U}\,|\widehat{A}|\,)^* = |\widehat{A}|^*\widehat{U}^* = |\widehat{A}|\,\widehat{U}^*$$

gilt $\widehat{A}^*\widehat{A} = |\widehat{A}|\,\widehat{U}^*\widehat{U}\,|\widehat{A}|$. Nach Satz 3.40 ist $\widehat{U}$ unitär, also gilt $\widehat{U}^*\widehat{U} = \mathbf{1}$ auf $\overline{\operatorname{ran}|\widehat{A}|}$, und es folgt $\widehat{A}^*\widehat{A} = |\widehat{A}|^2$. Nach Lemma 4.124 ist folglich $|\widehat{A}|$ und damit auch $\widehat{U}$ eindeutig bestimmt. □

Schließlich folgt noch ein Hilfssatz, der eine Zerlegung beliebiger selbstadjungierter Operatoren in positiv definite selbstadjungierte Operatoren mit speziellen nützlichen Eigenschaften liefert [31].

4.126 Lemma: *$\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum und $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$. Dann gilt für die Operatoren $\widehat{A}^+ := \left[\tfrac{1}{2}(\,|\widehat{A}| + \widehat{A}\,)\right]^{**}$ und $\widehat{A}^- := \left[\tfrac{1}{2}(\,|\widehat{A}| - \widehat{A}\,)\right]^{**}$ folgendes.*

(i) $\widehat{A} = \widehat{A}^+ - \widehat{A}^-$, $|\widehat{A}| = \widehat{A}^+ + \widehat{A}^-$;

(ii) $\operatorname{ran}\widehat{A}^+ \subseteqq \ker\widehat{A}^-$, $\operatorname{ran}\widehat{A}^- \subseteqq \ker\widehat{A}^+$;

(iii) $\widehat{A}^2 = (\widehat{A}^+)^2 + (\widehat{A}^-)^2$;

(iv) $\widehat{A}^+$ und $\widehat{A}^-$ sind positiv definit und selbstadjungiert;

(v) $\widehat{A}^+$ und $\widehat{A}^-$ sind mit jedem beschränkten Operator vertauschbar, der mit $\widehat{A}$ vertauschbar ist.

Beweis: (i) Direktes Nachrechnen liefert $\widehat{A}^+ - \widehat{A}^- \supseteqq \widehat{A}$, und weil $\widehat{A}$ selbstadjungiert und $\widehat{A}^+ - \widehat{A}^-$ symmetrisch ist, folgt $\widehat{A}^+ - \widehat{A}^- = \widehat{A}$. Analog findet man $\widehat{A}^+ + \widehat{A}^- \supseteqq |\widehat{A}|$ und damit $\widehat{A}^+ + \widehat{A}^- = |\widehat{A}|$.
(ii) Weil $\widehat{A}$ selbstadjungiert ist, gilt $\operatorname{dom}\widehat{A}^2 = \operatorname{dom}|\widehat{A}|^2$. Damit folgt für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}^2$

$$\begin{aligned}\|\widehat{A}\,\psi\|^2 &= (\widehat{A}\,\psi, \widehat{A}\,\psi) = (\widehat{A}^2\,\psi, \psi) = (\widehat{A}^*\widehat{A}\,\psi, \psi)\\ &= (|\widehat{A}|^2\,\psi, \psi) = (|\widehat{A}|\,\psi, |\widehat{A}|\,\psi) = \| \,|\widehat{A}|\,\psi \|^2. \qquad (4.75)\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.123 gilt $\Gamma(\widehat{A}) = \overline{\Gamma(\widehat{A} \restriction \operatorname{dom} \widehat{A}^2)}$ und $\Gamma(|\widehat{A}|) = \overline{\Gamma(|\widehat{A}| \restriction \operatorname{dom} \widehat{A})}$, daher gibt es zu jedem $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ eine Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\operatorname{dom} \widehat{A}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = \psi$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{A}\psi_n = \widehat{A}\psi$ und $\lim\limits_{n\to\infty} |\widehat{A}|\psi_n = |\widehat{A}|\psi$. Das liefert $\operatorname{dom}|\widehat{A}| = \operatorname{dom}\widehat{A}$ und mit (4.75) $\|\widehat{A}\psi\|^2 = \|\,|\widehat{A}|\psi\|^2$. Für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}^2$ gilt dann $|\widehat{A}|\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$ und $\widehat{A}^+\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$. Mit $\operatorname{dom}\widehat{A} \subseteqq \operatorname{dom}\widehat{A}^-$ folgt weiter

$$\widehat{A}^-\widehat{A}^+\psi = \frac{1}{4}(|\widehat{A}| - \widehat{A})(|\widehat{A}| + \widehat{A})\psi = \frac{1}{4}(|\widehat{A}|^2 + |\widehat{A}|\widehat{A} - \widehat{A}|\widehat{A}| - \widehat{A}^2) = 0. \quad (4.76)$$

Nun sei wieder $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$ und $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die oben dazu definierte Folge in $\operatorname{dom}\widehat{A}^2$; dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{A}^+\psi_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}(|\widehat{A}| - \widehat{A})\psi_n\right] = \frac{1}{2}(|\widehat{A}| - \widehat{A})\psi = \widehat{A}^+\psi.$$

$\widehat{A}^-$ ist abgeschlossen, also ist auch $\ker\widehat{A}^-$ abgeschlossen, und es folgt $\widehat{A}^+\psi \in \ker\widehat{A}^-$ für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$, das heißt, es gilt $\operatorname{ran}\widehat{A}^+ \subseteqq \ker\widehat{A}^-$. Mit $\widehat{A}^+ = (-\widehat{A})^-$ und $\widehat{A}^+ = (-\widehat{A})^-$ folgt analog $\operatorname{ran}\widehat{A}^- \subseteqq \ker\widehat{A}^+$.

(iii) Für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}^2$ ist $\widehat{A}\psi = \widehat{A}^+\psi - \widehat{A}^-\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}^+$, und da nach (iii) $\widehat{A}^- \in \operatorname{dom}\widehat{A}^+$ gilt, folgt $\widehat{A}^+\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}^+$. Analog erhält man $\widehat{A}^-\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}^-$. Damit und mit (4.76) gilt

$$\widehat{A}^2\psi = (\widehat{A}^+ - \widehat{A}^-)(\widehat{A}^+ - \widehat{A}^-)\psi = (\widehat{A}^+)^2\psi + (\widehat{A}^-)^2\psi,$$

also $\widehat{A}^2 \subseteqq (\widehat{A}^+)^2 + (\widehat{A}^-)^2$. Außerdem ist $\widehat{A}^2$ selbstadjungiert und besitzt daher keine echten Erweiterungen, folglich gilt $\widehat{A}^2 = (\widehat{A}^+)^2 + (\widehat{A}^-)^2$.

(iv) Wir betrachten wieder den Hilbertraum $\mathscr{H} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ mit dem Skalarprodukt $\langle\{\psi,\chi\},\{\varphi,\xi\}\rangle = (\psi,\varphi) + (\chi,\xi)$ und dazu den Operator $\mathbf{C} : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ mit $\mathbf{C}\{\psi,\varphi\} = \{\varphi,-\psi\}$. Wie im Beweis von Lemma 4.104 zeigt man, daß $\Gamma(\widehat{A}^+)$ das orthogonale Komplement von $\mathbf{C}\,\Gamma((\widehat{A}^+)^*)$ ist. Zu jedem Vektor $\psi \in \operatorname{dom}(\widehat{A}^+)^*$ gibt es daher eindeutig bestimmte Vektoren $\varphi \in \operatorname{dom}\widehat{A}^+$ und $\chi \in \operatorname{dom}(\widehat{A}^+)^*$ mit

$$\{\psi, (\widehat{A}^+)^*\psi\} = \{\varphi, \widehat{A}^+\varphi\} + \{(\widehat{A}^+)^*\chi, -\chi\},$$

das heißt, es gilt

$$\psi = \varphi + (\widehat{A}^+)^*\chi, \quad (\widehat{A}^+)^*\psi = \widehat{A}^+\varphi - \chi. \quad (4.77)$$

Weil $\widehat{A}^+$ symmetrisch ist, folgt $(\widehat{A}^+)^*\chi \in \operatorname{dom}(\widehat{A}^+)^*$, also

$$(\widehat{A}^+)^*\psi = \widehat{A}^+\varphi + ((\widehat{A}^+)^*)^2\chi$$

und damit $\chi = -((\widehat{A}^+)^*)^2\chi$. Für alle $\xi \in \operatorname{dom}\widehat{A}^-$ gilt außerdem nach (ii) $\widehat{A}^-\xi \in \ker\widehat{A}^+$; es folgt

$$(\xi, (\widehat{A}^-)^*\chi) = (\widehat{A}^-\xi, \chi) = (\widehat{A}^-\xi, -((\widehat{A}^+)^*)^2\chi) = (\widehat{A}^+\widehat{A}^-\xi, -\widehat{A}^+\chi) = 0,$$

und somit ist $\chi \in \ker(\widehat{A}^-)^* \subseteqq \operatorname{dom}((\widehat{A}^-)^*)^2$. Nach (iii) gilt weiter

$$((\widehat{A}^+)^*)^2 + ((\widehat{A}^-)^*)^2 \subseteqq \left((\widehat{A}^+)^2\right)^* + \left((\widehat{A}^-)^2\right)^* \subseteqq \left((\widehat{A}^+)^2 + (\widehat{A}^-)^2\right)^* = \left(\widehat{A}^2\right)^* = \widehat{A}^2,$$

also ist $\chi \in \operatorname{dom} \widehat{A}^2 \subseteqq \operatorname{dom} (\widehat{A}^+)^2$, und damit gilt $((\widehat{A}^+)^*)^2 \chi = (\widehat{A}^+)^2 \chi$. Daraus wiederum folgt

$$0 \leqq \|\chi\|^2 = (\chi, -((\widehat{A}^+)^*)^2 \chi) = (\chi, -(\widehat{A}^+)^2 \chi) = -(\widehat{A}^+\chi, \widehat{A}^+\chi) = -\|\widehat{A}^+\chi\| \leqq 0,$$

also ist $\chi = 0$, und mit (4.77) folgt $\psi = \varphi \in \operatorname{dom} \widehat{A}^+$. Damit ist $\widehat{A}^+$ selbstadjungiert. Wegen $\widehat{A}^- = (-\widehat{A})^+$ ist auch $\widehat{A}^-$ selbstadjungiert.
Nun sei $\widehat{P}$ der orthogonale Projektor auf $\ker \widehat{A}^-$. Damit gilt $\widehat{A}^-\widehat{P} = 0$ und folglich auch $\widehat{P}\widehat{A}^- = \widehat{P}^* (\widehat{A}^-)^* \subseteqq (\widehat{A}^-\widehat{P})^* = 0$. Nach (ii) gilt außerdem $\widehat{P}\,\widehat{A}^+ = \widehat{A}^+$ und damit auch $\widehat{A}^+\widehat{P} = (\widehat{A}^+)^*\widehat{P}^* = (\widehat{P}\,\widehat{A}^+)^* = (\widehat{A}^+)^* = \widehat{A}^+$. Für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ folgt

$$\begin{aligned}(\widehat{A}^+\psi, \psi) &= (\widehat{P}\,\widehat{A}^+\psi, \psi) = (\widehat{P}\,(\,\widehat{A}^+ + \widehat{A}^-)\,\psi, \psi)\\ &= (\widehat{P}^2\,(\,\widehat{A}^+ + \widehat{A}^-)\,\psi, \psi) = ((\,\widehat{A}^+ + \widehat{A}^-)\,\widehat{P}\,\psi, \widehat{P}\,\psi) = (|\,\widehat{A}\,|\,\widehat{P}\,\psi, \widehat{P}\,\psi) \geqq 0.\end{aligned}$$

Für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}^+$ gibt es nach Lemma 4.123 eine Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\operatorname{dom} \widehat{A}$ mit $\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$ und $\lim_{n\to\infty} \widehat{A}^+\psi_n = \widehat{A}^+\psi$, und es folgt

$$(\widehat{A}^+\psi, \psi) = \lim_{n\to\infty} (\widehat{A}^+\psi_n, \psi_n) \geqq 0.$$

Somit ist $\widehat{A}^+$ positiv definit. Analog zeigt man, daß $\widehat{A}^-$ positiv definit ist.
(v) $\widehat{B}$ sei ein beschränkter, mit $\widehat{A}$ vertauschbarer Operator, das heißt, es gelte $\widehat{B}\,\widehat{A} \subseteqq \widehat{A}\,\widehat{B}$. Wie in Teil 3 des Beweises von Lemma 4.124 zeigt man, daß dann auch $\widehat{B}\,|\,\widehat{A}\,| \subseteqq |\,\widehat{A}\,|\,\widehat{B}$ gilt. Für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ folgt damit

$$\widehat{B}\,\widehat{A}^+\psi = \frac{1}{2}\,\widehat{B}\,(\,|\,\widehat{A}\,| + \widehat{A}\,)\,\psi = \frac{1}{2}\,(\,|\,\widehat{A}\,| + \widehat{A}\,)\,\widehat{B}\,\psi = \widehat{A}^+\widehat{B}\,\psi$$

Für alle $\psi \in \widehat{A}^+$ gibt es nach Lemma 4.123 eine Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\operatorname{dom} \widehat{A}$ mit $\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$ und $\lim_{n\to\infty} \widehat{A}^+\psi_n = \widehat{A}^+\psi$. Es folgt

$$\widehat{B}\,\widehat{A}^+\psi = \lim_{n\to\infty} \widehat{B}\,\widehat{A}^+\psi_n = \lim_{n\to\infty} \widehat{A}^+\widehat{B}\,\psi_n = \widehat{A}^+\widehat{B}\,\psi$$

und damit $\widehat{B}\,\widehat{A}^+ \subseteqq \widehat{A}^+\widehat{B}$. Analog zeigt man $\widehat{B}\,\widehat{A}^- \subseteqq \widehat{A}^-\widehat{B}$. □

Die im obigen Lemma definierten Operatoren $\widehat{A}^+$ und $\widehat{A}^-$ sind eindeutig bestimmt: Sind $\widehat{B}$ und $\widehat{C}$ Operatoren auf $\mathcal{H}$, welche die in Lemma 4.126 für $\widehat{A}^+$ und $\widehat{A}^-$ formulierten Eigenschaften (i) bis (iv) aufweisen, dann gilt $\widehat{B} = \widehat{A}^+$ und $\widehat{C} = \widehat{A}^-$, denn nach Voraussetzung gilt

$$|\,\widehat{A}\,| + \widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{B} - \widehat{C} \subseteqq 2\,\widehat{B};$$

und damit

$$\widehat{B} \supseteqq \left[\frac{1}{2} (| \widehat{A} | + \widehat{A}) \right]^{**} = \widehat{A}^{+},$$

und weil $\widehat{A}$ selbstadjungiert ist, folgt daraus $\widehat{B} = \widehat{A}^{+}$. Analog erhält man $\widehat{C} = \widehat{A}^{-}$.

Wir kehren nun zurück zu Definition 4.114 und wählen als Menge M die Menge $\mathbb{C}$ und als zugehörige σ-Algebra die Menge $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ der Borelmengen über $\mathbb{C}$, das heißt, wir betrachten *komplexe* Spektralmaße. Damit formulieren wir den angekündigten Spektralsatz für unbeschränkte normale Operatoren.

4.127 Spektralsatz: *$\mathcal{H}$ sei ein komplexer Hilbertraum. Dann gibt es zu jedem normalen Operator $\widehat{N}$ auf $\mathcal{H}$ ein eindeutig bestimmtes komplexes Spektralmaß $\widehat{E}$, sodaß $\widehat{N}$ darstellbar ist in der Form*

$$\widehat{N} = \int_{\mathbb{C}} \lambda \, d\widehat{E}. \tag{4.78}$$

Umgekehrt ist für jedes komplexe Spektralmaß $\widehat{E}$ der durch (4.78) definierte Operator normal. Dabei gilt

$$\operatorname{dom} \widehat{N} = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \;\middle|\; \int_{\mathbb{C}} |\lambda|^2 \, d\, \|\widehat{E}\,\psi\|^2 < \infty \right\}. \tag{4.79}$$

Beweis: [53] Wir zeigen zuerst die Existenz eines Spektralmaßes $\widehat{E}$ mit den beschriebenen Eigenschaften. $\widehat{N}$ sei ein beliebiger normaler Operator auf $\mathcal{H}$, dann ist nach Satz 3.17 für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ der Operator $\widehat{N} - \lambda$ ebenfalls normal und der Operator $\widehat{B} = | \widehat{N} - \lambda |$ selbstadjungiert und positiv definit. Für alle $r \geqq 0$ ist auch $\widehat{B} - r$ selbstadjungiert, nach Lemma 4.126 ist daher $(\widehat{B} - r)^{+}$ eindeutig bestimmt und selbstadjungiert. Folglich ist $\ker (\widehat{B} - r)^{+}$ abgeschlossen. $\widehat{E}_{\lambda,r}$ sei der orthogonale Projektor auf $\ker (\widehat{B} - r)^{+}$. Wir zeigen zunächst, daß $\{ \widehat{E}_{\lambda,r} \mid 0 \leqq r \leqq \infty \}$ eine Spektralschar ist, indem wir die in Definition 4.98 aufgeführten Eigenschaften überprüfen.

Zu (i): Nach Konstruktion gilt einerseits $(\widehat{B} - r)^{+} \widehat{E}_{\lambda,r} = 0$ und damit

$$\widehat{E}_{\lambda,r} (\widehat{B} - r)^{+} = \widehat{E}^{*}_{\lambda,r} \left[(\widehat{B} - r)^{+} \right]^{*} \subseteqq \left[(\widehat{B} - r)^{+} \widehat{E}_{\lambda,r} \right]^{*} = 0. \tag{4.80}$$

Weil $\widehat{E}_{\lambda,r}$ beschränkt ist, gilt andererseits

$$\begin{aligned} (\widehat{B} - r)^{-} \widehat{E}_{\lambda,r} &= \left[(\widehat{B} - r)^{-} \right]^{*} \widehat{E}^{*}_{\lambda,r} \\ &= \left[\widehat{E}_{\lambda,r} (\widehat{B} - r)^{-} \right]^{*} = \left[(\widehat{B} - r)^{-} \right]^{*} = (\widehat{B} - r)^{-}. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Zusammengenommen erhält man daraus $\widehat{E}_{\lambda,r} (\widehat{B} - r) \subseteqq (\widehat{B} - r) \widehat{E}_{\lambda,r}$ und $\widehat{E}_{\lambda,r} \widehat{B} \subseteqq \widehat{B} \widehat{E}_{\lambda,r}$ sowie für alle $s \geqq 0$

$$(\widehat{B} - r)^{+} \widehat{E}_{\lambda,s} \widehat{E}_{\lambda,r} = \widehat{E}_{\lambda,s} (\widehat{B} - r)^{+} \widehat{E}_{\lambda,r} = 0,$$

[53] Der hier beschriebene Beweis wurde von Bernau gefunden [30].

also
$$\widehat{E}_{\lambda,s}\,\widehat{E}_{\lambda,r} = \widehat{E}_{\lambda,r}\,\widehat{E}_{\lambda,s}\,\widehat{E}_{\lambda,r}. \tag{4.82}$$
Außerdem gilt
$$\widehat{E}_{\lambda,r}\,\widehat{E}_{\lambda,s} = (\,\widehat{E}_{\lambda,s}\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,)^* = (\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,\widehat{E}_{\lambda,s}\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,)^* = \widehat{E}_{\lambda,r}\,\widehat{E}_{\lambda,s}\,\widehat{E}_{\lambda,r}. \tag{4.83}$$
Mit (4.82) und (4.83) erhält man $\widehat{E}_{\lambda,r}\,\widehat{E}_{\lambda,s} = \widehat{E}_{\lambda,s}\,\widehat{E}_{\lambda,r}$ für alle $r, s \geqq 0$. Nach (4.80) folgt
$$(\,\widehat{B} - r\,)^+ \supseteqq (\,1 - \widehat{E}_{\lambda,r}\,)(\,\widehat{B} - r\,).$$
Damit und mit Lemma 4.126 (v) folgt für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{B}$ und alle $r, s \geqq 0$ mit $s > r$
$$\begin{aligned}
(\,\widehat{B} - s\,)\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi = \widehat{E}_{\lambda,r}\,(\,\widehat{B} - s\,)\,\psi &= \widehat{E}_{\lambda,r}\,(\,1 - \widehat{E}_{\lambda,s}\,)(\,\widehat{B} - s\,)\,\psi \\
&= (\,1 - \widehat{E}_{\lambda,s}\,)\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,(\,\widehat{B} - r\,)\,\psi - (\,s - r\,)(\,1 - \widehat{E}_{\lambda,s}\,)\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi \\
&= -(\,1 - \widehat{E}_{\lambda,s}\,)(\,\widehat{B} - r\,)^-\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi - (\,s - r\,)(\,1 - \widehat{E}_{\lambda,s}\,)\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi.
\end{aligned}$$
Nach Lemma 4.126 (iv) und (v) folgt weiter
$$\begin{aligned}
0 &\leqq ((\,\widehat{B} - s\,)\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi, \widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi) \\
&= -((\,1 - \widehat{E}_{\lambda,s}\,)(\,\widehat{B} - r\,)^-\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi, \widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi) - (\,s - r\,)((\,1 - \widehat{E}_{\lambda,s}\,)\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi, \widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi) \\
&\leqq -(\,s - r\,)((\,1 - \widehat{E}_{\lambda,s}\,)^2\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi, \widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi) \\
&= -(\,s - r\,)((\,1 - \widehat{E}_{\lambda,s}\,)\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi, (\,1 - \widehat{E}_{\lambda,s}\,)\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi) \\
&= -(\,s - r\,)\,\|\,(\,1 - \widehat{E}_{\lambda,s}\,)\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi\,\|^2 \leqq 0.
\end{aligned} \tag{4.84}$$
Daher, und weil $\operatorname{dom}\widehat{B}$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, gilt $(\,1 - \widehat{E}_{\lambda,s}\,)\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi = 0$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$. Folglich gilt $\widehat{E}_{\lambda,r}\,\widehat{E}_{\lambda,s} = \widehat{E}_{\lambda,s}\,\widehat{E}_{\lambda,r} = \widehat{E}_{\lambda,r}$ und damit $\widehat{E}_{\lambda,s} \geqq \widehat{E}_{\lambda,r}$ für alle $r < s$.
Zu (ii): Wieder sei $s > r$, dann ist $\widehat{E}_{\lambda,s} - \widehat{E}_{\lambda,r}$ ein orthogonaler Projektor. Nach (4.84) gilt für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{B}$ und aufgrund der Stetigkeit des Skalarprodukts auch für alle $\psi \in \mathcal{H}$
$$r\,((\,\widehat{E}_{\lambda,s} - \widehat{E}_{\lambda,r}\,)\,\psi, \psi) \leqq (\widehat{B}\,(\,\widehat{E}_{\lambda,s} - \widehat{E}_{\lambda,r}\,)\,\psi, \psi) \leqq s\,((\,\widehat{E}_{\lambda,s} - \widehat{E}_{\lambda,r}\,)\,\psi, \psi)$$
und damit
$$r\,(\,\widehat{E}_{\lambda,s} - \widehat{E}_{\lambda,r}\,) \leqq \widehat{B}\,(\,\widehat{E}_{\lambda,s} - \widehat{E}_{\lambda,r}\,) \leqq s\,(\,\widehat{E}_{\lambda,s} - \widehat{E}_{\lambda,r}\,).$$
Es folgt
$$0 \leqq \widehat{B}\,(\,\widehat{E}_{\lambda.s} - \widehat{E}_{\lambda,r}\,) - r\,(\,\widehat{E}_{\lambda.s} - \widehat{E}_{\lambda,r}\,) \leqq (\,s - r\,)(\,\widehat{E}_{\lambda.s} - \widehat{E}_{\lambda,r}\,),$$
also
$$\|\,\widehat{B}\,(\,\widehat{E}_{\lambda.s} - \widehat{E}_{\lambda,r}\,) - r\,(\,\widehat{E}_{\lambda.s} - \widehat{E}_{\lambda,r}\,)\,\| \leqq (\,s - r\,)\,\|\,\widehat{E}_{\lambda.s} - \widehat{E}_{\lambda,r}\,\| = s - r. \tag{4.85}$$

Wir betrachten nun den orthogonalen Projektor $\widehat{P} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (\,\widehat{E}_{\lambda,r+\varepsilon} - \widehat{E}_{\lambda,r}\,)$. Wie soeben gezeigt gilt $\widehat{E}_{\lambda,s} \geqq \lim_{\varepsilon \searrow 0} \widehat{E}_{\lambda,r+\varepsilon} \geqq \widehat{E}_{\lambda,r}$ für $s > r$; daraus folgt

$$\widehat{P} = (\,\widehat{E}_{\lambda,s} - \widehat{E}_{\lambda,r}\,)\,\widehat{P}$$

für $s > r$ sowie

$$\widehat{E}_{\lambda,r}\,\widehat{P} = 0 \tag{4.86}$$

Für alle $\psi \in \mathcal{H}$ gilt daher

$$\|\,\widehat{B}\,\widehat{P}\,\psi - r\,\widehat{P}\,\psi\,\| = \|\,(\,\widehat{B} - r\,)\,(\,\widehat{E}_{\lambda,s} - \widehat{E}_{\lambda,r}\,)\,\widehat{P}\,\psi\,\| \leqq (\,s - r\,)\,\|\widehat{P}\,\psi\|,$$

also

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \|\,\widehat{B}\,\widehat{P}\,\psi - r\,\widehat{P}\,\psi\,\| = 0$$

und damit

$$\widehat{B}\,\widehat{P}\,\psi = r\,\widehat{P}\,\psi. \tag{4.87}$$

Mit (4.81) und (4.86) folgt

$$(\,\widehat{B} - r\,)^{-}\,\widehat{P}\,\psi = (\,\widehat{B} - r\,)^{-}\,\widehat{P}\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi = 0$$

und mit (4.87) weiter

$$(\,\widehat{B} - r\,)^{+}\,\widehat{P}\,\psi = (\,\widehat{B} - r\,)\,\widehat{P}\,\psi = 0.$$

Es gilt somit $\widehat{P}\,\psi \in \ker(\,\widehat{B} - r\,)^{+}$ und $\widehat{P}\,\psi = \widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi = 0$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$, und man erhält $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \widehat{E}_{\lambda,r+\varepsilon} = \widehat{E}_{\lambda,r}$.

Zu (iii): Weil $\widehat{B}$ abgeschlossen ist, gilt $\widehat{E}_{\lambda,0}\,\psi \in \operatorname{dom}\widehat{B}$ und $\widehat{B}\,\widehat{E}_{\lambda,0}\,\psi = \widehat{E}_{\lambda,0}\,\widehat{B}\,\psi$ für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{B}$. Für alle $r \geqq 0$ gilt daher nach Lemma 4.126 (iv)

$$\begin{aligned}((\,\widehat{B} - r\,)\,\widehat{E}_{\lambda,0}\,\psi, \widehat{E}_{\lambda,0}\,\psi) &= ((\,\widehat{B} - r\,)\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,\widehat{E}_{\lambda,0}\,\psi, \widehat{E}_{\lambda,0}\,\psi)\\ &= -((\,\widehat{B} - r\,)^{-}\,\widehat{E}_{\lambda,0}\,\psi, \widehat{E}_{\lambda,0}\,\psi) \leqq 0,\end{aligned}$$

also $(\widehat{B}\,\widehat{E}_{\lambda,0}\,\psi, \widehat{E}_{\lambda,0}\,\psi) \leqq r\,\|\widehat{E}_{\lambda,0}\,\psi\|^{2}$. Für $\widehat{E}_{\lambda,0}\,\psi \neq 0$ folgt $\lim_{r \to 0} (\widehat{B}\,\widehat{E}_{\lambda,0}\,\psi, \widehat{E}_{\lambda,0}\,\psi) \leqq 0$ – ein Widerspruch. Somit gilt $\widehat{E}_{\lambda,0}\,\psi = 0$ für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{B}$, und weil $\widehat{E}_{\lambda,0} = 0$ stetig ist, folgt $\widehat{E}_{\lambda,0} = 0$.

Für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{B}$ gilt außerdem $\widehat{E}_{\lambda,\infty}\,\psi \in \operatorname{dom}\widehat{B}$, und für alle $r \geqq 0$ ist $\widehat{E}_{\lambda,r}\,\widehat{E}_{\lambda,\infty} = \widehat{E}_{\lambda,r}$. Es folgt

$$(\,1 - \widehat{E}_{\lambda,\infty}\,)\,\psi = (\,1 - \widehat{E}_{\lambda,r}\,)\,(\,1 - \widehat{E}_{\lambda,\infty}\,)\,\psi$$

sowie wieder nach Lemma 4.126 (iv)

$$
\begin{aligned}
&((\widehat{B}-r)(1-\widehat{E}_{\lambda,\infty})\psi,(1-\widehat{E}_{\lambda,\infty})\psi)\\
&=((\widehat{B}-r)(1-\widehat{E}_{\lambda,r})(1-\widehat{E}_{\lambda,\infty})\psi,(1-\widehat{E}_{\lambda,\infty})\psi)\\
&=((\widehat{B}-r)(1-\widehat{E}_{\lambda,\infty})\psi,(1-\widehat{E}_{\lambda,\infty})\psi)\\
&\quad-((\widehat{B}-r)\widehat{E}_{\lambda,r}(1-\widehat{E}_{\lambda,\infty})\psi,(1-\widehat{E}_{\lambda,\infty})\psi)\\
&=((\widehat{B}-r)(1-\widehat{E}_{\lambda,\infty})\psi,(1-\widehat{E}_{\lambda,\infty})\psi)\\
&\quad+((\widehat{B}-r)^{-}(1-\widehat{E}_{\lambda,\infty})\psi,(1-\widehat{E}_{\lambda,\infty})\psi)\\
&=((\widehat{B}-r)^{+}(1-\widehat{E}_{\lambda,\infty})\psi,(1-\widehat{E}_{\lambda,\infty})\psi)\geqq 0.
\end{aligned}
$$

Also ist $(\widehat{B}(1-\widehat{E}_{\lambda,\infty})\psi,(1-\widehat{E}_{\lambda,\infty})\psi)\geqq r\,\|(1-\widehat{E}_{\lambda,\infty})\psi\|^2$ für alle $r\geqq 0$. Das geht nur für $(1-\widehat{E}_{\lambda,\infty})\psi=0$. Somit gilt $\widehat{E}_{\lambda,\infty}\psi=\psi$ für alle $\psi\in\operatorname{dom}\widehat{B}$, und weil $\widehat{E}_{\lambda,\infty}$ stetig ist, folgt $\widehat{E}_{\lambda,\infty}=\mathbf{1}$.

Nun sei $\mathfrak{C}(\mathbb{C})$ die Menge der kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$ und $\mathscr{P}(\mathcal{H})$ die Menge der Projektoren auf $\mathcal{H}$. Wir definieren die Abbildung $\mathcal{E}:\mathfrak{P}(\mathbb{C})\longrightarrow\mathscr{P}(\mathcal{H})$ durch

$$\mathcal{E}(\mathsf{A})=\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee\{\,\widehat{E}_{\lambda,\varepsilon}\mid\lambda\in\mathsf{A}\,\}$$

für $\mathsf{A}\in\mathfrak{C}(\mathbb{C})$ und

$$\mathcal{E}(\mathsf{M})=\bigvee\{\,\mathcal{E}(\mathsf{A})\mid\mathsf{A}\in\mathfrak{C}(\mathbb{C}),\ \mathsf{A}\subseteqq\mathsf{M}\,\}$$

für beliebige $\mathsf{M}\in\mathfrak{P}(\mathbb{C})$. Für $\mathsf{N}\subseteqq\mathsf{M}$ gilt dabei $\mathcal{E}(\mathsf{N})\leqq\mathcal{E}(\mathsf{M})$. Weiter definieren wir die Abbildung $\widehat{E}:\mathfrak{B}(\mathbb{C})\longrightarrow\mathscr{P}(\mathcal{H})$ durch $\widehat{E}=\mathcal{E}\restriction\mathfrak{B}(\mathbb{C})$. Wir zeigen nun, daß $\widehat{E}$ ein Spektralmaß ist, indem wir die in Definition 4.114 aufgelisteten Eigenschaften überprüfen.

Zu (i): $\widehat{E}(\emptyset)=0$ ist klar nach Konstruktion.

Zu (ii): Für $\lambda\in\mathbb{C}$ und $r\geqq 0$ sei $\mathsf{D}(\lambda,r)\subset\mathbb{C}$ die abgeschlossene Kreisscheibe mit Mittelpunkt λ und Radius r. Damit ist $\mathcal{E}(\mathsf{D}(0,r))$ der Projektor auf den Raum

$$\mathcal{G}=\bigcap_{\varepsilon>0}\overline{\operatorname{span}\bigcup\{\,\ker(\,|\widehat{N}-\lambda|-\varepsilon\,)^{+}\mid\lambda\in\mathsf{D}(0,r)\,\}},$$

und weil $\mathsf{D}(0,r)=\overline{\bigcup\{\,\mathsf{D}(\lambda,\rho)\mid\rho<|\lambda|,\ \lambda\in\mathsf{D}(0,r)\,\}}$ gilt, folgt

$$\mathcal{E}(\mathsf{D}(0,r))=\widehat{E}(\mathsf{D}(0,r))=\widehat{E}_{0,r}.$$

Außerdem gilt $\mathcal{E}(\mathbb{C})\geqq\mathcal{E}(\mathsf{D}(0,r))$ und damit $\widehat{E}(\mathbb{C})\geqq\widehat{E}(\mathsf{D}(0,r))$ für alle $r\geqq 0$. Mit $\widehat{E}_{0,\infty}=\mathbf{1}$ folgt $\widehat{E}(\mathbb{C})=\mathbf{1}$.

Zu (iii): Wie oben gezeigt sind für jedes $\lambda\in\mathbb{C}$ die Projektoren $E_{\lambda,r}$, $r\geqq 0$, jeweils paarweise miteinander sowie mit $\widehat{N}-\lambda$ vertauschbar. Folglich sind sie für alle $\mu\in\mathbb{C}$ mit $\widehat{N}-\mu$ und damit auch mit $(\widehat{N}-\mu)^{*}(\widehat{N}-\mu)^{1/2}=|\widehat{N}-\mu|$ sowie für alle $\mu\in\mathbb{C}$ und alle $s\geqq 0$ mit

$\widehat{E}_{\mu,s}$ vertauschbar. Für alle $\mathsf{M},\mathsf{N} \subseteqq \mathbb{C}$ folgt daraus $\widehat{E}(\mathsf{M})\,\widehat{E}(\mathsf{N}) = \widehat{E}(\mathsf{N})\,\widehat{E}(\mathsf{M})$. Gilt zusätzlich $\mathsf{M} \supseteqq \mathsf{N}$, so folgt

$$\widehat{E}(\mathsf{M}) \geqq \widehat{E}(\mathsf{N}) \tag{4.88}$$

Außerdem gilt für alle $\mathsf{A},\mathsf{B} \in \mathfrak{C}(\mathbb{C})$ mit $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$ nach Satz 3.32

$$\begin{aligned}
\widehat{E}(\mathsf{A}) \vee \widehat{E}(\mathsf{B}) &= \Big(\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee \{\, \widehat{E}_{\lambda,\varepsilon} \mid \lambda \in \mathsf{A} \,\} \Big) \vee \Big(\bigwedge_{\delta>0} \bigvee \{\, \widehat{E}_{\mu,\delta} \mid \mu \in \mathsf{B} \,\} \Big) \\
&= \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\delta>0} \Big[\Big(\bigvee \{\, \widehat{E}_{\lambda,\varepsilon} \mid \lambda \in \mathsf{A} \,\} \Big) \vee \Big(\bigvee \{\, \widehat{E}_{\mu,\delta} \mid \mu \in \mathsf{B} \,\} \Big) \Big] \\
&= \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\delta>0} \bigvee \{\, \widehat{E}_{\lambda,\varepsilon} \vee \widehat{E}_{\mu,\delta} \mid \lambda \in \mathsf{A},\ \mu \in \mathsf{B} \,\} \\
&= \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee \{\, \widehat{E}_{\lambda,\varepsilon} \vee \widehat{E}_{\mu,\varepsilon} \mid \lambda \in \mathsf{A},\ \mu \in \mathsf{B} \,\} \\
&= \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee \{\, \widehat{E}_{\nu,\varepsilon} \mid \nu \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B} \,\} = \widehat{E}(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}).
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Gilt $\mathsf{M} \cap \mathsf{N} = \emptyset$ und sind $\mathsf{A} \subset \mathsf{M}$ und $\mathsf{B} \subset \mathsf{N}$ kompakt, dann gilt auch $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$, und es gibt somit ein $\delta > 0$, sodaß $\mathsf{D}(\lambda,\delta) \cap \mathsf{D}(\mu,\delta) = \emptyset$ für alle $\lambda \in \mathsf{A}$ und $\mu \in \mathsf{B}$. Überdies liefert (4.85) mit $r = 0$ für alle $s \geqq 0$

$$\|\, |\, \widehat{N} - \lambda \,|\, \widehat{E}_{\lambda,s} \,\| \leqq s.$$

Daraus folgt für alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
\|\, (\lambda - \mu)\, \widehat{E}_{\lambda,\delta}\, \widehat{E}_{\mu,\delta}\, \psi \,\| &= \|\, (\widehat{N} - \mu)\, \widehat{E}_{\mu,\delta}\, \widehat{E}_{\lambda,\delta}\, \widehat{E}_{\mu,\delta}\, \psi - (\widehat{N} - \lambda)\, \widehat{E}_{\lambda,\delta}\, \widehat{E}_{\lambda,\delta}\, \widehat{E}_{\mu,\delta}\, \psi \,\| \\
&\leqq \|\, (\widehat{N} - \mu)\, \widehat{E}_{\mu,\delta}\, \widehat{E}_{\lambda,\delta}\, \widehat{E}_{\mu,\delta}\, \psi \,\| + \|\, (\widehat{N} - \lambda)\, \widehat{E}_{\lambda,\delta}\, \widehat{E}_{\lambda,\delta}\, \widehat{E}_{\mu,\delta}\, \psi \,\| \\
&\leqq \|\, |\, \widehat{N} - \mu \,|\, \widehat{E}_{\mu,\delta}\, \widehat{E}_{\lambda,\delta}\, \widehat{E}_{\mu,\delta}\, \psi \,\| + \|\, |\, \widehat{N} - \lambda \,|\, \widehat{E}_{\lambda,\delta}\, \widehat{E}_{\lambda,\delta}\, \widehat{E}_{\mu,\delta}\, \psi \,\| \\
&\leqq \delta\, \big[\, \|\, (\lambda - \mu)\, \widehat{E}_{\lambda,\delta}\, \widehat{E}_{\mu,\delta}\, \psi \,\| + \|\, (\lambda - \mu)\, \widehat{E}_{\lambda,\delta}\, \widehat{E}_{\mu,\delta}\, \psi \,\| \,\big],
\end{aligned}$$

wegen $|\, \lambda - \mu \,| > 2\,\delta$ weiter $\|\, \widehat{E}_{\lambda,\delta}\, \widehat{E}_{\mu,\delta}\, \psi \,\| = 0$ und damit $\widehat{E}_{\lambda,\delta}\, \widehat{E}_{\mu,\delta} = 0$. Daher gilt für alle $\mathsf{M},\mathsf{N} \subset \mathbb{C}$ mit $\mathsf{M} \cap \mathsf{N} = \emptyset$

$$\widehat{E}(\mathsf{M})\, \widehat{E}(\mathsf{N}) = 0. \tag{4.90}$$

Nun sei $\mathfrak{U}(\mathbb{C})$ die Menge aller offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$. Ist $(\mathsf{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{U}(\mathbb{C})$ und $\mathsf{U} = \bigcup_{n=0}^{\infty}$, dann gilt einerseits $\widehat{E}(\mathsf{U}) \geqq \bigvee_{n=0}^{\infty} \widehat{E}(\mathsf{U}_n)$. Andererseits gibt es zu jedem $\mathsf{A} \in \mathfrak{C}(\mathbb{C})$ mit $\mathsf{A} \subseteqq \mathsf{U}$ ein N sodaß $\mathsf{A} \subseteqq \bigcup_{n=0}^{N}$; nach Satz 1.7 gibt es damit auch $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_N \in \mathfrak{C}(\mathbb{C})$ mit

$A_n \subsetneqq U_n$ für $n = 1, 2, \dots, N$ und $A = \bigcup_{n=0}^{N} A_n$. Es folgt $\widehat{E}(A_n) \leqq \widehat{E}(U_n)$ für $n = 1, 2, \dots, N$, also weiter nach (4.89)

$$\widehat{E}(A) = \widehat{E}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \bigvee_{n=0}^{N} \widehat{E}(A_n) \leqq \bigvee_{n=0}^{N} \widehat{E}(U_n) \leqq \bigvee_{n=0}^{\infty} \widehat{E}(U_n)$$

und damit $\widehat{E}(U) \leqq \bigvee_{n=0}^{\infty} \widehat{U}_n$. Beides zusammen liefert

$$\widehat{E}(U) = \bigvee_{n=0}^{\infty} \widehat{E}(U_n). \tag{4.91}$$

Als nächstes seien $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$ die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ und $\mathfrak{E}(\mathbb{C})$ die Menge aller Teilmengen M von $\mathbb{C}$ mit

$$\mathcal{E}(M) = \bigvee \{ \mathcal{E}(U) \mid U \in \mathfrak{U}(\mathbb{C}),\ M \subsetneqq U \}.$$

Natürlich gilt $\mathfrak{U}(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{E}(\mathbb{C})$ und $\mathfrak{C}(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{E}(\mathbb{C})$. Es ist aber auch $\mathfrak{A}(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{E}(\mathbb{C})$, denn jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist eine abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen von $\mathbb{C}$. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{E}(\mathbb{C})$ und $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, dann gilt $\widehat{E}(A) \geqq \bigvee_{n=0}^{\infty} \widehat{E}(A_n)$. Außerdem gibt es für alle $\varepsilon > 0$ und alle $\psi \in \mathcal{H}$ eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{U}(\mathbb{C})$ mit $A_n \subsetneqq U_n$ und $\| [\widehat{E}(U_n) - \widehat{E}(A_n)]\,\psi \| < \varepsilon/2^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei ist $U = \bigcup_{n=0}^{\infty}$ offen, und es gilt $A \subsetneqq U$. Mit (4.88) und (4.91) folgt

$$\widehat{E}(A) = \widehat{E}(U) = \bigvee_{n=0}^{\infty} \widehat{E}(U_n)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\left\| \left[\widehat{E}(A) - \bigvee_{n=0}^{\infty} \widehat{E}(A_n) \right] \psi \right\| &\leqq \left\| \left[\bigvee_{n=0}^{\infty} \widehat{E}(U_n) - \bigvee_{n=0}^{\infty} \widehat{E}(A_n) \right] \psi \right\| \\
&\leqq \left\| \left\{ \bigvee_{n=0}^{\infty} \left[\widehat{E}(U_n) - \widehat{E}(A_n) \right] \right\} \psi \right\| \\
&\leqq \sum_{n=0}^{\infty} \| [\widehat{E}(U_n) - \widehat{E}(A_n)]\,\psi \| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Das wiederum liefert $\widehat{E}(A)\,\psi = \bigvee_{n=0}^{\infty} \widehat{E}(A_n)\,\psi$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$, das heißt es gilt

$$\widehat{E}(A) = \bigvee_{n=0}^{\infty} \widehat{E}(A_n). \tag{4.93}$$

$(\mathsf{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei jetzt eine disjunkte Folge in $\mathfrak{E}(\mathbb{C})$; nach (4.90) gilt dann $\bigvee\limits_{n=0}^{\infty} \widehat{E}(\mathsf{B}_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \widehat{E}(\mathsf{B}_n)$, und mit (4.93) erhält man

$$\widehat{E}\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathsf{B}_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{E}(\mathsf{B}_n).$$

Die Menge $\mathfrak{E}(\mathbb{C})$ muß noch genauer charakterisiert werden. Einerseits gilt für $\mathsf{B}, \mathsf{C} \in \mathfrak{E}(\mathbb{C})$

$$\mathcal{E}(\mathsf{B}\setminus\mathsf{C}) = \bigvee\{\,\mathcal{E}(\mathsf{A}) \mid \mathsf{A}\in\mathfrak{E}(\mathbb{C}),\ \mathsf{A}\subseteqq \mathsf{B}\setminus\mathsf{C}\,\} = \bigvee\{\,\mathcal{E}(\mathsf{U}) \mid \mathsf{U}\in\mathfrak{U}(\mathbb{C}),\ \mathsf{B}\setminus\mathsf{C}\subseteqq \mathsf{U}\,\},$$

das heißt, es ist auch $\mathsf{B}\setminus\mathsf{C} \in \mathfrak{E}(\mathbb{C})$. Ist andererseits $(\mathsf{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wieder eine beliebige Folge in $\mathfrak{E}(\mathbb{C})$ und $\mathsf{A} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathsf{A}_n$, dann gilt nach (4.92) für alle $\psi\in\mathcal{H}$

$$\inf\{\,\|\,[\,\widehat{E}(\mathsf{U}) - \widehat{E}(\mathsf{A})\,]\,\psi\,\| \mid \mathsf{U}\in\mathfrak{U}(\mathbb{C}),\ \mathsf{A}\subseteqq\mathsf{U}\,\},$$

also

$$\mathcal{E}(\mathsf{A}) = \bigvee\{\,\mathcal{E}(\mathsf{U}) \mid \mathsf{U}\in\mathfrak{U}(\mathbb{C}),\ \mathsf{A}\subseteqq\mathsf{U}\,\}$$

und daher $\mathsf{A}\in\mathfrak{E}(\mathbb{C})$. Folglich ist $\mathfrak{E}(\mathbb{C})$ ein σ-Ring, und wegen $\mathfrak{B}(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{E}(\mathbb{C})$ ist somit $\widehat{E}$ ein Spektralmaß.

Als nächstes zeigen wir, daß $\widehat{N}$ in der Form (4.78) geschrieben werden kann. Dazu sei $r \geqq 0$ und $\mathsf{B}\in\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ mit $\operatorname{diam}\mathsf{B} \leqq r$, dann gilt für alle $\lambda\in\mathsf{B}$ und alle $\psi\in\mathcal{H}$

$$\widehat{E}(\mathsf{B})\,\psi = \widehat{E}(\mathsf{B})\,\widehat{E}_{\lambda,r}\,\psi \in \operatorname{dom}\widehat{N}$$

sowie wegen (4.85)

$$\|\,(\,\widehat{N}-\lambda\,)\,\widehat{E}(\mathsf{B})\,\psi\,\| \leqq r\,\|\,\widehat{E}(\mathsf{B})\,\psi\,\|.$$

Es folgt

$$\int\limits_{\mathsf{D}(0,r)} \lambda\,d\widehat{E}\,\psi = \int\limits_{\mathsf{D}(0,r)} \lambda\,d\widehat{E}\,(\,\widehat{E}_{0,r}\,\psi\,) = \widehat{N}\,\widehat{E}_{0,r}\,\psi$$

für alle $\psi\in\mathcal{H}$ und daher

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \lambda\,d\widehat{E}\,\psi = \lim_{r\to\infty} \int\limits_{\mathsf{D}(0,r)} \lambda\,d\widehat{E}\,\psi = \lim_{r\to\infty} \widehat{N}\,\widehat{E}_{0,r}\,\psi = \lim_{r\to\infty} \widehat{E}_{0,r}\,\widehat{N}\,\psi = \widehat{N}\,\psi \tag{4.94}$$

für alle $\psi\in\operatorname{dom}\widehat{N}$. Anders ausgedrückt gilt $\operatorname{dom}\widehat{N} \subseteqq \operatorname{dom}\int_{\mathbb{C}}\lambda\,d\widehat{E}$ und $\widehat{N}\,\psi = \int_{\mathbb{C}}\lambda\,d\widehat{E}\,\psi$ für alle $\psi\in\operatorname{dom}\widehat{N}$ und somit $\widehat{N} \subseteqq \int_{\mathbb{C}}\lambda\,d\widehat{E}$. Weil $\widehat{N}$ abgeschlossen ist, folgt aus (4.94) aber auch $\operatorname{dom}\int_{\mathbb{C}}\lambda\,d\widehat{E} \subseteqq \operatorname{dom}\widehat{N}$ und $\widehat{N}\,\psi = \int_{\mathbb{C}}\lambda\,d\widehat{E}\,\psi$ für alle $\psi\in\operatorname{dom}\int_{\mathbb{C}}\lambda\,d\widehat{E}$, also $\widehat{N} \supseteqq \int_{\mathbb{C}}\lambda\,d\widehat{E}$.
Zusammengenommen gilt damit

$$\widehat{N} = \int\limits_{\mathbb{C}} \lambda\,d\widehat{E}.$$

Schließlich zeigen wir noch die Eindeutigkeit der Darstellung (4.78). Dazu sei $\widehat{F}$ ein weiteres komplexes Spektralmaß mit (4.78) und (4.79). Außerdem seien $r \geqq 0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ und dazu $\mathcal{A}_{\lambda,r}$ die Menge aller $\psi \in \mathcal{H}$, für welche die Folge $(r^{-n} \|(\widehat{N}-\lambda)^n \psi\|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Natürlich ist $0 \in \mathcal{A}_{\lambda,r}$; außerdem gilt für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{A}_{\lambda,r}$, alle $\zeta, \eta \in \mathbb{C}$ und alle $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\| r^{-m} (\widehat{N}-\lambda)^m (\zeta\psi+\eta\varphi) \| \leqq |\zeta| \, \| r^{-m} (\widehat{N}-\lambda)^m \psi\| + |\eta| \, \| r^{-m} (\widehat{N}-\lambda)^m \varphi\|,$$

das heißt, die Folge $(\| r^{-n} (\widehat{N}-\lambda)^n (\zeta\psi+\eta\varphi)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls beschränkt und es gilt somit $\zeta\psi+\eta\varphi \in \mathcal{A}_{\lambda,r}$. Folglich ist $\mathcal{A}_{\lambda,r}$ ein Unterraum von $\mathcal{H}$. Weiter gilt für jeden mit $\widehat{N}$ vertauschbaren Operator $\widehat{B}$ sowie alle $\psi \in \mathcal{A}_\lambda$ und alle $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\| r^{-n} (\widehat{N}-\lambda)^n \widehat{B}\psi \| = \| \widehat{B} [r^{-n} (\widehat{N}-\lambda)^n] \psi \| \leqq \|\widehat{B}\| \, \| r^{-n} (\widehat{N}-\lambda)^n \psi \|,$$

also $\widehat{B}\psi \in \mathcal{A}_{\lambda,r}$. Nun sei $\psi \in \mathcal{H}$ sogewählt, daß es ein $s \geqq 1$ und ein $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ gibt, sodaß

$$\| r^{-m} (\widehat{N}-\lambda)^m \psi \| > s \|\psi\|.$$

Dann folgt nach Satz 3.16 und Ungleichung 2.142

$$\begin{aligned} s^2 \|\psi\|^2 < \| r^{-m} (\widehat{N}-\lambda)^m \psi \|^2 &= (r^{-m} (\widehat{N}-\lambda)^m \psi, r^{-m} (\widehat{N}-\lambda)^m \psi) \\ &= (r^{-2m} ((\widehat{N}-\lambda)^m)^* (\widehat{N}-\lambda)^m \psi, \psi) \\ &\leqq \| r^{-2m} ((\widehat{N}-\lambda)^m)^* (\widehat{N}-\lambda)^m \psi \| \, \|\psi\| = \| r^{-2m} (\widehat{N}-\lambda)^{2m} \psi \| \, \|\psi\|, \end{aligned}$$

also

$$\| r^{-2m} (\widehat{N}-\lambda)^{2m} \psi \| > s^2 \|\psi\|$$

und damit induktiv für alle $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\| r^{-2^n m} (\widehat{N}-\lambda)^{2^n m} \psi \| > s^{2^n} \|\psi\|,$$

das heißt, für solche ψ ist die Folge $(r^{-n} \|(\widehat{N}-\lambda)^n \psi\|)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt. Das liefert

$$\mathcal{A}_{\lambda,r} = \{ \psi \in \operatorname{dom} \widehat{N} \mid \| (\widehat{N}-\lambda)^n \psi \| \leqq r^n \|\psi\|, \ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \}.$$

Nun sei wieder $\mathrm{D}(\lambda, r) = \{ \zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta-\lambda| \leqq r \}$. Für alle $\psi \in \mathcal{H}$ und alle $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ gilt dann $\widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda,r))\psi \in \operatorname{dom} \widehat{N}^n = \operatorname{dom} (\widehat{N}-\lambda)^n$. Mit $\| \widehat{N}\psi \|^2 = \int_{\mathbb{C}} |\mu|^2 \, d(\widehat{E}\psi, \psi)$ folgt

$$\begin{aligned} \| r^{-n} (\widehat{N}-\lambda)^n \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda,r))\psi \|^2 &= \int_{\mathbb{C}} r^{-2n} |\mu-\lambda|^{2n} \, d(\widehat{F}\,\widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda,r))\psi, \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda,r))\psi) \\ &= \int_{\mathrm{D}(\lambda,r)} r^{-2n} |\mu-\lambda|^{2n} \, d(\widehat{F}\,\widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda,r))\psi, \psi) \\ &\leqq \int_{\mathrm{D}(\lambda,r)} d(\widehat{F}\psi, \psi) = \| \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda,r))\psi \|^2 \end{aligned}$$

und damit ran $\widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, r)) \subseteqq \mathcal{A}_{\lambda,r}$. Umgekehrt seien $\lambda \in \mathbb{C}$ und $r \geqq 0$ sowie $\psi \in \mathcal{A}_{\lambda,r}$; für alle $s > r$ gilt dann $\psi - \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, s))\, \psi \in \mathcal{A}_{\lambda,r}$ und

$$\|\, (\, \widehat{N} - \lambda\,)\, \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, s))\, (\, \psi - \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, s))\, \psi \,\| \leqq r\, \|\, \psi - \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, s))\, \psi \,\|. \tag{4.95}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\|\, (\, \widehat{N} - \lambda\,)\, \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, r))\, \psi \,\|^2 &= \int_{\mathbb{C}} |\, \mu - \lambda\,|^2\, d(\widehat{F}\, \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, r))\, \psi, \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, r))\, \psi) \\
&= \int_{\mathbb{C} \setminus \mathrm{D}(\lambda, s)} |\, \mu - \lambda\,|^2\, d(\widehat{F}\, \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, r))\, \psi, \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, r))\, \psi) \\
&\geqq s^2 \int_{\mathbb{C}} d(\widehat{F}\, \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, r))\, \psi, \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, r))\, \psi) \\
&= s^2\, \|\, \psi - \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, s))\, \psi \,\|^2
\end{aligned} \tag{4.96}$$

(4.95) und (4.96) können gleichzeitig jedoch nur für $\|\, \psi - \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, s))\, \psi \,\| = 0$ und damit für $\widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, s))\, \psi = \psi$ gelten. Mit $\lim_{s \searrow r} \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, s)) = \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, r))$ folgt $\widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, r))\, \psi = \psi$ für alle $\psi \in \mathcal{A}_{\lambda,r}$. Daher gilt $\mathcal{A}_{\lambda,r} \subseteqq \operatorname{ran} \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, r))$ und zusammen somit $\mathcal{A}_{\lambda,r} = \operatorname{ran} \widehat{F}(\mathrm{D}(\lambda, r))$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Analog zeigt man $\mathcal{A}_{\lambda,r} = \operatorname{ran} \widehat{E}(\mathrm{D}(\lambda, r))$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Folglich stimmen die Spektralmaße $\widehat{E}$ und $\widehat{F}$ auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe in der komplexen Ebene und damit auf ganz $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ überein, das heißt, es gilt $\widehat{E} = \widehat{F}$. □

Der im folgenden Satz formulierte Zusammenhang zwischen Spektren und Spektralmaßen liefert eine weitere Rechtfertigung für deren Bezeichnung und gilt ebenfalls auch für unbeschränkte normale Operatoren [260].

4.128 Satz: *$\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum, $\widehat{A}$ ein normaler Operator auf $\mathcal{H}$ und $\widehat{E}$ das zugehörige Spektralmaß. Dann gilt* $\operatorname{supp} \widehat{E} = \sigma(\widehat{A})$.

Beweis: Zunächst sei $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} \widehat{E}$ und $\widehat{R}_\gamma = \int_{\mathbb{C}} (\, \lambda - \gamma\,)^{-1}\, d\widehat{E}$. Weil $\operatorname{supp} \widehat{E}$ abgeschlossen ist, gibt es eine offene Menge $\mathrm{X} \subset \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} \widehat{E}$ mit $\gamma \in \mathrm{X}$. Somit gilt

$$\int_{\mathbb{C}} \chi_{\mathbb{C} \setminus \mathrm{X}}\, d\widehat{E} = \mathbf{1},$$

mit Satz 4.102 folgt weiter

$$\widehat{R}_\gamma = \int_{\mathbb{C}} (\, \lambda - \gamma\,)^{-1}\, d\widehat{E} \int_{\mathbb{C}} \chi_{\mathbb{R} \setminus (a,b)}\, d\widehat{E} = \int_{\mathbb{C}} \chi_{\mathbb{R} \setminus (a,b)}\, (\, \lambda - \gamma\,)^{-1}\, d\widehat{E},$$

und daher ist $\widehat{R}_\gamma$ beschränkt. Außerdem gilt $\widehat{R}_\gamma\, (\, \widehat{A} - \gamma\,) = \mathbf{1} \restriction \operatorname{dom} \widehat{A}$ und $(\, \widehat{A} - \gamma\,)\, \widehat{R}_\alpha = \mathbf{1}$, das heißt $\widehat{R}_\gamma = (\, \widehat{A} - \lambda\,)^{-1}$. Somit ist $\widehat{R}_\gamma$ die Resolvente $\widehat{R}_{\widehat{A}}(\gamma)$ von $\widehat{A}$, und diese ist wie gezeigt beschränkt. Es folgt $\gamma \in \rho(\widehat{A})$, also $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} \widehat{E} \subset \rho(\widehat{A})$. Daher gilt $\sigma(\widehat{A}) \subset \operatorname{supp} \widehat{E}$. Nun sei umgekehrt $\gamma \in \rho(\widehat{A})$. Gälte hierfür $\widehat{E}(\{\gamma\}) \neq 0$, dann gäbe es ein $\psi \in \operatorname{ran} \widehat{E}(\{\gamma\})$ mit $\psi \neq 0$, sodaß nach Satz 4.118 (viii)

$$\begin{aligned}\widehat{A}\psi &= \int_{\mathbb{C}} \lambda \, d\widehat{E}\, \psi = \int_{\mathbb{C}} \lambda \, d\widehat{E} \int_{\mathbb{C}} \chi_{\{\gamma\}} \, d\widehat{E}\, \psi \\ &= \int_{\mathbb{C}} \lambda \, \chi_{\{\gamma\}} \, d\widehat{E}\, \psi = \int_{\mathbb{C}} \gamma \, \chi_{\{\gamma\}} \, d\widehat{E}\, \psi = \gamma \, \widehat{E}(\{\gamma\})\, \psi = \gamma\, \psi\end{aligned}$$

und somit $\gamma \in \sigma_{\mathrm{p}}(\widehat{A})$ folgt – ein Widerspruch. Folglich gilt $\widehat{E}(\{\gamma\}) = 0$ und daher auch

$$\left[\int_{\mathbb{C}} (\lambda - \gamma)^{-1} \, d\widehat{E} \right] (\widehat{A} - \gamma) = \int_{\mathbb{C}} d\widehat{E} \restriction \operatorname{dom} \widehat{A} = \mathbf{1} \restriction \operatorname{dom} \widehat{A}$$

sowie

$$(\widehat{A} - \gamma) \int_{\mathbb{C}} (\lambda - \gamma)^{-1} \, d\widehat{E} = \int_{\mathbb{C}} d\widehat{E} = \mathbf{1},$$

und weil inverse Operatoren stets eindeutig bestimmt sind, liefert das

$$\int_{\mathbb{C}} (\lambda - \gamma)^{-1} \, d\widehat{E} = (\widehat{A} - \gamma)^{-1} = \widehat{R}_{\widehat{A}}(\gamma).$$

Hierfür gilt

$$\operatorname{dom} \int_{\mathbb{C}} (\lambda - \gamma)^{-1} \, d\widehat{E} = \operatorname{dom} (\widehat{A} - \gamma) = \mathcal{H},$$

das heißt, $\widehat{R}_{\widehat{A}}(\gamma)$ ist beschränkt. Wäre nun $\gamma \in \operatorname{supp} \widehat{E}$ und gälte damit $\widehat{E}(\mathsf{X}) \neq 0$ für jede offene Menge $\mathsf{A} \subset \mathbb{C}$ mit $\gamma \in \mathsf{X}$, dann gäbe es eine Folge $(\mathsf{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit $\gamma \in \mathsf{A}_n$ sowie $\operatorname{diag} \mathsf{A}_n < 2/n$ und $\mathsf{A}_n \supset \mathsf{A}_{n+1}$, sodaß für alle $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\psi_n \in \operatorname{ran} \widehat{E}(\mathsf{A}_n)$ mit $\psi_n \neq 0$ und $\|\psi_n\| = 1$

$$\begin{aligned}\| \widehat{R}_{\widehat{A}}(\gamma)\, \psi_n \|^2 &= \left\| \int_{\mathbb{C}} (\lambda - \gamma)^{-1} \, d\widehat{E}\, \psi_n \right\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |\lambda - \gamma|^{-2} \, d \, \| \widehat{E}\, \psi_n \|^2 \\ &\geqq \inf_{\lambda \in \mathsf{A}_n} (\lambda - \gamma)^{-2} \int_{\mathbb{C}} d \, \| \widehat{E}\, \psi_n \|^2 \geqq \inf_{\lambda \in \mathsf{A}_n} (\lambda - \gamma)^{-2} = n^2.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\lim_{n \to \infty} \| \widehat{R}_{\widehat{A}}(\gamma)\, \psi_n \| = \infty$$

– ein Widerspruch. Damit ist $\gamma \notin \operatorname{supp} \widehat{E}$, und es folgt $\rho(\widehat{A}) \cap \operatorname{supp} \widehat{E} = \emptyset$. Also gilt $\operatorname{supp} \widehat{E} \subset \sigma(\widehat{A})$. $\square$

Für die Spektraldarstellung (4.61) folgt aus obigem Satz

$$\widehat{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\widehat{E}_\lambda = \int_{\operatorname{supp}\widehat{E}} \lambda \, d\widehat{E} = \int_{\sigma(\widehat{A})} \lambda \, d\widehat{E}.$$

Im übrigen läßt sich natürlich auch alles weitere oben über Spektralintegrale gesagte analog auf die Spektralmaß-Formulierung übertragen.

Im nächsten Abschnitt lernen wir eine alternative Formulierung des Spektralsatzes für unbeschränkte normale Operatoren kennen. Es handelt sich dabei gewissermaßen um die Version der linearen Algebra, wenn dieser Begriff im weitesten Sinn verstanden wird; gleichzeitig wird dabei eine weitere besonders wichtige Eigenschaft normaler Operatoren erkennbar, die man mit einiger Berechtigung als deren wesentliches Charakteristikum auffassen darf.

4.4.2.6 Unitäre Äquivalenz und Multiplikationsoperatoren

Es wurde bereits erwähnt, daß Spektralsätze eine Verallgemeinerung der Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen auf unendlichdimensionale Vektorräume darstellen. Während das für kompakte Operatoren unmittelbar klar ist, muß man bei nicht kompakten Operatoren zumindest in den bisher diskutierten Varianten schon etwas genauer hinsehen. Im vorliegenden Abschnitt betrachten wir nun einen Sachverhalt, mit dessen Hilfe diese Analogie sehr viel deutlicher wird. Dazu beginnen wir mit einer auch anderweitig wichtigen

4.129 Definition: Es seien $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ Hilberträume, außerdem sei $\widehat{A}_1$ ein Operator auf ersterem und $\widehat{A}_2$ ein Operator auf letzterem. $\widehat{A}_1$ und $\widehat{A}_2$ heißen *unitär äquivalent* oder *isomorph*, wenn es einen isometrischen Operator $\widehat{U}$ von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{G}$ gibt, so daß $\operatorname{dom}\widehat{A}_1 = \widehat{U}\operatorname{dom}\widehat{A}_2$ und $\widehat{A}_2 = \widehat{U}\,\widehat{A}_1\widehat{U}^{-1}$ gilt.

Die Bedeutung dieses Begriffs belegt der nächste

4.130 Satz: *Sind $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ zwei Hilberträume und $\widehat{A}_1$ und $\widehat{A}_2$ zwei unitär äquivalente Operatoren auf $\mathcal{H}$ beziehungsweise auf $\mathcal{G}$, dann gilt folgendes.*

(i) *Ist $\widehat{A}_1$ symmetrisch beziehungsweise selbstadjungiert, dann gilt dies jeweils auch für $\widehat{A}_2$.*

(ii) *Die Spektren unitär äquivalenter hermitescher Operatoren fallen zusammen, und zwar nicht nur in ihrer Gesamtheit, sondern in jedem ihrer Teile, das heißt sowohl die Punktspektren als auch die kontinuierlichen Spektren sind jeweils gleich.*

(iii) *Ist $\widehat{E}_1$ das Spektralmaß des selbstadjungierten Operators $\widehat{A}_1$ und $\widehat{A}_2 = \widehat{U}\,\widehat{A}_1\,\widehat{U}^{-1}$ zu $\widehat{A}_1$ unitär äquivalent, dann ist $\widehat{E}_2 = \widehat{U}\,\widehat{E}_1\,\widehat{U}^{-1}$ das Spektralmaß von $\widehat{A}_2$.*

Beweis: (i) Folgt unmittelbar aus Definition 4.129.

(ii) Wiederum Definition 4.129 liefert

$$(\widehat{A}_2 - \lambda)\operatorname{dom}\widehat{A}_2 = (\widehat{U}\,\widehat{A}_1\,\widehat{U}^{-1} - \lambda\,\widehat{U}\,\widehat{U}^{-1})\operatorname{dom}\widehat{A}_1 = \widehat{U}\,(\widehat{A}_1 - \lambda)\operatorname{dom}\widehat{A}_1;$$

daraus folgt die Behauptung.
(iii) Sei $\widehat{E}_1$ das Spektralmaß des selbstadjungierten Operators $\widehat{A}_1$ und $\widehat{E}_2 = \widehat{U}\,\widehat{E}_1\widehat{U}^{-1}$, ausserdem seien $\psi_1, \varphi_1 \in \mathcal{H}$. Dann folgt aus

$$(\psi_1, \widehat{A}_1\varphi_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\,(\psi_1, \widehat{E}_1\varphi_1)$$

mit $\psi_2 = \widehat{U}\,\psi_1$ und $\varphi_2 = \widehat{U}\,\varphi_1$

$$(\psi_1, \widehat{U}\,\widehat{A}_1\widehat{U}^{-1}\varphi_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\,(\psi_1, \widehat{U}\,\widehat{E}_1\widehat{U}^{-1}\varphi_1)$$

und damit

$$(\psi_2, \widehat{A}_2\,\varphi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\,(\psi_2, \widehat{E}_2\,\varphi_2). \qquad \square$$

Die wesentlichen Eigenschaften eines selbstadjungierten Operators lassen sich demnach auf alle zu diesem unitär äquivalente Operatoren übertragen.

Das wichtigste Beispiel hierzu betrachten wir nun genauer, wofür wir zunächst einen weiteren neuen Begriff einführen.

4.131 Definition: Es seien $(\mathrm{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum und φ eine μ-meßbare Funktion. Dann nennt man die Abbildung $\widehat{M}_\varphi : \mathscr{L}^2(\mathrm{M}, \mu, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{L}^2(\mathrm{M}, \mu, \mathbb{C})$ mit $\widehat{M}_\varphi f = \varphi f$ für alle $f \in \mathscr{L}^2(\mathrm{M}, \mu, \mathbb{C})$ *Multiplikationsoperator* auf $\mathscr{L}^2(\mathrm{M}, \mu, \mathbb{C})$.

Ausführlich geschrieben bedeutet das $\widehat{M}_\varphi f(x) = \varphi(x)\, f(x)$ für alle $x \in \mathrm{M}$. Daran erkennt man unmittelbar die im folgenden Hilfssatz aufgelisteten Eigenschaften der Multiplikationsoperatoren.

4.132 Lemma: *Für jede μ-meßbare Funktion $\varphi : \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt*

(i) $\widehat{M}_\varphi$ *ist linear;*

(ii) $\widehat{M}_\varphi^* = \widehat{M}_{\overline{\varphi}}$*;*

(iii) $\widehat{M}_\varphi$ *ist normal;*

(iv) $\widehat{M}_\varphi$ *ist genau dann selbstadjungiert, wenn φ reellwertig ist.*

Für spezielle Funktionen φ lassen sich leicht weitere Eigenschaften nachweisen. Beispielsweise ist $\widehat{M}_\varphi$ für $\varphi \in \mathscr{L}^\infty(\mathrm{M}, \mu, \mathbb{C})$ beschränkt und für $\varphi \in C_0(\mathrm{M})$ sogar kompakt; in beiden Fällen gilt $\|\widehat{M}_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$, das heißt, hier ist $\widehat{M}_\varphi$ isometrisch. Ganz allgemein gilt dagegen der nächste

4.133 Satz: *Für jede meßbare Funktion φ ist $\sigma(\widehat{M}_\varphi) = \operatorname{ran\,ess} \varphi$.*

Beweis: Ist $\lambda \in \rho(\widehat{M}_\varphi)$, dann gibt es für alle μ-meßbaren Funktionen χ und μ-fast alle $t \in \mathrm{M}$ ein $f \in \mathscr{L}^2(\mathrm{M}, \mu, \mathbb{C})$ mit

$$[\,(\,\widehat{M}_\varphi - \lambda\,)\,f\,](t) = (\,\varphi(t) - \lambda\,)\,f(t) = \chi(t)$$

Das ist formal äquivalent zu

$$f(t) = (\,\varphi(t) - \lambda\,)^{-1}\,\chi(t),$$

das heißt, die gewünschte Funktion f existiert, wenn $\varphi(t) - \lambda \neq 0$ für μ-fast alle $t \in \mathrm{M}$ und

$$\int |\,(\,\varphi(t) - \lambda\,)^{-1}\,\chi(t)\,|^2\,d\mu < \infty.$$

Wegen

$$\int |\,(\,\varphi(t) - \lambda\,)^{-1}\,\chi(t)\,|^2\,d\mu \leqq \|\,(\,\varphi - \lambda\,)^{-1}\,\|_\infty^2 \int |\chi(t)|^2\,d\mu$$

gilt in diesem Fall $\|\,(\,\varphi - \lambda\,)^{-1}\,\|_\infty < \infty$, also $|\,\varphi(t) - \lambda\,| \geqq \|\,(\,\varphi - \lambda\,)^{-1}\,\|_\infty$ und damit beispielsweise für beliebiges $a > 1$

$$\mu\left(\left\{\, t \in \mathrm{M} \;\middle|\; |\,\varphi(t) - \lambda\,| < \frac{1}{a}\,\|\,(\,\varphi - \lambda\,)^{-1}\,\|_\infty \right\}\right) = 0.$$

Daraus folgt $\lambda \notin \operatorname{ran\,ess}\varphi$ und somit $\sigma(\widehat{M}_\varphi) \supset \operatorname{ran\,ess}\varphi$. Gilt umgekehrt

$$\mu(\{\, t \in \mathrm{M} \mid |\,\varphi(t) - \lambda\,| < \delta\,\}) = 0$$

für ein $\delta > 0$, dann ist $\|\,(\,\varphi(t) - \lambda\,)^{-1}\,\|_\infty \leqq 1/\delta$ und damit

$$\int |\,(\,\varphi(t) - \lambda\,)^{-1}\,\chi(t)\,|^2\,d\mu \leqq \frac{1}{\delta} \int |\chi(t)|^2\,d\mu < \infty.$$

Folglich gilt in diesem Fall $\lambda \in \rho(\widehat{M}_\varphi)$ und somit $\sigma(\widehat{M}_\varphi) \subset \operatorname{ran\,ess}\varphi$. □

Als unmittelbare Folge aus Satz 4.133 und Corollar 4.46 erhält man ein weiteres

4.134 Corollar *Ein Multiplikationsoperator $\widehat{M}_\varphi$ ist genau dann unbeschränkt, wenn φ unbeschränkt ist.*

Wir benötigen außerdem ein paar Hilfssätze; der erste davon ist ein Spezialfall von Satz 4.9.

4.135 Lemma: *Ist $\widehat{N}$ ein beschränkter normaler Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $p \in \mathbb{C}[X, Y]$, dann gilt $\sigma(p(\widehat{N}, \widehat{N}^*)) = p(\sigma(\widehat{N}), \sigma(\widehat{N}^*))$.*

Beweis: Wir betrachten die Algebra $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ der beschränkten linearen Operatoren auf $\mathcal{H}$ mit Hintereinanderausführen als Operatorprodukt sowie deren kommutative Unteralgebra $\mathscr{P}(\widehat{N}, \widehat{N}^*) = \{\, p(\widehat{N}, \widehat{N}^*) \mid p \in \mathbb{C}[X, Y]\,\}$. Weiter definieren wir $\widehat{A} = \frac{1}{2}(\,\widehat{N} + \widehat{N}^*\,)$ und

$\widehat{B} = -\frac{i}{2}(\widehat{N} - \widehat{N}^*)$. Dann gilt $\widehat{A}, \widehat{B} \in \mathscr{P}(\widehat{N}, \widehat{N}^*)$ und $\widehat{N} = \widehat{A} + i\,\widehat{B}$ und nach Corollar 3.10 (i) damit $\widehat{N}^* = \widehat{A} - i\,\widehat{B}$. Für alle $f \in \mathscr{A}^*$ und alle $p(\widehat{N}, \widehat{N}^*) \in \mathscr{P}(\widehat{N}, \widehat{N}^*)$ gilt

$$f(p(\widehat{N}, \widehat{N}^*) = p(f(\widehat{N}), f(\widehat{N}^*));$$

$$f(\widehat{A}) = \frac{1}{2}[\,f(\widehat{N}) + f(\widehat{N}^*)\,];$$

$$f(\widehat{B}) = -\frac{i}{2}[\,f(\widehat{N}) - f(\widehat{N}^*)\,].$$

Daraus folgt für die zugehörigen Spektren[54]

$$\sigma(p(\widehat{N}, \widehat{N}^*)) = \{\, p(f(\widehat{N}), f(\widehat{N}^*)) \mid f \in \mathscr{A}^* \,\};$$

$$\sigma(\widehat{A}\,) = \{\, f(\widehat{A}\,) \mid f \in \mathscr{A}^* \,\};$$

$$\sigma(\widehat{B}) = \{\, f(\widehat{B}) \mid f \in \mathscr{A}^* \,\}.$$

Nun sei $\mathfrak{T}$ die Menge aller kommutativen Unteralgebren von $\mathscr{L}(\mathcal{H})$; diese enthält $\mathscr{P}(\widehat{N}, \widehat{N}^*)$ und ist durch die Inklusionsrelation teilgeordnet. Da jede $\subset$-Kette in $\mathfrak{T}$ in Gestalt der Vereinigung aller in ihr enthaltenen Unteralgebren eine obere Schranke enthält, gibt es nach dem Zornschen Lemma in $\mathfrak{T}$ ein maximales Element $\mathscr{A}$, also eine maximale, $\widehat{N}$ und $\widehat{N}^*$ enthaltende abgeschlossene kommutative Unteralgebra von $\mathscr{L}(\mathcal{H})$. Da $\widehat{N}$ beschränkt ist, ist außerdem jedes Element von $\mathscr{P}(\widehat{N}, \widehat{N}^*)$ normal. Folglich liefert das soeben beschriebene Verfahren ausgehend erstens von irgendeinem nichtkonstanten Element $p(\widehat{N}, \widehat{N}^*)$ von $\mathscr{P}(\widehat{N}, \widehat{N}^*)$ oder zweitens von $\widehat{A}$ oder drittens von $\widehat{B}$ anstelle von $\widehat{N}$ jeweils wieder dieselbe maximale Algebra $\mathscr{A}$. Da $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ selbstadjungiert sind, liegen deren Spektren nach Satz 4.39 ganz auf der reellen Achse; daher gilt $f(\widehat{A}\,), f(\widehat{B}) \in \mathbb{R}$ und damit $f(\widehat{N}^*) = \overline{f(\widehat{N})}$. Nach Satz 4.26 (ii) folgt dann analog zu oben

$$\begin{aligned}\sigma(p(\widehat{N}, \widehat{N}^*)) &= \{\, p(f(\widehat{N}), \overline{f(\widehat{N})}) \mid f \in \mathscr{A}^* \,\}\\ &= \{\, p(\zeta, \overline{\zeta}) \mid \zeta \in \sigma(\widehat{N}) \,\} = p(\sigma(\widehat{N}), \sigma(\widehat{N})^*) = p(\sigma(\widehat{N}), \sigma(\widehat{N}^*)). \qquad \square\end{aligned}$$

Bevor wir den zweiten Hilfssatz beweisen, verschaffen wir uns drei neue Begriffe, die spezielle Situationen im Zusammenhang mit invarianten Unterräumen umschreiben.

4.136 Definition: Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{U}$ ein Unterraum in und $\widehat{A}$ ein beschränkter Operator auf $\mathcal{H}$.

(i) Ist sowohl $\mathcal{U}$ als auch $\mathcal{U}^\perp$ invariant unter $\widehat{A}$, dann sagt man, $\mathcal{U}$ *reduziere* $\widehat{A}$ oder auch, $\mathcal{U}$ sei ein *reduzierender Unterraum* für $\widehat{A}$.

[54] Das ergibt sich aus folgendem Satz aus der Theorie der Banach-Algebren: *Ist $\mathcal{A}$ eine beliebige komplexe Banach-Algebra mit Einselement und $\mathcal{B}$ eine maximale kommutative Unteralgebra, dann gilt $\sigma(x) = \{\, f(x) \mid f \in \mathcal{B}^* \,\}$ für jedes $x \in \mathcal{B}$.* Siehe hierzu beispielsweise [294].

(ii) $\widehat{A}$ heißt *reduzierbar*, wenn es in $\mathcal{H}$ einen $\widehat{A}$ reduzierenden Unterraum gibt.
(iii) $\widehat{A}$ heißt *reduktiv*, wenn jeder Unterraum von $\mathcal{H}$ reduzierender Unterraum für $\widehat{A}$ ist.

Das folgende Lemma liefert nützliche Zusammenhänge zwischen Invarianz und Reduzierbarkeit.

4.137 Lemma: *$\mathcal{U}$ sei ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums $\mathcal{H}$.*
(i) Ist $\widehat{P}$ der orthogonale Projektor auf $\mathcal{U}$, dann wird $\widehat{A}$ genau dann von $\mathcal{U}$ reduziert, wenn $\widehat{P}\,\widehat{A} \subseteqq \widehat{A}\,\widehat{P}$.
(ii) $\mathcal{U}$ ist genau dann invariant unter dem beschränkten Operator $\widehat{A}$, wenn $\mathcal{U}^\perp$ invariant unter $\widehat{A}^*$ ist.
(iii) $\mathcal{U}$ reduziert $\widehat{A}$ genau dann, wenn $\mathcal{U}$ sowohl $\widehat{A}$- als auch $\widehat{A}^*$-invariant ist.
(iv) Ist $\mathcal{U}$ ein $\widehat{A}$ reduzierender Unterraum, dann gilt $(\,\widehat{A} \restriction \mathcal{U}\,)^* = \widehat{A}^* \restriction \mathcal{U}$.
(v) Ist $\widehat{N}$ ein beschränkter normaler Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $\mathcal{U}$ ein $\widehat{N}$-invarianter Unterraum von $\mathcal{H}$, dann ist $\widehat{N} \restriction \mathcal{U}$ genau dann normal, wenn $\widehat{N}$ durch $\mathcal{U}$ reduziert wird.

Beweis: (i) „$\Longrightarrow$“: Betrachte zu $\psi \in \mathcal{H}$ die eindeutig bestimmte Zerlegung $\psi = \psi_\parallel + \psi_\perp$ mit $\psi_\parallel \in \mathcal{U}$ und $\psi_\perp \in \mathcal{U}^\perp$. Für $\psi \in \mathcal{U}$ gilt dann $\psi = \psi_\parallel$, mit $\widehat{A}\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$ außerdem $\widehat{A}\,\psi \in \mathcal{U}$ und somit
$$\widehat{P}\,\widehat{A}\psi = \widehat{A}\,\psi = \widehat{A}\,\widehat{P}\,\psi.$$
Daraus folgt $\widehat{P}\,\widehat{A} \subseteqq \widehat{A}\,\widehat{P}$.
„$\Longleftarrow$“: Aus $\widehat{P}\,\widehat{A} \subseteqq \widehat{A}\,\widehat{P}$ folgt $\widehat{P}\,\widehat{A}\psi = \widehat{A}\,\widehat{P}\,\psi$ für alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$. Dann gilt einerseits für $\psi \in \mathcal{U}$
$$\widehat{A}\psi = \widehat{A}\,\widehat{P}\,\psi = \widehat{P}\,\widehat{A}\psi \in \mathcal{U}$$
und damit $\widehat{A}\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$, andererseits für $\psi \in \mathcal{U}^\perp$
$$\widehat{A}\psi = \widehat{A}(\,1 - \widehat{P}\,)\,\psi = (\,1 - \widehat{P}\,)\,\widehat{A}\psi \in \mathcal{U}^\perp,$$
und damit $\widehat{A}\mathcal{U}^\perp = \mathcal{U}^\perp$.
(ii) „$\Longrightarrow$“: Ist $\mathcal{U}$ invariant unter $\widehat{A}$, dann gilt $(\widehat{A}\,\psi, \varphi) = (\psi, \widehat{A}^*\varphi) = 0$ für alle $\psi \in \mathcal{U}$ und alle $\varphi \in \mathcal{U}^\perp$, folglich ist $\mathcal{U}^\perp$ invariant unter $\widehat{A}^*$.
„$\Longleftarrow$“: analog.
(iii) „$\Longrightarrow$“: Gilt $\widehat{A}\mathcal{U} \subseteqq \mathcal{U}$ und $\widehat{A}\mathcal{U}^\perp \subseteqq \mathcal{U}^\perp$, dann folgt $\widehat{A}^*\,\mathcal{U}^{\perp\perp} \subseteqq \mathcal{U}^{\perp\perp}$ nach (ii); nach Voraussetzung gilt jedoch $\mathcal{U}^{\perp\perp} = \mathcal{U}$ und damit $\widehat{A}^*\,\mathcal{U} \subseteqq \mathcal{U}$.
„$\Longleftarrow$“: Gilt $\widehat{A}\mathcal{U} \subseteqq \mathcal{U}$ und $\widehat{A}^*\,\mathcal{U} \subseteqq \mathcal{U}$, dann folgt nach (ii) $\widehat{A}^{**}\,\mathcal{U}^\perp \subseteqq \mathcal{U}^\perp$; nach Voraussetzung gilt jedoch $\widehat{A}^{**} = \widehat{A}$ und damit $\widehat{A}\mathcal{U}^\perp \subseteqq \mathcal{U}^\perp$.
(iv) Gilt $\widehat{A}\mathcal{U} \subseteqq \mathcal{U}$ und $\widehat{A}\mathcal{U}^\perp \subseteqq \mathcal{U}^\perp$, dann folgt für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{U}$
$$((\widehat{A} \restriction \mathcal{U}\,)\,\psi, \varphi) = (\widehat{A}\,\psi, \varphi) = (\psi, \widehat{A}^*\varphi) = (\psi, (\widehat{A}^* \restriction \mathcal{U}\,)\,\varphi).$$

(v) „$\Longrightarrow$“: Mit $(\widehat{N} \restriction \mathcal{U})^* (\widehat{N} \restriction \mathcal{U}) = (\widehat{N} \restriction \mathcal{U})(\widehat{N} \restriction \mathcal{U})^*$ ist nach (iv) auch $(\widehat{N}^* \widehat{N}) \restriction \mathcal{U} = (\widehat{N}\,\widehat{N}^*) \restriction \mathcal{U}$. Für alle $\psi \in \mathcal{U}$ und alle $\varphi \in \mathcal{U}^\perp$ gilt dann nach Voraussetzung

$$(\widehat{N}\psi, \widehat{N}\varphi) = (\psi, \widehat{N}^*\widehat{N}\varphi) = (\psi, \widehat{N}\,\widehat{N}^*\varphi) = (\widehat{N}^*\psi, \widehat{N}^*\varphi) = 0.$$

Nach (ii) ist $\widehat{N}^*\varphi \in \mathcal{U}^\perp$, also $\widehat{N}^*\psi \in \mathcal{U}$ und $\mathcal{U}$ somit $\widehat{N}^*$-invariant. Nach (iii) wird dann $\widehat{N}$ durch $\mathcal{U}$ reduziert.
„$\Longleftarrow$“: Folgt unmittelbar aus (iv). □

Der nächste Hilfssatz greift die in Abschnitt 2.3.1 beschriebene kanonische Abbildung zwischen gewöhnlichen und direkten Summen orthogonaler Unterräume von Hilberträumen wieder auf und erweitert diese auf topologische und damit unendliche direkte Summen.

4.138 Lemma: *Γ sei eine Ordinalzahl und $(\mathcal{V}_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ eine Familie paarweise orthogonaler Unterräume des unitären Vektorraums $\mathcal{V}$. Dann wird durch $\Phi : \bigoplus^T_{\gamma<\Gamma} \mathcal{V}_\gamma \longrightarrow \overline{\sum_{\gamma<\Gamma} \mathcal{V}_\gamma}$ mit*

$$\Phi((\psi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}) = \sum_{\gamma<\Gamma} \psi_\gamma$$

eine unitäre Abbildung definiert.

Beweis: Nach Voraussetzung ist Φ ein Isomorphismus; außerdem gilt für alle $(\psi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}, (\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma} \in \bigoplus^T_{\gamma<\Gamma} \mathcal{V}_\gamma$

$$\begin{aligned}(\Phi((\psi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}), \Phi((\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma})) &= \left(\sum_{\gamma<\Gamma} \psi_\gamma, \sum_{\lambda<\Gamma} \varphi_\lambda\right)\\ &= \sum_{\gamma<\Gamma}\sum_{\lambda<\Gamma} (\psi_\gamma, \varphi_\lambda) = \sum_{\gamma<\Gamma} (\psi_\gamma, \varphi_\gamma)\\ &= ((\psi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}, (\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}).\end{aligned}$$

Mit Satz 3.40 folgt die Behauptung. □

Damit wenden wir uns nun der zu Beginn des Abschnitts angedeuteten alternativen Version des Spektralsatzes zu. Deren allgemeine Fassung muß jedoch noch ein klein wenig warten; stattdessen sei zunächst der Spezialfall für beschränkte normale Operatoren vorgezogen [207][55], was gleichzeitig den vierten der Hilfssätze darstellt, von denen vorhin die Rede war.

4.139 Lemma: *Ist $\widehat{N}$ ein beschränkter normaler Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann gibt es einen Maßraum $(\mathsf{M}, \mathfrak{S}, \mu)$ mit endlichem Maß μ, eine Funktion $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}, \mu, \mathbb{C})$ und einen unitären Operator $\widehat{U} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathscr{L}^2(\mathsf{M}, \mu, \mathbb{C})$, sodaß $\widehat{U}\,\widehat{N}\,\widehat{U}^{-1} = \widehat{M}_f$.*

[55] Vergleiche auch [57].

Beweis: 1. Fall: Wir nehmen zunächst an, es gebe einen Vektor $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\|\psi\| = 1$ und

$$\overline{\operatorname{span}\{\widehat{N}^m\,\widehat{N}^n\,\psi \mid m, n \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{H}. \tag{4.97}$$

a) Der erste Schritt ist die Konstruktion des Operators $\widehat{U}$ für einen speziellen Unterraum von $\mathscr{L}^2$. Nach Satz 4.19 ist $\sigma(\widehat{N})$ kompakt. Für

$$P(\sigma(\widehat{N})) = \{\, f \in C(\sigma(\widehat{N})) \mid f(\zeta) = p(\zeta, \overline{\zeta}\,),\ p \in \mathbb{C}[X, Y]\,\}$$

gilt daher nach dem Satz von Stone-Weierstraß[56] $\overline{P(\sigma(\widehat{N}))} = C(\sigma(\widehat{N}))$ in der Norm $\|\ \|_\infty$. Nun sei $g \in P(\sigma(\widehat{N}))^*$ mit $g(f) = (p(\widehat{N}, \widehat{N}^*)\,\psi, \psi)$ für alle $f \in P(\sigma(\widehat{N}))$, dann ist nach Ungleichung 2.142 und Satz 4.27 für alle $p \in P(\sigma(\widehat{N}))$

$$|g(p)| \leqq \|\, p(\widehat{N}, \widehat{N}^*)\,\|\,\|\psi\| = \|\, p(\widehat{N}, \widehat{N}^*)\,\| = r(p(\widehat{N}, \widehat{N}^*))$$

und mit Lemma 4.135 folgt weiter

$$|g(p)| \leqq \sup\{\, |\zeta| \mid \zeta \in \sigma(p(\widehat{N}, \widehat{N}^*))\,\} = \sup\{\, |p(\zeta, \overline{\zeta}\,)| \mid \zeta \in \sigma(\widehat{N})\,\} = \|p\|_\infty.$$

Damit gilt sogar $g \in P(\sigma(\widehat{N}))'$, und folglich gibt es zu g eine eindeutig bestimmte beschränkte Erweiterung G auf $C(\sigma(\widehat{N}))$. Nun sei $A(\sigma(\widehat{N})) = \{\, f \in C(\sigma(\widehat{N})) \mid f \geqq 0\,\}$, dann gibt es zu jedem $f \in A(\sigma(\widehat{N}))$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $p_\varepsilon \in P(\sigma(\widehat{N}))$ mit $p_\varepsilon \geqq 0$ und $|\,g(p_\varepsilon) - g(f)\,| < \varepsilon$. Der Satz von Stone-Weierstraß garantiert, daß es ein $q_\varepsilon \in \mathbb{R}[X, Y]$ gibt mit $|\,q_\varepsilon^2(x, y) - p_\varepsilon(\zeta, \overline{\zeta}\,)\,| < \varepsilon$ für alle $\zeta = x + i\,y \in \sigma(\widehat{N})$. Setzen wir wieder $\widehat{A} = \frac{1}{2}\,(\,\widehat{N} + \widehat{N}^*\,)$ und $\widehat{B} = -\frac{i}{2}\,(\,\widehat{N} - \widehat{N}^*\,)$, dann gilt

$$\begin{aligned} |\,(q_\varepsilon^2(\widehat{A}, \widehat{B})\,\psi, \psi) - g(p_\varepsilon)\,| &= |\,((q_\varepsilon^2(\widehat{A}, \widehat{B}) - p(\widehat{N}, \widehat{N}^*))\,\psi, \psi)\,| \\ &\leqq \|\, q_\varepsilon^2(\widehat{A}, \widehat{B}) - p(\widehat{N}, \widehat{N}^*)\,\| = r(\,q_\varepsilon^2(\widehat{A}, \widehat{B}) - p(\widehat{N}, \widehat{N}^*)) \end{aligned}$$

und mit $\zeta = x + i\,y$ weiter nach Lemma 4.135

$$|\,(q_\varepsilon^2(\widehat{A}, \widehat{B})\,\psi, \psi) - g(p_\varepsilon)\,| = \sup_{\zeta \in \sigma(\widehat{N})} |\,q_\varepsilon(x, y) - p_\varepsilon(\zeta, \overline{\zeta}\,)\,| < \varepsilon.$$

Beides zusammen liefert für alle $f \in A(\sigma(\widehat{N}))$

$$|\,(q_\varepsilon^2(\widehat{A}, \widehat{B})\,\psi, \psi) - g(f)\,| \leqq |\,(q_\varepsilon^2(\widehat{A}, \widehat{B})\,\psi, \psi) - g(p_\varepsilon)\,| + |\,g(p_\varepsilon) - g(f)\,| \leqq 2\,\varepsilon$$

[56]Der Satz von Stone-Weierstraß macht folgende Aussage: X *sei ein kompakter topologischer Raum und A eine Unteralgebra von* $C(\mathrm{X}, \mathbb{C})$*, sodaß*

(i) es zu $x \neq y \in \mathrm{X}$ *ein* $f \in A$ *gibt mit* $f(x) \neq f(y)$*,*

(ii) aus $f \in A$ *stets auch* $\overline{f} \in A$ *folgt,*

dann ist $\overline{A} = C(\mathrm{X}, \mathbb{C})$. Er wurde von Stone entdeckt [358] - [360], stellt eine sehr weitgehende Verallgemeinerung des Weierstraßschen Approximationssatzes dar und bildet unter anderem eine wichtige Grundlage der Approximationstheorie.

und damit

$$g(f) + 2\,\varepsilon \geqq (q_\varepsilon^2(\widehat{A}, \widehat{B})\,\psi, \psi) \geqq 0,$$

das heißt, es gilt $g(f) \geqq 0$ für alle $f \in A(\sigma(\widehat{N}))$. Folglich gibt es ein endliches Maß μ auf der σ-Algebra $\mathfrak{B}(\sigma(\widehat{N}))$ der Borelmengen in $\sigma(\widehat{N})$ mit $g(f) = \int f\,d\mu$ für alle $f \in C(\sigma(\widehat{N}))$ [57]. Mit μ wird $P(\sigma(\widehat{N}))$ zu einem Unterraum von $\mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N}), \mu)$. Wir definieren nun den linearen Operator $\widehat{U}_0 : \mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N}), \mu) \longrightarrow \mathcal{H}$ durch $\operatorname{dom} \widehat{U}_0 = P(\sigma(\widehat{N}))$ und $\widehat{U}_0\,p = p(\widehat{N}, \widehat{N}^*)\,\psi$ für alle $p \in P(\sigma(\widehat{N}))$. Mit diesem gilt für alle $p \in P(\sigma(\widehat{N}))$

$$\begin{aligned} \|\,\widehat{U}_0\,p\,\|_2^2 = \int |p|^2\,d\mu = g(|p|^2) &= (p(\widehat{N}, \widehat{N}^*)^* p(\widehat{N}, \widehat{N}^*)\,\psi, \psi) \\ &= (p(\widehat{N}, \widehat{N}^*)\,\psi, p(\widehat{N}, \widehat{N}^*)\,\psi) = \|\,p(\widehat{N}, \widehat{N}^*)\,\psi\,\|^2; \end{aligned}$$

somit ist $\widehat{U}_0$ isometrisch und daher auch injektiv, und es gibt folglich auf $\operatorname{dom} \widehat{U}_0$ einen inversen Operator $\widehat{U}_0^{-1}$. Hiermit und mit $\mathrm{id}(\zeta) = \zeta$ für alle $\zeta \in \sigma(\widehat{N})$ gilt für alle $p \in P(\sigma(\widehat{N}))$

$$\widehat{U}_0^{-1}\widehat{N}\,\widehat{U}_0\,p = \widehat{U}_0^{-1}\widehat{N}\,p(\widehat{N}, \widehat{N}^*)\,\psi = \widehat{U}_0^{-1}\widehat{U}_0\,(\mathrm{id}\,p) = \mathrm{id}\,p = \widehat{M}_{\mathrm{id}}\,p. \tag{4.98}$$

b) Als nächsten Schritt gilt es, (4.98) auf ganz $\mathscr{L}^2$ auszudehnen. Wie oben gezeigt gilt erstens $\overline{P(\sigma(\widehat{N}))} = C(\sigma(\widehat{N}))$ in der Norm $\|\ \|_\infty$, zweitens ist $\sigma(\widehat{N})$ kompakt, und drittens ist μ endlich, somit gilt $\overline{P(\sigma(\widehat{N}))} = C(\sigma(\widehat{N}))$ auch in der Norm $\|\ \|_2$. Da nach Satz 2.87 außerdem $\overline{C(\sigma(\widehat{N}))} = \mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N}), \mu, \mathbb{C})$, folgt $\overline{P(\sigma(\widehat{N}))} = \mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N}), \mu, \mathbb{C})$ in der Norm $\|\ \|_2$. Folglich kann man den Operator $\widehat{U}_0$ in eindeutiger Weise stetig zu einem unitären Operator $\widehat{U}$ auf ganz $\mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N}), \mu, \mathbb{C})$ erweitern mit

$$\operatorname{ran} \widehat{U} = \overline{\{\,p(\widehat{N}, \widehat{N}^*)\,\psi \mid p \in P(\sigma(\widehat{N}))\,\}} = \overline{\operatorname{span}\{\widehat{N}^m\,\widehat{N}^n\,\psi \mid m, n \in \mathbb{N}\,\}} = \mathcal{H}.$$

Aus (4.98) wird

$$\widehat{U}^{-1}\widehat{N}\,\widehat{U} = \widehat{M}_{\mathrm{id}},$$

das heißt, $\widehat{N}$ ist unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator $\widehat{M}_{\mathrm{id}}$ der identischen Funktion id auf $\sigma(\widehat{N})$.

2. Fall: Nun nehmen wir an, es gebe keinen Vektor $\psi \in \mathcal{H}$ mit (4.97). Zu jedem $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\|\psi\| = 1$ ist dann $\mathcal{A}_\psi = \overline{\operatorname{span}\{\widehat{N}^m\,\widehat{N}^n\,\psi \mid m, n \in \mathbb{N}\,\}}$ ein echter Unterraum von $\mathcal{H}$, und dabei wird $\widehat{N}$ jeweils von $\mathcal{A}_\psi$ reduziert.

a) Zunächst konstruieren wir eine Familie paarweise orthogonaler Unterräume von $\mathcal{H}$, sodaß jeder einzelne davon für sich dem soeben beschriebenen 1. Fall entspricht. Dazu betrachten wir die Menge $\mathfrak{A} = \{\,\mathcal{A}_\psi \mid \psi \in \mathcal{H},\ \|\psi\| = 1\,\}$ aller Unterräume obigen Typs sowie die Menge $\mathfrak{M} = \left\{\,\bigoplus^T \mathcal{A}_\psi \mid \mathcal{A}_\psi \in \mathfrak{A}\,\right\}$ aller orthogonaler topologischer direkter Summen aus solchen Unterräumen. $\mathfrak{M}$ ist nichtleer und durch die Inklusionsrelation teilgeordnet. Ist $(\mathcal{M}_\alpha)$ eine

[57] Das ist eine Konsequenz aus der maßtheoretischen Version des Rieszschen Darstellungssatzes; siehe dazu Anmerkung 115 aus S. 131.

Kette in $\mathfrak{M}$, dann gilt $\bigcup \mathcal{M}_\alpha \in \mathfrak{M}$, das heißt, jede Kette in $\mathfrak{M}$ enthält ein maximales Element. Nach dem Zornschen Lemma gibt es folglich ein maximales Element $\mathcal{M}$ in $\mathfrak{M}$, für das zudem $\mathcal{M}^\perp = \{0\}$ und damit $\mathcal{H} = \mathcal{M}$ gilt. Insgesamt liefert das eine transfinite Folge $(\psi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ von Vektoren in $\mathcal{H}$ mit $\|\psi\|_\gamma = 1$ für alle $\gamma < \Gamma$ und dazu eine ebenfalls transfinite Folge $(\mathcal{M}_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ paarweise orthogonaler Unterräume von $\mathcal{H}$ mit $\bigoplus\limits_{\gamma<\Gamma}^{T} \mathcal{M}_\gamma = \mathcal{H}$, wobei jeder dieser Unterräume für sich genommen die Voraussetzung vom 1. Fall erfüllt. Darüberhinaus ist $\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma$ für jedes $\gamma < \Gamma$ nach Lemma 4.137 (iv) normal; wie im 1. Fall gezeigt gibt es daher für jedes $\gamma < \Gamma$ ein endliches Maß μ_γ auf $\mathfrak{B}(\sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma))$ und einen unitären Operator $\widehat{U}_\gamma : \mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma), \mu_\gamma, \mathbb{C})$ mit

$$\widehat{U}_\gamma^{-1} \, (\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma) \, \widehat{U}_\gamma = \widehat{M}_{\mathrm{id}_\gamma},$$

wobei id_γ die identische Funktion auf $\sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma)$ ist. Dann folgt für den unitären Operator $\widehat{U}_0 = \bigoplus\limits_{\gamma<\Gamma} \widehat{U}_\gamma : \bigoplus\limits_{\gamma<\Gamma}^{T} \mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma), \mu_\gamma, \mathbb{C}) \longrightarrow \bigoplus\limits_{\gamma<\Gamma}^{T} \mathcal{M}_\gamma$ und den Operator
$\widehat{N} = \bigoplus\limits_{\gamma<\Gamma} \widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma$ auf $\bigoplus\limits_{\gamma<\Gamma}^{T} \mathcal{M}_\gamma$

$$\widehat{U}_0^{-1} \, \widehat{N} \, \widehat{U}_0 = \bigoplus_{\gamma<\Gamma} \widehat{M}_{\mathrm{id}_\gamma}.$$

b) Nun zeigen wir, daß es einen unitären Operator $\widehat{A}$ von $\bigoplus\limits_{\gamma<\Gamma}^{T} \mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma), \mu_\gamma, \mathbb{C})$ nach $\mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N}), \mu, \mathbb{C})$ gibt. Nach Lemma 4.138 existiert ein unitärer Operator

$$\widehat{V} : \bigoplus_{\gamma<\Gamma}^{T} \mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma), \mu_\gamma, \mathbb{C}) \longrightarrow \overline{\sum_{\gamma<\Gamma} \mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma), \mu_\gamma, \mathbb{C})}.$$

Weiter sei der Operator

$$\widehat{W}_0 : \sum_{\gamma<\Gamma} \mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma), \mu_\gamma, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N}), \mu, \mathbb{C})$$

definiert durch

$$(\widehat{W}_0 f)(\zeta) = f_\alpha(\zeta)$$

für alle $\zeta \in \sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\alpha)$, alle $\alpha < \Gamma$ und alle $f = \sum\limits_{\gamma<\Gamma} f_\gamma \in \sum\limits_{\gamma<\Gamma} \mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma), \mu_\gamma, \mathbb{C})$; mit diesem gilt

$$\begin{aligned} \|\widehat{W}_0 f\|_2^2 &= \int |(\widehat{W}_0 f)(\zeta)|^2 \, d\zeta = \int \left| \widehat{W}_0 \sum_{\gamma<\Gamma} f_\gamma(\zeta) \right|^2 d\zeta \\ &= \int \left| \sum_{\gamma<\Gamma} (\widehat{W}_0 f_\gamma)(\zeta) \right|^2 d\zeta = \int \left| \sum_{\gamma<\Gamma} f_\gamma(\zeta) \right|^2 d\zeta = \left\| \sum_{\gamma<\Gamma} f_\gamma(\zeta) \right\|_2^2 = \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

das heißt, $\widehat{W_0}$ ist isometrisch, nach Konstruktion zudem surjektiv und nach Satz 3.40 folglich unitär. Aus dem Operator $\widehat{W_0}$ wird durch stetige Fortsetzung ein unitären Operator

$$\widehat{W} : \overline{\sum_{\gamma<\Gamma} \mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma), \mu_\gamma, \mathbb{C})} \longrightarrow \mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N}), \mu, \mathbb{C}),$$

und man erhält den gewünschten unitären Operator durch Zusammenbau gemäß $\widehat{A} = \widehat{W}\,\widehat{V}$.
c) Als nächstes weisen wir die unitäre Äquivalenz von $\bigoplus\limits_{\gamma<\Gamma} \widehat{M}_{\mathrm{id}_\gamma}$ und $\widehat{M}_{\mathrm{id}}$ nach. Für alle $f, g \in \sum\limits_{\gamma<\Gamma} \mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma), \mu_\gamma, \mathbb{C})$ und alle $\zeta \in \sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\alpha) \in (\sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma))_{\gamma<\Gamma}$ ist

$$(\,\widehat{M}_f\,\widehat{W} g\,)(\zeta) = (\,\widehat{M}_f\, g_\alpha\,)(\zeta) = f(\zeta)\, g_\alpha(\zeta) = (f \restriction \sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\alpha)))(\zeta)\, g_\alpha(\zeta) = f_\alpha(\zeta)\, g_\alpha(\zeta)$$

Außerdem gilt

$$\bigoplus_{\gamma<\Gamma} \widehat{M}_{f_\gamma}\,\widehat{V}^{-1} g = \bigoplus_{\gamma<\Gamma} \widehat{M}_{f_\gamma}\, g_\gamma = \bigoplus_{\gamma<\Gamma} f_\gamma\, g_\gamma,$$

also auch

$$\widehat{V} \bigoplus_{\gamma<\Gamma} \widehat{M}_{f_\gamma}\,\widehat{V}^{-1} g = \sum_{\gamma<\Gamma} f_\gamma\, g_\gamma,$$

und damit

$$\left[\widehat{W}\,\widehat{V} \bigoplus_{\gamma<\Gamma} \widehat{M}_{f_\gamma}\,\widehat{V}^{-1} g\right](\zeta) = \sum_{\gamma<\Gamma} f_\gamma(\zeta)\, g_\gamma(\zeta)$$

für alle $f, g \in \sum\limits_{\gamma<\Gamma} \mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma), \mu_\gamma, \mathbb{C})$ und alle $\zeta \in \sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\alpha) \in (\sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma))_{\gamma<\Gamma}$.
Folglich gilt

$$\widehat{M}_f = \widehat{W}\,\widehat{V} \bigoplus_{\gamma<\Gamma} \widehat{M}_{f_\gamma}\,\widehat{V}^{-1}\widehat{W}^{-1}$$

auf $\sum\limits_{\gamma<\Gamma} \mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma), \mu_\gamma, \mathbb{C})$ und damit auch auf $\overline{\sum\limits_{\gamma<\Gamma} \mathscr{L}^2(\sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma), \mu_\gamma, \mathbb{C})}$, und da $f_\gamma = \mathrm{id}_\gamma$ auf $\sigma(\widehat{N} \restriction \mathcal{M}_\gamma)$, erhält man genau die gewünschte unitäre Äquivalenz.
d) Zum Abschluß haben wir lediglich noch die bisherigen Resultate zu kombinieren. Nach a) ist $\widehat{N}$ unitär äquivalent zu $\bigoplus\limits_{\gamma<\Gamma} \mathcal{M}_\gamma$, nach c) ist es $\bigoplus\limits_{\gamma<\Gamma} \mathcal{M}_\gamma$ zu $\widehat{M}_{\mathrm{id}}$, und damit ist auch $\widehat{N}$ unitär äquivalent zu $\widehat{M}_{\mathrm{id}}$, und zwar vermöge des unitären Operators $\widehat{U} = \widehat{W}\,\widehat{V}\,\widehat{U}_0^{-1}$. □

Wir haben nun alle nötigen Hilfsmittel beisammen, um die Multiplikationsoperator-Variante des Spektralsatzes in der allgemeinen Fassung und damit insbesondere auch für unbeschränkte normale Operatoren zu beweisen.

4.140 Satz: *Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\widehat{N}$ ein normaler Operator auf $\mathcal{H}$, dann gibt es einen Maßraum $(\mathrm{M}, \mathfrak{S}, \mu)$, eine μ-meßbare Funktion $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ und einen unitären Operator $\widehat{U} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathscr{L}^2(\mathrm{M}, \mu, \mathbb{C})$, sodaß $\widehat{U}\,\widehat{N}\,\widehat{U}^{-1} = \widehat{M}_f$.*

Beweis: Wir schreiben $\widehat{N} = \Phi \bigoplus_{\gamma<\Gamma} \widehat{N}_\gamma \Phi^{-1}$ mit einer Familie $(\widehat{N}_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ beschränkter Operatoren[58], einer Zerlegung von $\mathcal{H}$ als topologischer orthgonaler direkter Summe $\mathcal{H} = \bigoplus^T_{\gamma<\Gamma} \mathcal{H}_\gamma$ und einer unitären Abboildung $\Phi : \bigoplus^T_{\gamma<\Gamma} \mathcal{H}_\gamma \longrightarrow \overline{\sum_{\gamma<\Gamma} \mathcal{H}_\gamma}$ gemäß Lemma 4.138. Nach Lemma 4.139 gibt es zu jedem $\gamma < \Gamma$ einen Maßraum $(\mathsf{M}_\gamma, \mathfrak{S}_\gamma, \mu_\gamma)$ mit einem endlichem Maß μ_γ, eine Funktion $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathsf{M}_\gamma, \mu_\gamma, \mathbb{C})$ und einen unitären Operator $\widehat{U}_\gamma$ von $\mathcal{H}_\gamma$ nach $\mathscr{L}^2(\mathcal{H}_\gamma, \mu_\gamma, \mathbb{C})$, sodaß $\widehat{U}_\gamma \widehat{N}_\gamma \widehat{U}_\gamma^{-1} = \widehat{M}_{f_\gamma}$. Nun definieren wir für jedes $\gamma < \Gamma$ eine Abbildung $j_\gamma : \mathsf{M}_\gamma \longrightarrow \mathsf{M} \times \{\gamma\}$ mit

$$j_\gamma(x) = (x, \gamma)$$

für alle $x \in \mathsf{M}_\gamma$, konstruieren damit die disjunkte Vereinigung $\mathsf{M} = \bigcup_{\gamma<\Gamma} j_\gamma(\mathsf{M}_\gamma)$ und dazu die σ-Algebra

$$\mathfrak{S} = \{\, \mathsf{A} \subseteqq \mathsf{M} \mid \mathsf{A} \cap \mathsf{M}_\gamma \in \mathfrak{S}_\gamma \text{ für alle } \gamma < \Gamma \,\}.$$

Auf $\mathfrak{S}$ definieren wir ein Maß μ durch

$$\mu(\mathsf{A}) = \sum_{\gamma<\Gamma} \mu_\gamma(\mathsf{A} \cap \mathsf{M}_\gamma)$$

für alle $\mathsf{A} \in \mathfrak{S}$. Das Maß μ ist nach Konstruktion σ-finit. Außerdem definieren wir die Funktion $f : \mathsf{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ durch $f(x) = f_\gamma(x)$ für $x \in \mathsf{M}_\gamma$ und alle $\gamma < \Gamma$; diese ist nach Konstruktion μ-meßbar. Setzen wir schließlich $\widehat{U} = \Phi \bigoplus_{\gamma<\Gamma} \widehat{U}_\gamma \Phi^{-1}$, dann finden wir

$$\begin{aligned}
\widehat{U}\,\widehat{N}\,\widehat{U}^{-1} &= \Phi \bigoplus_{\gamma<\Gamma} \widehat{U}_\gamma \Phi^{-1} \Phi \bigoplus_{\gamma<\Gamma} \widehat{N}_\gamma \Phi^{-1} \Phi \bigoplus_{\gamma<\Gamma} \widehat{U}_\gamma^{-1} \Phi^{-1} \\
&= \Phi \bigoplus_{\gamma<\Gamma} \widehat{U}_\gamma \widehat{N}_\gamma \widehat{U}_\gamma^{-1} \Phi^{-1} = \Phi \bigoplus_{\gamma<\Gamma} \widehat{M}_{f_\gamma} \Phi^{-1} = \widehat{M}_f. \qquad \square
\end{aligned}$$

Satz 4.140 besagt in verbaler Form, daß jeder normale Operator auf einem Hilbertraum unitär äquivalent zu einem geeigneten Multiplikationsoperator ist. Etwas umgangssprachlicher könnte man auch sagen, daß die normalen Operatoren im wesentlichen – das heißt bis auf unitäre Äquivalenz – gerade die Multiplikationsoperatoren sind. Instruktiver ist jedoch die angedeutete Analogie zur elementaren linearen Algebra. Denn die beschriebene Transformation normaler Operatoren auf Multiplikationsoperatoren ist genau das was man erhält, wenn man die Transformation normaler Matrizen auf Diagonalmatrizen von endlichdimensionalen unitären Vektorräumen auf unendlichdimensionale Hilberträume verallgemeinert. Entsprechend spricht man auch bei der Aussage von Satz 4.140 von *Diagonalisierung* und *Diagonalisierbarkeit* normaler Operatoren.

[58] $\widehat{N}$ ist genau dann unbeschränkt, wenn die Folge $(\|\widehat{N}_\gamma\|)_{\gamma<\Gamma}$ unbeschränkt ist.

Zwei Spezialfälle seien kurz gesondert betrachtet. Bei nicht separablen Hilberträumen ist das in Satz 4.140 auftretende Maß μ nicht mehr σ-finit, wie man an seiner Konstruktion sofort erkennt. Außerdem gilt Satz 4.140 insbesondere auch für selbstadjungierte Operatoren; in diesem Fall existiert sogar eine Funktion $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit den erwähnten Eigenschaften. Zusammen mit Satz 4.130 bildet Satz 4.140 damit ein wirkungsvolles Werkzeug der Spektralanalyse, da man Aussagen über Spektren, Spektralzerlegungen und weitere Eigenschaften normaler Operatoren durch Betrachtung der zugehörigen Multiplikationsoperatoren gewinnen kann.

4.4.2.7 Diskrete, absolut stetige und singuläre Spektren

Wir kommen nun zu einer alternativen Zerlegung der Spektren selbstadjungierter Operatoren neben derjenigen von Definition 4.13, die insbesondere für die Belange der Quantenmechanik von mindestens ebenso großer Bedeutung ist. Dazu betrachten wir einen Hilbertraum $\mathcal{H}$, einen selbstadjungierten Operator $\widehat{A}$ sowie Integrale der Form

$$(\psi, \widehat{A}\,\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \; d \,\|\, \widehat{E}_\lambda \,\psi \,\|^2 = \int_{\sigma(\widehat{A})} \lambda \; d \,\|\, \widehat{E} \,\psi \,\|^2,$$

wobei $\psi \neq 0$ irgendein Element von $\mathcal{H}$ und $\{\, \widehat{E}_\lambda \mid -\infty \leqq \lambda \leqq \infty \,\}$ beziehungsweise $\widehat{E}$ die $\widehat{A}$ zugeordnete eindeutig bestimmte Spektralschar beziehungsweise das entsprechende Spektralmaß ist. Solche Integrale werden mit dem positiven Maß $\|\, \widehat{E}\,\psi \,\|^2$ gebildet, das man auch als von der Funktion $g_\psi(\lambda) := \|\, \widehat{E}_\lambda \,\psi \,\|^2$ erzeugtes Lebesgue-Stieltjes-Maß auffassen kann; wir schreiben dafür $\|\, \widehat{E}\,\psi \,\|^2 = \mu_\psi$. Ist μ das Lebesgue-Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, dann können wir das Lebesgue-Stieltjes-Maß μ_ψ nach Satz 1.20 in seine eindeutig bestimmten kanonischen Anteile zerlegen und erhalten

$$\mu_\psi = \mu_{\psi,\mathrm{p}} + \mu_{\psi,\mathrm{ac}} + \mu_{\psi,\mathrm{cs}},$$

wobei $\mu_{\psi,\mathrm{p}}$ der Reine-Punkt-Anteil, $\mu_{\psi,\mathrm{ac}}$ der bezüglich μ absolut stetige Anteil und $\mu_{\psi,\mathrm{cs}}$ der kontinuierliche und bezüglich μ singuläre Anteil von μ_ψ ist. Mit diesen erhalten wir die orthogonale Summe

$$\mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mu_\psi) = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mu_{\psi,\mathrm{p}}) \oplus \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mu_{\psi,\mathrm{ac}}) \oplus \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mu_{\psi,\mathrm{cs}}). \tag{4.99}$$

Außerdem betrachten wir drei spezielle Unterräume von $\mathcal{H}$; sie sind Gegenstand der nächsten

4.141 Definition: $\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum und $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator. Dann schreibt man

(i) $\mathcal{H}_\mathrm{p} = \{\, \psi \in \mathcal{H} \mid \mu_\psi$ ist ein reines Punktmaß $\}$,

(ii) $\mathcal{H}_\mathrm{ac} = \{\, \psi \in \mathcal{H} \mid \mu_\psi$ ist absolut stetig bezüglich $\mu \,\}$,

(iii) $\mathcal{H}_\mathrm{cs} = \{\, \psi \in \mathcal{H} \mid \mu_\psi$ ist kontinuierlich und singulär bezüglich $\mu \,\}$.

Die Aufgabe besteht nun darin, diese Unterräume mit den bisher diskutierten spektraltheoretischen Begriffen in Zusammenhang zu bringen. Das gelingt am einfachsten und anschaulichsten für den ersten der drei.

4.142 Satz: *Ist $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann gilt*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{p}} = \overline{\{\, \psi \in \mathcal{H} \mid \psi \text{ ist Eigenvektor von } \widehat{A} \,\}}.$$

Beweis: Wir schreiben $\mathrm{X} = \overline{\{\, \psi \in \mathcal{H} \mid \psi \text{ ist Eigenvektor von } \widehat{A} \,\}}$, außerdem sei $\widehat{E}$ das Spektralmaß von $\widehat{A}$. Ist $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{p}}$, dann gibt es eine abzählbare Menge $\mathrm{P} = \{\, p_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \subset \mathbb{R}$ mit $\mu_\psi(\mathrm{P}) = \|\psi\|^2$. Hierfür gilt nach Satz 2.140

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{E}(\{p_n\})\, \psi \right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\, \widehat{E}(\{p_n\})\, \psi \,\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_\psi(\{p_n\}) = \mu_\psi(\mathrm{P}) = \|\psi\|^2$$

und damit

$$\left\| \psi - \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{E}(\{p_n\})\, \psi \right\|^2 = \|\psi\|^2 - \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{E}(\{p_n\})\, \psi \right\|^2 = 0.$$

Es folgt

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{E}(\{p_n\})\, \psi \in \mathrm{X},$$

also gilt $\mathcal{H}_{\mathrm{p}} \subset \mathrm{X}$. Ist umgekehrt $\psi \in \mathrm{X}$, dann gibt es eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Eigenwerten von $\widehat{A}$ sowie eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zugehöriger Eigenvektoren mit $\psi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n$; nach Satz 4.35 und Satz 2.140 ist dann auch $\|\psi\|^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\|^2$. Für $\mathrm{P} = \{\, \lambda_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ gilt damit

$$\begin{aligned}
\mu_\psi(\mathrm{P}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_\psi(\{\lambda_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \|\, \widehat{E}(\{\lambda_n\})\, \psi \,\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \|\, \widehat{E}(\{\lambda_n\})\, \varphi_j \,\|^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \|\, \delta_{nj}\, \varphi_j \,\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 = \|\psi\|^2 = \mu_\psi(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Es folgt $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{p}}$, also gilt $\mathrm{X} \subset \mathcal{H}_{\mathrm{p}}$. □

Ein nützliches Nebenprodukt des obigen Satzes läßt sich leicht auf die anderen beiden Unterräume übertragen.

4.143 Satz: *$\mathcal{H}_{\mathrm{p}}, \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$ und $\mathcal{H}_{\mathrm{cs}}$ sind stets abgeschlossen.*

Beweis: Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 4.142. Für die zweite sei $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$ und $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ mit $\mu(\mathbb{R} \setminus \mathrm{X}_n) = 0$ und $\widehat{E}(\mathrm{X}_n)\, \psi_n = \psi$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mu\big(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{X}_n\big) = \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus \mathsf{X}_n)\big) = 0$ und folglich

$$\widehat{E}\Bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{X}_n\Bigg)\,\psi = \lim_{n\to\infty} \widehat{E}\Bigg(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathsf{X}_m\Bigg)\,\psi_n = \lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi,$$

also ist $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$. Für die dritte Behauptung sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}_{\mathrm{cs}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ und $(\mathsf{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ mit $\mu(\mathsf{A}_n) = 0$ und $\widehat{E}(\mathsf{A}_n)\,\varphi_n = \varphi_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt $\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{A}_n\big) = 0$ und folglich

$$\widehat{E}\Bigg(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathsf{A}_m\Bigg)\,\varphi = \lim_{n\to\infty} \widehat{E}\Bigg(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathsf{A}_m\Bigg)\,\varphi_n = \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi,$$

also ist $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{cs}}$. □

Um die Unterräume aus Definition 4.141 weiter zu charakterisieren, benötigen wir ein paar Hilfsmittel. Zunächst erinnern wir uns, daß nach Satz 4.102 für jedes Spektralmaß $\widehat{E}$ zu jeder Borel-Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\widehat{N}_f = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\widehat{E} \tag{4.100}$$

ein normaler Operator definiert wird, für den außerdem

$$\|\widehat{N}_f \psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2\, d\widehat{E}\,\psi \tag{4.101}$$

gilt für alle $\psi \in \mathcal{H}$. Der Operator $\widehat{N}_f$ liefert wiederum für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ einen abgeschlossenen Unterraum

$$\mathcal{H}_\psi = \{\, \widehat{N}_g \psi \mid g \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mu_\psi)\,\} \tag{4.102}$$

von $\mathcal{H}$, und solche Unterräume weisen spezielle nützliche Eigenschaften auf, wie der folgende Hilfssatz zeigt.

4.144 Lemma: *(i) Zu jedem Spektralmaß $\widehat{E}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ gibt es eine Familie $(\psi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ von Vektoren in $\mathcal{H}$ mit $\|\psi_\gamma\| = 1$ für alle $\gamma < \Gamma$ und $\mathcal{H}_\gamma \perp \mathcal{H}_\lambda$ für alle $\gamma \neq \lambda$, sodaß $\mathcal{H} = \bigoplus_{\gamma<\Gamma}^{T} \mathcal{H}_{\psi_\gamma}$.*

(ii) Ist f eine Borel-Funktion, dann wird $\widehat{N}_f$ durch jeden Unterraum $\mathcal{H}_\psi$ reduziert.

Beweis: (i) Trivialerweise gilt $\mathcal{H} \supseteqq \bigoplus_{\gamma<\Gamma}^{T} \mathcal{H}_{\psi_\gamma}$. Nun wählen wir eine Familie $(\psi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ von Vektoren aus $\mathcal{H}$ mit $\|\psi_\gamma\| = 1$ für alle $\gamma < \Gamma$ und $\mathcal{H}_{\psi_\gamma} \perp \mathcal{H}_{\psi_\lambda}$ für $\gamma \neq \lambda$, sodaß $\operatorname{span}(\psi_\gamma)_{\gamma<\Gamma} = \mathcal{H}$. Eine solche erhält man aus einer beliebigen Familie $(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ mit

$\overline{\operatorname{span}(\varphi_\gamma)_{\gamma<\Gamma}} = \mathcal{H}$ durch Schmidt-Orthonormalisierung[59]. Damit gilt $\mathcal{H} \subseteqq \bigoplus\limits_{\gamma<\Gamma}^{T} \mathcal{H}_{\psi_\gamma}$, also insgesamt $\mathcal{H} = \bigoplus\limits_{\gamma<\Gamma}^{T} \mathcal{H}_{\psi_\gamma}$.

(ii) 1. Fall: f sei beschränkt. Zu jeder Borel-Funktion g und jedem $\varphi \in \mathcal{H}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $\varphi_\perp$ mit $\varphi = \widehat{N}_g^*\psi + \varphi_\perp$; damit gilt für jede beschränkte Funktion $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ nach Satz 4.102

$$(\widehat{N}_h^*\psi, \widehat{N}_f\varphi_\perp) = (\widehat{N}_f\widehat{N}_h^*\psi, \varphi_\perp) = (\widehat{N}_f\widehat{N}_{\overline{h}}\psi, \varphi_\perp) = (\widehat{N}_{f\overline{h}}\psi, \varphi_\perp) = 0,$$

also $\widehat{N}_f^*\varphi_\perp \in \mathcal{H}_\psi^\perp$. Folglich ist $\mathcal{H}_\psi^\perp$ invariant unter $\widehat{N}_f^*$. Nach Lemma 4.137 (ii) ist dann $\mathcal{H}_\psi$ invariant unter $\widehat{N}_f$. Analog zeigt man, daß $\mathcal{H}_\psi$ invariant unter $\widehat{N}_f^*$ ist, und nach Lemma 4.137 (iii) wird somit $\mathcal{H}_\psi$ von $\widehat{N}_f$ reduziert.

2. Fall: f sei unbeschränkt. Betrachte die Folge $(\mathsf{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkter Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit $\mathsf{A}_n = \{\,\zeta \in \mathbb{R} \mid |\zeta| \leqq n\,\}$ und dazu die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n = f\chi_{\mathsf{A}_n}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wird dann $\mathcal{H}_\psi$ durch $\widehat{N}_{f_n}$ reduziert. Ist $\widehat{P}_\psi$ der orthogonale Projektor auf $\mathcal{H}_\psi$, dann folgt nach Lemma 4.137 (i) $\widehat{N}_{f_n}\widehat{P}_\psi\varphi = \widehat{P}_\psi\widehat{N}_{f_n}\varphi$ für alle $\varphi \in \operatorname{dom}\widehat{N}_{f_n}$. Das wiederum liefert

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{E}(\mathsf{A}_n)\,\widehat{P}_\psi\,\varphi = \widehat{P}_\psi\,\varphi$$

sowie nach Satz 4.102

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{N}_{f_n}\widehat{P}_\psi\varphi = \lim_{n\to\infty} \widehat{N}_f\widehat{N}_{\chi_{\mathsf{A}_n}}\widehat{P}_\psi\varphi = \lim_{n\to\infty} \widehat{N}_f\,\widehat{E}(\mathsf{A}_n)\,\widehat{P}_\psi\,\varphi = \widehat{N}_f\widehat{P}_\psi\,\varphi.$$

Da $\widehat{N}_f$ abgeschlossen ist, gilt $\widehat{P}_\psi\varphi \in \operatorname{dom}\widehat{N}_\psi$ und somit $\widehat{N}_f\widehat{P}_\psi\varphi = \widehat{P}_\psi\widehat{N}_f\varphi$. Daraus folgt die Behauptung. □

Der nächste Satz zeigt nun, daß die Unterräume aus Definition 4.141 bereits den gesamten Hilbertraum konstituieren und zudem invariant unter $\widehat{A}$ sind.

4.145 Satz: *$\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum, $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator und $\mathcal{H}_{\mathrm{p}}, \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$ und $\mathcal{H}_{\mathrm{cs}}$ Unterräume von $\mathcal{H}$ nach Definition 4.141. Dann gilt folgendes.*

(i) $\mathcal{H}$ ist darstellbar als orthogonale Summe $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{p}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{ac}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{cs}}$.

(ii) $\mathcal{H}_{\mathrm{p}}, \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$ und $\mathcal{H}_{\mathrm{cs}}$ reduzieren $\widehat{A}$.

Beweis: (i) Es seien $\widehat{E}$ das $\widehat{A}$ zugeordnete eindeutig bestimmte Spektralmaß und $\mathcal{H}_\psi$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$ gemäß (4.100) sowie $\widehat{N}_f$ für alle Borel-Funktionen f gemäß (4.102) definiert. Nach (4.101) gibt es zu jedem $\gamma < \Gamma$ einen unitären Operator $\widehat{U}_\gamma : \mathcal{H}_{\psi_\gamma} \longrightarrow \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mu_{\psi_\gamma})$ mit

$$\widehat{U}_\gamma\,\widehat{N}_f\,\widehat{U}_\gamma^{-1}\,g = f\,g$$

für alle $g \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mu_{\psi_\gamma})$; nach Lemma 4.144 (i) gibt es folglich einen unitären Operator

$$\widehat{U} = \bigoplus_{\gamma<\Gamma} \widehat{U}_\gamma : \mathcal{H} \longrightarrow \bigoplus_{\gamma<\Gamma} \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mu_{\psi_\gamma}) = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$$

[59] Siehe Abschnitt 2.3.3

mit

$$\widehat{U}\,\widehat{N}_f\,\widehat{U}^{-1}\,g = f\,g$$

für alle $g \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$. Mit (4.99) folgt die Behauptung.
(ii) Folgt unmittelbar aus Lemma 4.144 (ii). □

Man nennt diese Einteilung auch *kanonischen Zerlegung* des Hilbertraumes. Außerdem schreibt man $\mathcal{H}_{\mathrm{c}} = \mathcal{H}_{\mathrm{ac}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{cs}}$ und $\mathcal{H}_{\mathrm{sing}} = \mathcal{H}_{\mathrm{p}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{cs}}$. Ein Vektor ψ gehört genau dann zu $\mathcal{H}_{\mathrm{p}}$, wenn es eine abzählbare Menge $\mathrm{P} \subset \mathbb{R}$ gibt mit $\mu_p(\mathrm{P}) = \mu_p(\mathbb{R}) = \|\psi\|^2$, genau dann zu $\mathcal{H}_{\mathrm{sing}}$, wenn es eine Menge $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ gibt mit $\mu_\psi(\mathrm{A}) = \|\psi\|^2$ und $\mu(\mathrm{A}) = 0$, und genau dann zu $\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$, wenn $\mu_\psi(\mathrm{N}) = 0$ gilt für jede abzählbare Menge $\mathrm{N} \subset \mathbb{R}$.

Die Einschränkungen des Operators $\widehat{A}$ auf die drei oben beschriebenen Unterräume von $\mathcal{H}$ liefern nun die angekündigte Zerlegung des Spektrums von $\widehat{A}$.

4.146 Definition: Mit den obigen Bezeichnungen heißt

(i) $\sigma_{\mathrm{p}}(\widehat{A}) = \sigma(\widehat{A} \restriction \mathcal{H}_{\mathrm{p}})$ das *Punktspektrum*,

(ii) $\sigma_{\mathrm{c}}(\widehat{A}) = \sigma(\widehat{A} \restriction \mathcal{H}_{\mathrm{c}})$ das *kontinuierliche Spektrum*,

(iii) $\sigma_{\mathrm{ac}}(\widehat{A}) = \sigma(\widehat{A} \restriction \mathcal{H}_{\mathrm{ac}})$ das *absolut stetige Spektrum*,

(iv) $\sigma_{\mathrm{sing}}(\widehat{A}) = \sigma(\widehat{A} \restriction \mathcal{H}_{\mathrm{sing}})$ das *singuläre Spektrum* und

(v) $\sigma_{\mathrm{cs}}(\widehat{A}) = \sigma(\widehat{A} \restriction \mathcal{H}_{\mathrm{cs}})$ das *kontinuierliche singuläre Spektrum* von $\widehat{A}$.

Das führt nach Satz 4.145 auf die disjunkte Zerlegung

$$\sigma(\widehat{A}) = \sigma_{\mathrm{p}}(\widehat{A}) \cup \sigma_{\mathrm{ac}}(\widehat{A}) \cup \sigma_{\mathrm{cs}}(\widehat{A}), \tag{4.103}$$

außerdem gilt $\sigma_{\mathrm{c}}(\widehat{A}) = \sigma_{\mathrm{ac}}(\widehat{A}) \cup \sigma_{\mathrm{cs}}(\widehat{A})$ und $\sigma_{\mathrm{sing}}(\widehat{A}) = \sigma_{\mathrm{p}}(\widehat{A}) \cup \sigma_{\mathrm{cs}}(\widehat{A})$.

Die einzelnen Bestandteile der kanonischen Zerlegung (4.103) des Spektrums eines selbstadjungierten Operators lassen sich nun anschaulich deuten. Das diskrete Spektrum $\sigma_{\mathrm{disc}}(\widehat{A})$ enthält die Eigenwerte von $\widehat{A}$, und es gilt $\overline{\sigma_{\mathrm{disc}}(\widehat{A})} = \sigma_{\mathrm{p}}(\widehat{A})$. Die anderen beiden Anteile enthalten diejenigen Punkte des Spektrums von $\widehat{A}$, die keine Eigenwerte sind. Dabei besteht das kontinuierliche singuläre Spektrum $\sigma_{\mathrm{cs}}(\widehat{A})$ aus den isolierten Punkten des kontinuierlichen Spektrums und das absolut stetige Spektrum $\sigma_{\mathrm{ac}}(\widehat{A})$ aus allen Punkten des kontinuierlichen Spektrums, die keine isolierten Punkte sind.

Natürlich ist die hier beschriebene Zerlegung der Spektren selbstadjungierter Operatoren keineswegs völlig getrennt von der in Definition 4.13 beschriebenen zu sehen; das erkennt man schon daran, daß das Punktspektrum und das kontinuierliche Spektrum hier wieder auftauchen, und insbesondere an Satz 4.142. Dieser Zusammemhang läßt sich weiter ausbauen, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden. Hierfür werden wir Hilfsmittel kennenlernen, mit denen zusätzlich zur oben beschriebenen mathematischen Charakterisierung der einzelnen Bestandteile der Spektren selbstadjungierter Operatoren auch eine physikalische Interpretation derselben möglich ist. Dabei zeigt es sich, daß aus quantemechanischer Sicht der Fall

$\sigma_{cs} = \emptyset$ wünschenswert ist. Das folgende Resultat liefert ein Kriterien dafür, wann das der Fall ist [299].

4.147 Satz: *Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator, $\widehat{E}$ das zugehörige Spektralmaß und (a, b) ein beschränktes Intervall. Dann gilt folgendes.*
(i) Gibt es eine dichte Teilmenge D von $\mathcal{H}$ und ein $p > 1$, sodaß

$$\sup_{0<\varepsilon<1} \int_a^b \left|\left(\psi, ((\widehat{A}-t-i\varepsilon)^{-1} - (\widehat{A}-t+i\varepsilon)^{-1})\,\psi\right)\right|^p dt < \infty \tag{4.104}$$

für jedes $\psi \in \mathrm{D}$, dann gilt $\operatorname{ran} \widehat{E}((a,b)) \subset \mathcal{H}_{ac}$.
(ii) Ist $\operatorname{ran} \widehat{E}((a,b)) \subset \mathcal{H}_{ac}$, dann gibt es eine dichte Teilmenge D von $\operatorname{ran} \widehat{E}((a,b))$, sodaß (4.104) gilt für alle $p \in [1,\infty]$ und alle $\psi \in \mathrm{D}$.

Beweis: (i) Ist (c, d) ein beliebiges beschränktes Intervall, dann gilt $\widehat{E}((c,d)) \leqq \widehat{E}([c,d])$ und damit für alle $\psi \in \mathrm{D}$

$$(\psi, \widehat{E}((c,d))\,\psi) \leqq \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{\pi i} \int_c^d (\psi, ((\widehat{A}-t-i\varepsilon)^{-1} - (\widehat{A}-t+i\varepsilon)^{-1})\,\psi)\, dt.$$

Nun sei S eine offene Teilmenge von (a, b), die sich als Vereinigung einer Familie $((a_j, b_j))_{j\leqq N}$ disjunkter offener Intervalle darstellen läßt, außerdem sei μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und $q = p/(p-1)$. Ist N endlich, dann folgt nach Ungleichung 2.80 und gemäß (4.104)

$$\begin{aligned}
(\psi, \widehat{E}(\mathrm{S})\,\psi) &\leqq \frac{1}{\pi i} \sum_{j=0}^{N} \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{a_j}^{b_j} (\psi, ((\widehat{A}-t-i\varepsilon)^{-1} - (\widehat{A}-t+i\varepsilon)^{-1})\,\psi)\, dt \\
&\leqq \frac{1}{\pi i} \lim_{\varepsilon\searrow 0} \sum_{j=0}^{N} \int_{a_j}^{b_j} (\psi, ((\widehat{A}-t-i\varepsilon)^{-1} - (\widehat{A}-t+i\varepsilon)^{-1})\,\psi)\, dt \\
&\leqq \frac{1}{\pi i} \lim_{\varepsilon\searrow 0} \left[\int_{(a,b)} (\psi, ((\widehat{A}-t-i\varepsilon)^{-1} - (\widehat{A}-t+i\varepsilon)^{-1})\,\psi)\, d\mu\right]^{1/p} \left(\int_{\mathrm{S}} d\mu\right)^{1/q} \\
&\leqq \frac{1}{\pi i} \lim_{\varepsilon\searrow 0} \left[\int_{(a,b)} (\psi, ((\widehat{A}-t-i\varepsilon)^{-1} - (\widehat{A}-t+i\varepsilon)^{-1})\,\psi)\, d\mu\right]^{1/p} |\,\mu(\mathrm{S})|^{1/q},
\end{aligned}$$

also $(\psi, \widehat{E}(\mathrm{S})\,\psi) \leqq C\,|\,\mu(\mathrm{S})|^{1/q}$ mit einer geeigneten Konstante C. Ist N unendlich, dann gilt $\mathrm{S} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}_n = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{j=0}^{n} (a_j, b_j)$ und damit

$$(\psi, \widehat{E}(\mathrm{S})\,\psi) = \lim_{n\to\infty} (\psi, \widehat{E}(\mathrm{S}_n)\,\psi) \leqq \lim_{n\to\infty} C\,|\,\mu(\mathrm{S}_n)|^{1/q},$$

also ebenfalls $(\psi, \widehat{E}(\mathrm{S})\,\psi) \leqq C\,|\,\mu(\mathrm{S})|^{1/q}$. Wir zeigen nun, daß Lebesgue-Nullmengen in (a,b) stets auch $\widehat{E}$-Nullmengen sind. Ist A eine Teilmenge von (a,b) mit $\mu(\mathrm{A}) = 0$, dann gibt es zu jedem $\alpha > 0$ eine offene Menge S_α mit $\mathrm{A} \subset \mathrm{S}_\alpha$ und $\mu(\mathrm{S}_\alpha) < 1/\alpha$, und es folgt für alle $\psi \in \mathrm{D}$

$$(\psi, \widehat{E}(\mathrm{A})\,\psi) \leqq \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} (\psi, \widehat{E}(\mathrm{S}_\alpha \psi) \leqq C \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} |\,\mu(\mathrm{S}_\alpha)|^{1/q} = 0,$$

das heißt es gilt $\widehat{E}(\mathrm{A}) = 0$. Somit ist $\widehat{E}$ auf (a,b) absolut stetig bezüglich μ, und es folgt die Behauptung.

(ii) μ sei wieder das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Menge

$$\mathrm{D} = \{\, \psi \in \mathcal{H} \mid \exists\, f \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R},\mu),\ \operatorname{supp} f \subset (a,b)\ \text{kompakt},\ \mu_\psi = f\,\mu \,\}.$$

Dann ist D nach Voraussetzung dicht in $\operatorname{ran} \widehat{E}((a,b))$, und man erhält genau wie im Beweis von Satz 4.108

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\psi, ((\widehat{A} - t - i\varepsilon)^{-1} - (\widehat{A} - t + i\varepsilon)^{-1})\,\psi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(x-t)^2 + \varepsilon^2}\, f(t)\, dx.$$

Für die Funktion g_ε mit

$$g_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

gilt

$$\|\, g_\varepsilon\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2+1}\, dy = \big[\arctan y\big]_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

und damit nach Ungleichung 2.80

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x-t)\, f(t)\, dt \leqq \|\, g_\varepsilon\|_1\, \|f\|_\infty < \infty,$$

das heißt, (4.104) gilt für $p = \infty$. Aufgrund von $\mu((a,b)) = b - a < \infty$ gilt (4.104) dann für alle p. □

Der Nachweis, daß das kontinuierliche singuläre Spektrum eines vorgegebenen selbstadjungierten Operators leer sei, reduziert sich damit im wesentlichen darauf zu zeigen, daß das auf $\mathrm{A} = \{\, t + i\varepsilon \mid \varepsilon \in (0,1),\ t \in (a,b)\,\}$ definierte Funktional $(\psi, (\widehat{A} - \lambda)^{-1}\,\psi)$ eine beschränkte Erweiterung auf $\overline{\mathrm{A}}$ besitzt. Dabei darf man sich jedoch nicht täuschen lassen; solche Beweise gehören zu den besonders schwierigen Aufgabenstellungen der mathematischen Physik. Wir kommen kurz im nächsten Abschnitt und ausführlicher anhand von Beispielen in Band 2 darauf zurück. Näheres dazu findet man insbesondere in [299].

4.4.3 Der Spektralsatz für unitäre Operatoren

Eine wichtige Operatorenklasse fehlt noch. Zwar ist alles, was man über die Spektren unitärer Operatoren sagen kann, als Spezialfall in der Spektraltheorie normaler Operatoren enthalten, dennoch lohnt sich eine explizite Diskussion. Denn diese liefert neben der Formulierung des zugehörigen Spektralsatzes und in Zusammenhang mit diesem eine Reihe weiterer Resultate, die sowohl aus rein mathematischer als auch aus quantenmechanischer Sicht interessant sind, insbesondere, was die Dynamik quantenmechanischer Systeme betrifft.

4.4.3.1 Spektralzerlegung unitärer Operatoren

Mit Blick auf die Invarianz von Skalarprodukten unter unitären Transformationen wird dabei die grob einzuschlagende Richtung schnell klar. Ist nämlich $\widehat{U}$ ein unitärer Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $\psi \in \mathcal{H}$ ein Eigenvektor von $\widehat{U}$ zum Eigenwert λ, dann folgt aus $\widehat{U}\,\psi = \lambda\,\psi$ und $(\widehat{U}\,\varphi, \widehat{U}\,\varphi) = (\varphi, \varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ sofort $\|\,\widehat{U}\,\psi\,\| = |\lambda|\,\|\psi\| = \|\psi\|$ und damit $|\lambda| = 1$, das heißt, es muß $\lambda = e^{it}$ gelten mit einer geeigneten Zahl $t \in \mathbb{R}$. Das werden wir nun präzisieren.

Dazu betrachten wir zunächst einen dem vorliegenden Abschnitt angepaßten Sonderfall der Sätze 4.102 und 4.118.

4.148 Satz: *$\mathcal{H}$ sei ein komplexer Hilbertraum, $\widehat{U}$ ein unitärer Operator auf $\mathcal{H}$ und $\widehat{E}$ ein Spektralmaß; außerdem sei* $\mathsf{C} = \{\,\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| = 1\,\}$ *der Einheitskreis in der komplexen Ebene. Dann wird für jede beschränkte $\widehat{E}$-meßbare Funktion $f : C \longrightarrow \mathbb{C}$ durch*

$$f(\widehat{U}\,) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\lambda})\, d\widehat{E}$$

ein beschränkter Operator auf $\mathcal{H}$ definiert.

Beweis: $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sei eine beschränkte Funktion mit $g \restriction \mathsf{C} = f$. Nach Satz 4.118 (i) und (vii) werden durch $\widehat{F}_{\chi_{\mathsf{C}}} = \int\limits_{\mathbb{C}} \chi_{\mathsf{C}}(\zeta)\, d\widehat{E}$ und $\widehat{F}_f = \int\limits_{\mathbb{C}} g(\zeta)\, d\widehat{E}$ beschränkte Operatoren definiert. Nach Satz 4.118 (viii) folgt

$$\widehat{F}_{\chi_{\mathsf{C}}}\widehat{F}_f = \int\limits_{\mathbb{C}} g(\zeta)\, d\widehat{E} = \int\limits_{\mathbb{C}} \chi_{\mathsf{C}}(\zeta)\, g(\zeta)\, d\widehat{E} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\lambda})\, d\widehat{E}$$

und damit die Behauptung. □

Aufbauend auf Satz 4.148 kommen wir nun zu einer wichtiger Relation zwischen unitären und selbstadjungierten Operatoren oder genauergesagt dazu, wie man erstere stets durch letztere darstellen kann. Betrachten wir einen beschränkten Operator $\widehat{A}$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und konstruieren daraus den Operator

$$\widehat{U} = e^{i\widehat{A}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda}\, d\widehat{E}_\lambda,$$

dann gilt nach Satz 4.102 (iii)

$$\widehat{U}^* = e^{-i\widehat{A}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda}\, d\widehat{E}_\lambda$$

und somit

$$\widehat{U}^*\widehat{U} = \widehat{U}\,\widehat{U}^* = e^{i\widehat{A}-i\widehat{A}^*},$$

das heißt, $\widehat{U}$ ist genau dann unitär, wenn $\widehat{A}$ selbstadjungiert ist. Das besondere daran ist nun die Tatsache, daß alle unitären Operatoren auf diese Weise darstellbar sind [67].

4.149 Satz: *$\mathcal{H}$ sei ein komplexer Hilbertraum. Dann gibt es zu jedem unitären Operator $\widehat{U}$ auf $\mathcal{H}$ einen beschränkten selbstadjungierten Operator $\widehat{A}$ auf $\mathcal{H}$ mit $\|\widehat{A}\| \leqq \pi$ und $\widehat{U} = e^{i\widehat{A}}$.*

Beweis: Wir zerlegen zunächst den Operator $\widehat{U}$ in Real- und Imaginärteil, das heißt, wir schreiben $\widehat{U} = \widehat{V} + i\widehat{W}$ mit $\widehat{V} := \frac{1}{2}(\widehat{U} + \widehat{U}^*)$ und $\widehat{W} := \frac{1}{2i}(\widehat{U} - \widehat{U}^*)$. Diese beiden Operatoren sind selbstadjungiert, wegen $\|\widehat{U}\| = 1$ ist $\|\widehat{V}\| \leqq 1$ und $\|\widehat{W}\| \leqq 1$, und außerdem gilt $\widehat{V}\,\widehat{W} = \widehat{W}\,\widehat{V}$ sowie

$$\widehat{V}^2 + \widehat{W}^2 = \frac{1}{4}\,(\,\widehat{U}^2 + \widehat{U}^{*2} + \widehat{U}\,\widehat{U}^* + \widehat{U}^*\widehat{U} - \widehat{U}^2 - \widehat{U}^{*2} + \widehat{U}\,\widehat{U}^* + \widehat{U}^*\widehat{U}\,) = \mathbf{1}. \tag{4.105}$$

Nun sei die reelle Funktion f definiert durch $f(t) = \sin(\arccos t) = \sqrt{1-t^2}$. Damit definieren wir den Operator $\widehat{T} = f(\widehat{V})$; dann ist $\widehat{T}$ selbstadjungiert, und es gilt $\widehat{T}\,\widehat{V} = \widehat{V}\,\widehat{T}$ sowie $\widehat{T}\,\widehat{W} = \widehat{W}\,\widehat{T}$. Hieraus folgt

$$\widehat{V}^{\,2} + \widehat{T}^{\,2} = \widehat{V}^{\,2} + f^{\,2}(\widehat{V}) = \widehat{V}^{\,2} + 1 + \widehat{V}^{\,2} = \mathbf{1},$$

mit (4.105) also $\widehat{W}^{\,2} = \widehat{T}^{\,2}$. Weiter sei $\widehat{P}$ der orthogonale Projektor auf $\ker(\widehat{W} - \widehat{T}\,)$. Aufgrund von

$$(\widehat{W} - \widehat{T}\,)(\widehat{W} + \widehat{T}\,) = \widehat{W}^{\,2} - \widehat{T}\,\widehat{W} + \widehat{W}\,\widehat{T} - \widehat{T}^{\,2} = 0$$

gilt $\widehat{P}\,(\widehat{W} + \widehat{T}\,) = \widehat{W} + \widehat{T}$, wegen $(\widehat{W} - \widehat{T}\,)\,\widehat{P} = 0$ folgt

$$\widehat{W} + \widehat{T} = \widehat{P}\,\widehat{W} + \widehat{P}\,\widehat{T} = \widehat{W}\,\widehat{P} + \widehat{P}\,\widehat{T} = 2\,\widehat{W}\,\widehat{P},$$

und damit gilt $\widehat{T} = (\,2\,\widehat{P} - 1\,)\,\widehat{W}$ und $\ker\widehat{W} \subset \operatorname{ran}\widehat{P}$. Für den selbstadjungierten Operator $\widehat{A} = (\,2\,\widehat{P} - 1\,)\,\arccos\widehat{V}$ folgt dann $\|\widehat{A}\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \arccos t = \pi$ und

$$\widehat{A}^2 = (\,2\,\widehat{P} - 1\,)^2 \arccos^2 \widehat{V} = (\,4\,\widehat{P}^{\,2} - 4\,\widehat{P} + 1\,) \arccos^2 \widehat{V} = \arccos^2 \widehat{V}. \tag{4.106}$$

Mit der Potenzreihenentwicklung der Cosinus-Funktion erhalten wir

$$\cos\widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{A}^{2n}}{(2n)!},$$

und mit (4.106) folgt

$$\cos \widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arccos^{2n} \widehat{V}}{(2n)!} = \widehat{V}.$$

Analog liefert die Potenzreihenentwicklung der Sinus-Funktion

$$\sin \widehat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\widehat{A}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \widehat{A} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\widehat{A}^{2n}}{(2n+1)!},$$

und hier folgt mit (4.106)

$$\begin{aligned}\sin \widehat{A} &= (\,2\,\widehat{P} - 1\,) \arccos \widehat{V} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\arccos^{2n} \widehat{V}}{(2n+1)!} \\ &= (\,2\,\widehat{P} - 1\,) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\arccos^{2n+1} \widehat{V}}{(2n+1)!} = \sin(\arccos \widehat{V}) = (\,2\,\widehat{P} - 1\,)\,\widehat{T} = \widehat{W}.\end{aligned}$$

Insgesamt gilt damit

$$\widehat{U} = \cos \widehat{A} + i \sin \widehat{A} = e^{i\widehat{A}}.$$ □

Eine direkte Folgerung dieses Satzes ist die zu Beginn dieses Abschnitts angedeutete Eigenschaft der Eigenwerte unitärer Operatoren.

4.150 Satz: *Ist $\widehat{U}$ ein unitärer Operator auf dem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann gilt*

$$\sigma(\widehat{U}\,) \subset \{\,\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| = 1\,\}.$$

Beweis: $\widehat{A}$ sei ein beschränkter selbstadjungierter Operator gemäß Satz 4.149, dann gilt nach Satz 4.44 für dessen Spektrum $\sigma(\widehat{A}\,) \subset [-\pi, \pi]$. Da die komplexe Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, liefert Satz 4.9 die Behauptung. □

Damit formulieren wir nun ohne weiteren Aufwand den

4.151 Spektralsatz für unitäre Operatoren: *Ist $\mathcal{H}$ ein komplexer Vektorraum und $\widehat{U}$ ein unitärer Operator auf $\mathcal{H}$, dann gibt es ein Spektralmaß $\widehat{E}$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ mit*

(i) $\widehat{E}([-\pi, \pi]) = \mathbf{1}$,

(ii) $\widehat{U} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda}\, d\widehat{E}$.

Beweis: (i) Folgt unmittelbar aus Satz 4.150.

(ii) $\widehat{A}$ sei ein selbstadjungierter Operator, sodaß $\widehat{U} = e^{i\widehat{A}}$ gemäß Satz 4.149. Dann folgt die Behauptung aus Satz 4.107. □

Aus Satz 4.151 folgt außerdem, daß man anstelle der dort verwendeten Spektralzerlegung auch

$$\widehat{U} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda}\, d\widehat{E}$$

schreiben kann. Der soeben gezeigte Beweis hat mit erbracht, daß das hierbei auftretende Spektralmaß $\widehat{E}$ gleichzeitig dasjenige der Spektralzerlegung von $\widehat{A}$ gemäß Satz 4.107 und dasjenige der Spektralzerlegung von $\widehat{U}$ gemäß Satz 4.151 ist.

4.4.3.2 Stark stetige unitäre Gruppen

Im diesem Abschnitt betrachten wir statt einzelner Operatoren der oben beschriebenen Form die durch die Abbildung $\widehat{U} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{L}(\mathcal{H})$ mit

$$\widehat{U}(t) := e^{it\widehat{A}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, d\widehat{E} \tag{4.107}$$

definierte Operatorenschar. Hierfür gilt nach Satz 4.102 (iii) und Satz 4.149

$$\widehat{U}^{*}(t) = \widehat{U}^{-1}(t) = \widehat{U}(-t) = e^{-it\widehat{A}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}\, d\widehat{E}$$

und damit $\widehat{U}^{*}(t)\,\widehat{U}(t) = \widehat{U}(t)\,\widehat{U}^{*}(t) = \mathbf{1}$, das heißt, die $\widehat{U}(t)$ sind unitär. Wie sich gleich zeigen wird, erhält man mit dieser Operatorenschar eine unitäre Gruppe mit zusätzlichen speziellen Eigenschaften; letztere sind Inhalt der nächsten

4.152 Definition: $\mathcal{E}$ sei ein Banachraum und $(\mathcal{G}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine Familie aus $\mathscr{L}(\mathcal{E})$ mit folgenden Eigenschaften.

(i) $\mathcal{G}(0) = \mathbf{1}$;

(ii) $\mathcal{G}(s+t) = \mathcal{G}(s)\,\mathcal{G}(t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$;

(iii) $\lim\limits_{t\to 0} \mathcal{G}(t)\,x = x$ für alle $x \in \mathcal{E}$.

Dann heißt $(\mathcal{G}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *stark stetige Gruppe*[60].

Das Attribut „stark“ bezieht sich auf den starken Limes in (iii). Ersetzt man das durch die Forderung $\lim\limits_{t\to 0} f(\mathcal{G}(t)\,x) = 0$ für alle $f \in \mathcal{E}'$ und alle $x \in \mathcal{E}$, dann heißt $(\mathcal{G}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *schwach stetige Gruppe*.

Um den Zusammenhang zur oben definierten Familie von Operatoren herzustellen, schieben wir gleich noch einen weiteren neuen Begriff nach.

[60]Ersetzt man $t \in \mathbb{R}$ durch $t \geqq 0$ und $\lim\limits_{t\to 0}$ durch $\lim\limits_{t\searrow 0}$, so heißt $(\mathcal{G}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *stark stetige Halbgruppe*.

4.153 Definition: Ist $(\mathcal{G}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine stark stetige Gruppe, dann heißt die Abbildung $\mathcal{T}$ mit

$$\mathcal{T}x := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,[\,\mathcal{G}(t)\,x - x\,]$$

infinitesimaler Generator von $(\mathcal{G}(t))_{t\in\mathbb{R}}$.
Mit der formalen Ableitung

$$\mathcal{G}'(s) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{G}(\,s+t\,) - \mathcal{G}(s)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,[\,\mathcal{G}(t) - 1\,]\,\mathcal{G}(s),$$

rechtfertigt sich die häufig anzutreffende Schreibweise $\mathcal{T} = \mathcal{G}'(0)$. Entsprechend kann man $\mathcal{G}(t)$ als Lösung der Differentialgleichung

$$\mathcal{G}' = \mathcal{T}\,\mathcal{G}$$

mit der Anfangsbedingung $\mathcal{G}(0) = \mathbf{1}$ und damit als Lösung der Integralgleichung

$$\mathcal{G}(t) = \mathbf{1} + \int_0^t \mathcal{T}\,\mathcal{G}(s)\,ds$$

auffassen. Das kann auch durch die formale Schreibweise $\mathcal{G}(t) = e^{\,t\,\mathcal{T}}$ zum Ausdruck gebracht werden, als Verallgemeinerung der oben über den Spektralsatz streng abgeleiteten Formel (4.107). Wir kommen darauf gleich sowie auch in Band 2 wieder zurück.
Damit können wir nun die Operatorenschar $(e^{it\widehat{A}})_{t\in\mathbb{R}}$ genauer charakterisieren [68].

4.154 Satz: *Es seien $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum, $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$ und $\widehat{U}(t) = e^{it\widehat{A}}$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt folgendes.*

(i) $\big(\widehat{U}(t)\big)_{t\in\mathbb{R}}$ *ist eine stark stetige unitäre Gruppe;*

(ii) der Grenzwert $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,[\,\widehat{U}(t)\,\psi - \psi\,]$ *existiert genau dann, wenn* $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$;

(iii) $\widehat{T} = i\,\widehat{A}$ *ist der infinitesimale Generator der Gruppe* $\big(\widehat{U}(t)\big)_{t\in\mathbb{R}}$.

Beweis: (i) Die in Definition 4.152 formulierten Eigenschaften lassen sich unmittelbar nachprüfen. Erstens gilt nach Satz 4.149 und Satz 4.151 (i)

$$\widehat{U}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\widehat{E} = \int_{-\pi}^{\pi} d\widehat{E} = \widehat{E}([-\pi,\pi]) = \mathbf{1},$$

zweitens nach Satz 4.118 (viii) für alle $s, t \in \mathbb{R}$

$$\widehat{U}(s+t) = e^{\,i\,(\,s+t\,)\,\widehat{A}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\,i\,(\,s+t\,)\,\lambda}\,d\widehat{E}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\, e^{it\lambda}\, d\widehat{E} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\, d\widehat{E} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, d\widehat{E} \right) = \widehat{U}(s)\, \widehat{U}(t).$$

und drittens nach Satz 1.21 für alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$\lim_{t\to 0} \| [\widehat{U}(t) - 1]\, \psi \|^2 = \lim_{t\to 0} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (\, e^{it\lambda} - 1\,)\, d\widehat{E}\, \psi \right\|^2$$

$$= \lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\, e^{it\lambda} - 1\,|^2\, d\, \|\, \widehat{E}\, \psi \,\|^2 = 0,$$

also $\lim\limits_{t\to 0} \widehat{U}(t) = \mathbf{1}$.

(ii) „$\Longrightarrow$“: Für den Operator $\widehat{B}$ mit $\widehat{B}\,\psi = -\lim\limits_{t\to 0} \frac{i}{t}\, [\, \widehat{U}(t)\, \psi - \psi\,]$ gilt für alle $\psi, \varphi \in \operatorname{dom} \widehat{B}$

$$(\psi, \widehat{B}\, \varphi) = -\left(\psi, \lim_{t\to 0} \frac{i}{t}\, [\, \widehat{U}(t) - 1\,]\, \varphi \right) = \left(\lim_{t\to 0} \frac{i}{t}\, [\, \widehat{U}(-t) - 1\,]\, \psi, \varphi \right)$$

$$= -\left(\lim_{t\to 0} \frac{i}{t}\, [\, \widehat{U}(t) - 1\,]\, \psi, \varphi \right) = (\widehat{B}\, \psi, \varphi),$$

das heißt, $\widehat{B}$ ist symmetrisch, und daher gilt $\widehat{B} \subset \widehat{B}^*$. Andererseits ist nach Konstruktion $\widehat{B} \supset \widehat{A}$, also $\widehat{B}^* \subset \widehat{A}^* = \widehat{A}$ und somit $\widehat{B} = \widehat{A}$.

„$\Longleftarrow$“: Für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$ gilt

$$\left\| \left\{ \frac{1}{t}\, [\, \widehat{U}(t) - 1\,] - i\, \widehat{A} \right\} \psi \right\|^2 = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{t} (\, e^{it\lambda} - 1\,) - i\, \lambda \right] d\widehat{E}\, \psi \right\|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{t} (\, e^{it\lambda} - 1\,) - i\, \lambda \right|^2 d\, \|\, \widehat{E}\, \psi \,\|^2$$

$$\leqq \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left| \frac{1}{t} (\, e^{it\lambda} - 1\,) \right| + |\lambda| \right]^2 d\, \|\, \widehat{E}\, \psi \,\|^2;$$

mit

$$\left| \frac{1}{t} (\, e^{it\lambda} - 1\,) \right| = \left| i \int_0^{\lambda} e^{itx}\, dx \right| \leqq \int_0^{\lambda} |e^{itx}|\, dx = \int_0^{\lambda} dx = \lambda$$

folgt daraus

$$\left\| \left\{ \frac{1}{t}\, [\, \widehat{U}(t) - 1\,] - i\, \widehat{A} \right\} \psi \right\|^2 \leqq 4 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\, d\, \|\, \widehat{E}\, \psi \,\|^2 = 4\, \|\, \widehat{A}\, \psi \,\|^2 < \infty.$$

(iii) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{t} (\, e^{it\lambda} - 1\,) - i\, \lambda \right] = \lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it\lambda)^n}{n!} - 1 \right) - i\, \lambda \right]$$

$$= \lim_{t\to 0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1}(i\lambda)^n}{n!} = 0;$$

nach Satz 1.21 folgt daraus für alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$

$$\lim_{t\to 0} \left\| \left\{ \frac{1}{t} [\, \widehat{U}(t) - 1\,] - i\,\widehat{A} \right\} \psi \right\| = 0. \qquad \square$$

Für Hilberträume bedeutet die oben erwähnte Eigenschaft der schwachen Stetigkeit, daß

$$\lim_{t\to\infty} (\varphi, \widehat{U}(t)\,\psi) = (\varphi, \psi) \tag{4.108}$$

gilt für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$. Hat man es speziell mit einer unitären Gruppe zu tun, dann sind schwache und starke Stetigkeit sogar äquivalent, denn aus (4.108) folgt

$$\lim_{t\to\infty} \|\, \widehat{U}(t)\,\psi - \psi\,\|^2 = \lim_{t\to\infty} (\widehat{U}(t)\,\psi - \psi, \widehat{U}(t)\,\psi - \psi)$$
$$= \lim_{t\to\infty} [\,(\widehat{U}(t)\,\psi, \widehat{U}(t)\,\psi) - (\widehat{U}(t)\,\psi, \psi) - (\psi, \widehat{U}(t)\,\psi) + (\psi, \psi)\,] = 0$$

für alle $\psi \in \mathcal{H}$ [61]

Der Anlaß, die in Satz 4.154 beschriebenen Gruppen zu betrachten, liegt nun darin, daß diese nicht einfach ein spezielles Beispiel darstellen, sondern daß sich alle starkstetige unitäre Gruppen in dieser Form darstellen lassen. Das ist die wesentliche Aussage vom

4.155 Satz von Stone: [62] *$\mathcal{H}$ sei ein komplexer Hilbertraum und $\big(\widehat{U}(t)\big)_{t\in\mathbb{R}}$ eine stark stetige unitäre Gruppe auf $\mathcal{H}$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten selbstadjungierten Operator $\widehat{A}$ auf $\mathcal{H}$, sodaß $\widehat{U}(t) = e^{\,it\widehat{A}}$ gilt für alle $t \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt*

$$\operatorname{dom} \widehat{U}(t) = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \;\middle|\; \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} [\, \widehat{U}(t)\,\psi - \psi\,] \in \mathcal{H} \text{ existiert} \right\}$$

und

$$\widehat{A}\,\psi = -\lim_{t\to 0} \frac{i}{t} [\, \widehat{U}(t)\,\psi - \psi\,]$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $\psi \in \operatorname{dom} \widehat{A}$.

[61] Für separable Hilberträume ist sogar die *schwache Meßbarkeit* einer unitären Gruppe zu deren starker Stetigkeit äquivalent. Eine Gruppe $(\widehat{G}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ heißt schwach meßbar, wenn die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(t) = (\varphi, \widehat{G}(t)\,\psi)$ Lebesgue-meßbar ist für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$.

[62] Benannt nach M. H. Stone, der dieses Resultat entdeckt hat [356], [357]. Der hier gezeigte Beweis findet sich erstmals bei von Neumann [271]; dort wird auch die Äquivalenz von schwacher Meßbarkeit und starker Stetigkeit bei unitären Gruppen gezeigt. Eine Verallgemeinerung auf starkstetige Halbgruppen und Banachräume liefert der *Satz von Hille-Yosida: Eine lineare Abbildung $\mathcal{T}$ auf einem Banachraum $\mathcal{E}$ ist genau dann infinitesimaler Generator einer stark stetigen Halbgruppe $(\mathcal{G}(t))_{t\geqq 0}$, für die $\|\mathcal{G}(t)\| \leqq M\,e^{\omega t}$ gilt für alle $t \geqq 0$ mit $M \geqq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$, wenn $(\omega, \infty) \subset \rho(\mathcal{T})$ und $\|\,(\mathcal{T} - \lambda\,)^{-n}\,\| \leqq M\,/\,(\,\lambda - \omega\,)^n$ für alle $\lambda \in (\omega, \infty)$ und alle $n \in \mathbb{N}$.* Dieser Satz ist nach E. Hille [159] und K. Yosida [395] benannt, die ihn unabhängig voneinander entdeckten.

Beweis: Es seien μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mu)$. Definiert man für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$

$$(\widehat{F}\,\psi, \varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(\widehat{U}(t)\,\psi, \varphi)\,dt,$$

dann wird hierdurch ein linearer Operator auf $\mathcal{H}$ erklärt, den man symbolisch in der Form $\widehat{F} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\widehat{U}(t)\,dt$ schreiben kann. Ist $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mu)$ und $\widehat{G} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\widehat{U}(t)\,dt$, dann gilt aufgrund der Eigenschaften des Skalarprodukts sowie der Operatoren $\widehat{U}(t)$ für alle $c \in \mathbb{C}$ und alle $s \in \mathbb{R}$

$$\widehat{F}^* = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-t)}\,\widehat{U}(t)\,dt,$$

$$c\,\widehat{F} = \int_{-\infty}^{\infty} c\,f(t)\,\widehat{U}(t)\,dt,$$

$$\widehat{F} + \widehat{G} = \int_{-\infty}^{\infty} [\,f(t) + g(t)\,]\,\widehat{U}(t)\,dt,$$

$$\widehat{U}(s)\,\widehat{F} = \widehat{F}\,\widehat{U}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\,t - s\,)\,\widehat{U}(t)\,dt,$$

$$\widehat{F}\,\widehat{G} = \widehat{G}\,\widehat{F} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,g(\,t - s\,)\,\widehat{U}(t)\,ds\,dt.$$

Betrachtet man nun speziell die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{für} \quad t \geqq 0, \\ 0 & \text{für} \quad t < 0, \end{cases}$$

dann erhält man den Operator $\widehat{F} = \int_{0}^{\infty} e^{-t}\,\widehat{U}(t)\,dt$; hierfür gilt $\widehat{F}^* = \int_{-\infty}^{0} e^{t}\,\widehat{U}(t)\,dt$ sowie

$$\widehat{F} + \widehat{F}^* = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\,\widehat{U}(t)\,dt,$$

$$\widehat{F}\,\widehat{F}^* = \widehat{F}^*\widehat{F} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\,\widehat{U}(t)\,dt$$

und somit $\widehat{F}\,\widehat{F}^* = \widehat{F}^*\widehat{F} = \frac{1}{2}\,(\,\widehat{F} + \widehat{F}^*\,)$, sodaß der Operator $\widehat{V} = 1 - 2\,\widehat{F}$ unitär ist. Es folgt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{t}\,(\,\widehat{U}(t)-1\,)\,(\,\widehat{V}-1\,) &= -\frac{2}{t}\,(\,\widehat{U}(t)-1\,)\,\widehat{F} = \frac{2}{t}\,(\,\widehat{F}-\widehat{F}\,\widehat{U}(t))\\
&= \frac{2}{t}\left(\int_0^\infty e^{-t}\,\widehat{U}(s)\,ds - \int_t^\infty e^{\,t-s}\,\widehat{U}(s)\,ds\right)\\
&= \frac{2}{t}\left(\int_0^\infty e^{-t}\,\widehat{U}(s)\,ds - \int_0^\infty e^{\,t-s}\,\widehat{U}(s)\,ds + \int_0^t e^{\,t-s}\,\widehat{U}(s)\,ds\right)\\
&= \frac{2e^{\,t}}{t}\int_0^t e^{-s}\,\widehat{U}(s)\,ds - \frac{2\,(\,e^{\,t}-1\,)}{t}\int_0^\infty e^{-s}\,\widehat{U}(s)\,ds\\
&= \frac{2e^{\,t}}{t}\int_0^t e^{-s}\,\widehat{U}(s)\,ds - \frac{2\,(\,e^{\,t}-1\,)}{t}\,\widehat{F}
\end{aligned}
$$

und daraus weiter

$$
\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,(\,\widehat{U}(t)-1\,)\,(\,\widehat{V}-1\,) = 2-2\,\widehat{F} = \widehat{V}+1, \tag{4.109}
$$

wobei es sich um starke Konvergenz handelt. Gilt $(\,\widehat{V}-1\,)\,\varphi = 0$, also $\widehat{V}\,\varphi = \varphi$, dann folgt

$$
\frac{1}{t}\,(\,\widehat{U}(t)-1\,)\,(\,\widehat{V}-1\,)\,\varphi = 0,
$$

mit (4.109) weiter

$$
(\,\widehat{V}+1\,)\,\varphi = 0,
$$

also $\widehat{V}\,\varphi = -\varphi$ und damit $\varphi = 0$. Folglich ist $\widehat{V}-1$ injektiv. Nach Satz 3.43 ist somit $\widehat{V}$ die Cayley-Transformierte eines symmetrischen Operators

$$
\widehat{R} = i\,(\,\widehat{V}+1\,)\,(\,\widehat{V}-1\,)^{-1}
$$

mit $\mathrm{dom}\,\widehat{R} = \mathrm{ran}\,(\,\widehat{V}-1\,)$, und nach Corollar 3.45 ist $\widehat{R}$ sogar selbstadjungiert. Zu jedem $\psi\in\mathrm{dom}\,\widehat{R}$ gibt es ein $\varphi\in\mathrm{ran}\,(\,\widehat{V}-1\,)$ mit $\psi = (\,\widehat{V}-1\,)\,\varphi$; hierfür gilt

$$
\widehat{R}\,\psi = \widehat{R}\,(\,\widehat{V}-1\,)\,\varphi = i\,(\,\widehat{V}+1\,)\,\varphi
$$

und damit

$$
\widehat{R}\,\psi = \lim_{t\to 0}\frac{1}{it}\,(\,\widehat{U}(t)-1\,)\,\psi, \tag{4.110}
$$

wobei wieder starke Konvergenz vorliegt. Definiert man einen Operator $\widehat{S}$ als schwachen Limes $\widehat{S} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{it}\,(\,\widehat{U}(t)-1\,)$, dann gilt $\widehat{S}\supset\widehat{R}$, und außerdem erhält man für alle $\psi\in\mathrm{dom}\,\widehat{S}$ und alle $\varphi\in\mathrm{dom}\,\widehat{S}^*$ nach Corollar 2.143

$$
(\widehat{S}\,\psi,\varphi) = (\psi,\widehat{S}^*\varphi) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{-it}\Big(\psi,(\,\widehat{U}(-t)-1\,)\,\varphi\Big)
$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{it} \Big(\psi, (\,\widehat{U}(t) - 1\,)\,\varphi \Big) = (\psi, \widehat{S}\,\psi),$$

das heißt, $\widehat{S}$ ist eine symmetrische Erweiterung des selbstadjungierten Operators $\widehat{R}$. Daraus folgt $\widehat{S} = \widehat{R}$, also gilt $\widehat{R} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{it}\,(\,\widehat{U}(t) - 1\,)$ im starken wie im schwachen Sinn. Nun seien

$$\widehat{R} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\widehat{E}$$

die Spektraldarstellung von $\widehat{R}$ nach Satz 4.119 mit einem geeigneten Spektralmaß $\widehat{E}$ und $(\widehat{G}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine Operatorenschar mit

$$\widehat{G}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\widehat{E}.$$

Für letztere gilt nach Satz 4.102

$$\widehat{G}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\widehat{E} = \mathbf{1};$$

$$\widehat{G}^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{i\lambda t}}\, d\widehat{E} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\, d\widehat{E} = \widehat{G}(-t);$$

$$\widehat{G}(t)\,\widehat{G}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, e^{i\lambda s}\, d\widehat{E} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t+s)}\, d\widehat{E} = \widehat{G}(\,t+s\,)$$

und damit $\widehat{G}^*\widehat{G} = \widehat{G}\,\widehat{G}^* = \mathbf{1}$, das heißt, $(\widehat{G}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine unitäre Gruppe. Nach Konstruktion ist jedes $\widehat{U}(t)$ mit $\widehat{V}$, mit allen Elementen von $\operatorname{ran}\widehat{E}$ und mit allen $\widehat{G}(s)$ vertauschbar. Nun sei zu $C \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{G}_C := \big\{\, \varphi \in \mathcal{H} \;\big|\; \forall\,\lambda \geqq C\;\; \widehat{E}((-\infty,\lambda]\,\varphi = \psi \;\wedge\; \forall\,\lambda \leqq -C\;\; \widehat{E}(-\infty,\lambda])\,\varphi = 0 \,\big\};$$

dann gilt für alle $\psi \in \mathsf{G}_C$

$$\widehat{G}(t)\,\psi = \int_{-C}^{C} e^{i\lambda t}\, d\widehat{E}$$

und damit

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{it}\,(\,\widehat{G}(t) - 1\,)\,\psi = \lim_{t\to 0} \frac{1}{it} \left(\int_{-C}^{C} e^{i\lambda t}\, d\widehat{E}\,\psi - \int_{-C}^{C} d\widehat{E}\,\psi \right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \int_{-C}^{C} \frac{e^{i\lambda t} - 1}{it}\,\widehat{E}\,\psi = \int_{-C}^{C} \lambda\, d\widehat{E}\,\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\widehat{E}\,\lambda = \widehat{R}\,\psi.$$

Außerdem ist

$$\lim_{C\to\infty} [\,\widehat{E}((-\infty, C\,]) - \widehat{E}((-\infty, -C\,])]\,\psi = \psi - 0 = \psi,$$

das heißt, G_C ist dicht in $\operatorname{dom}\widehat{U}(t)$ für alle $C \in \mathbb{R}$. Für alle $\psi \in \mathsf{G}_C$ gilt folglich

$$\widehat{R}\,\psi = \lim_{t\to 0} \frac{1}{it}\,(\,\widehat{G}(t) - 1\,)\,\psi,$$

mit (4.110) also

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(\,\widehat{U}(t) - 1\,)\,\psi - \frac{1}{t}\,(\,\widehat{G}(t) - 1\,)\,\psi = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(\,\widehat{U}(t) - \widehat{G}(t))\,\psi = 0.$$

Für alle $\psi \in \mathsf{G}_C$ folgt dann

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \|\,(\,\widehat{U}(t) - \widehat{G}(t))\,\psi\,\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} \left[\widehat{U}\!\left(\frac{n+1-j}{n}\,t\right) \widehat{G}\!\left(\frac{j-1}{n}\,t\right) - \widehat{U}\!\left(\frac{n-j}{n}\,t\right) \widehat{G}\!\left(\frac{j}{n}\,t\right) \right] \psi \right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} \widehat{U}\!\left(\frac{n-j}{n}\,t\right) \widehat{G}\!\left(\frac{j-1}{n}\,t\right) \left[\widehat{U}\!\left(\frac{t}{n}\right) - \widehat{G}\!\left(\frac{t}{n}\right) \right] \psi \right\| \\
&\leqq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left\| \widehat{U}\!\left(\frac{n-j}{n}\,t\right) \widehat{G}\!\left(\frac{j-1}{n}\,t\right) \left[\widehat{U}\!\left(\frac{t}{n}\right) - \widehat{G}\!\left(\frac{t}{n}\right) \right] \psi \right\| \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left\| \left[\widehat{U}\!\left(\frac{t}{n}\right) - \widehat{G}\!\left(\frac{t}{n}\right) \right] \psi \right\| \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \left\{ n \left\| \left[\widehat{U}\!\left(\frac{t}{n}\right) - \widehat{G}\!\left(\frac{t}{n}\right) \right] \psi \right\| \right\} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \left\{ t \left\| \frac{n}{t} \left[\widehat{U}\!\left(\frac{t}{n}\right) - \widehat{G}\!\left(\frac{t}{n}\right) \right] \psi \right\| \right\} = 0
\end{aligned}$$

und somit $\widehat{U}(t) \restriction \mathsf{G}_c = \widehat{G}(t) \restriction \mathsf{G}_C$. Da die $\widehat{U}(t)$ und $\widehat{G}(t)$ beschränkt sind, gilt $\widehat{U}(t) = \widehat{G}(t)$, und daraus folgt

$$\widehat{U}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\widehat{E} = e^{it\widehat{A}}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{U}(t)$. □

Um die wichtigste Anwendung von Satz 4.155 zu illustrieren und damit gleichzeitig dessen Bedeutung für die Quantenmechanik anzudeuten, betrachten wir den folgenden Sachverhalt. Es seien $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum, $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$ und

$(\widehat{U}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ die von $\widehat{A}$ gemäß Satz 4.155 ezeugte unitäre Gruppe. Daraus konstruieren wir die Differentialgleichung

$$-i\,\frac{d\psi}{dt} = \widehat{A}\,\psi \tag{4.111}$$

mit der Anfangsbedingung $\psi(0) = \varphi \in \operatorname{dom}\widehat{A}$. Dann ist die Funktion $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \operatorname{dom}\widehat{A}$ mit $\psi(t) = \widehat{U}(t)\,\varphi = e^{it\widehat{A}}\,\varphi$ eine Lösung dieses Problems, wie man duch Nachrechnen sofort überprüft[63]. Man kann dies auch durch die formale Operatordifferentialgleichung

$$\frac{d\,\widehat{U}(t)}{dt} = \widehat{A}\,\widehat{U}(t)$$

zum Ausdruck bringen, deren Lösung gerade die in Satz 4.155 beschriebene unitäre Gruppe ist. Diese beschreibt somit das *dynamische Verhalten* der durch obiges Anfangswertproblem definierten Vektorenschar $(\psi(t))_{t\in\mathbb{R}}$, also das Änderungsverhalten des Vektors $\psi(t)$, wenn der Parameter t verändert wird, und da $(\widehat{U}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ durch $\widehat{A}$ vollständig festgelegt ist, wird dieses dynamische Verhalten ebenfalls bereits durch $\widehat{A}$ vollständig festgelegt. In diesem Sinn beschreibt ein selbstadjungierte Operator $\widehat{A}$ ein *dynamisches System*; die Lösungen $(\psi(t))_{t\in\mathbb{R}}$ von (4.111) nennt man die *Zustände* dieses dynamischen Systems.

Das wäre für sich allein schon interessant genug, noch viel bedeutender ist jedoch die Tatsache, daß sich hier ein Zusammenhang mit der Zerlegung des Hilbertraums $\mathcal{H}$ gemäß Definition 4.141 etablieren läßt [383]. Dazu formulieren wir zunächst eine weitere

4.156 Definition: $\mathcal{H}$ sei ein komplexer Hilbertraum und $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$. Dann heißt $\psi \in \mathcal{H}$ ***stationärer Zustand bezüglich*** $\widehat{A}$, wenn für jeden beschränkten selbstadjungierten Operator $\widehat{B}$ auf $\mathcal{H}$ die Größe $\langle\,\widehat{B}\,\rangle_\psi(t) := (e^{-it\widehat{A}}\,\psi, \widehat{B}\,e^{-it\widehat{A}}\,\psi)$ konstant bezüglich des Parameters t ist. Dazu sei $\mathcal{H}_{\mathsf{stat}} := \{\,\psi \in \mathcal{H} \mid \psi$ ist stationärer Zustand bezüglich $\widehat{A}\,\}$.

Der erwähnte Zusammenhang oder genauer gesagt ein erster Aspekt davon wird nun sichtbar durch den folgenden

4.157 Satz: *Es seien $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum und $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$. Dann ist $\psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ genau dann ein stationärer Zustand bezüglich $\widehat{A}$, wenn ψ ein Eigenvektor von $\widehat{A}$ ist.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: $\psi \neq 0$ sei ein stationärer Zustand bezüglich $\widehat{A}$. Betrachte den Operator $\widehat{B}$ mit $\widehat{B}\,\varphi = (\psi, \varphi)\,\psi$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$. Dieser ist der orthogonale Projektor auf $\operatorname{span}\{\psi\}$ und damit beschränkt und selbstadjungiert, folglich ist $\langle\,\widehat{B}\,\rangle_\psi(t)$ konstant nach Definition 4.156. Außerdem gilt einerseits

$$\langle\,\widehat{B}\,\rangle_\psi(t) = \left|\,\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,\|\,d\widehat{E}\,\psi\,\|^2\,\right|^2,$$

[63] Das ist eine direkte Verallgemeinerung des reellen Anfangswertproblems $f' = a\,f$ mit $f(0) = g$, das bekanntlich die Lösung $f(t) = g\,e^{iat}$ besitzt.

andererseits nach Satz 4.154 (i)

$$\langle\, \widehat{B}\,\rangle_\psi(t) = (e^{-it\widehat{A}}\,\psi, e^{-it\widehat{A}}\,\widehat{B}\,\psi) = (e^{-it\widehat{A}}\,\psi, e^{-it\widehat{A}}\,\psi) = (\psi,\psi) = 1$$

und damit

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,\|\,d\widehat{E}\,\psi\,\|^2\right|^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,d\mu_\psi\right|^2 = 1$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Das kann nur funktionieren, wenn es genau ein $\zeta \in \mathbb{C}$ gibt mit $\mu_\psi(\{\zeta\}) = 1$ und $\mu_\psi(\,\mathbb{C} \setminus \{\zeta\}) = 0$. Folglich ist ψ ein Eigenvektor von $\widehat{A}$ zum Eigenwert ζ.
„$\Longleftarrow$“: Ist ψ ein Eigenvektor von $\widehat{A}$, dann gibt es ein $\zeta \in \mathbb{C}$, sodaß $\widehat{A}\,\psi = \zeta\,\psi$. Nach Satz 4.113 folgt

$$e^{\,it\widehat{A}}\,\psi = e^{\,i\zeta t}\,\psi$$

und damit

$$\langle\, \widehat{B}\,\rangle_\psi(t) = (e^{-i\zeta t}\,\psi, \widehat{B}\,e^{-i\zeta t}\,\psi) = (\psi, \widehat{B}\,\psi)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, das heißt, $\langle\, \widehat{B}\,\rangle_\psi(t)$ ist konstant. □

Der sich hierbei nicht nur sprachlich andeutende physikalische Bezug wird gleich noch offensichtlicher, wenn wir uns dem Spezialfall $\mathcal{H} = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ mit dem Lebesgue-Maß μ zuwenden[64]. Gleichzeitig läßt sich dabei der Zusammenhang mit der kanonischen Zerlegung des betrachteten Hilbertraums weiter ausbauen. Die folgende Definition liefert die hierfür nötigen Begriffe.

4.158 Definition: $\widehat{A}$ sei ein selbstadjungierter Operator auf $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu)$. Dann heißt eine Funktion $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu)$

(i) *gebundener Zustand bezüglich* $\widehat{A}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge C von $\mathbb{R}^n$ gibt, sodaß $\|\,\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} f\,\| \leqq \varepsilon$ für alle $t \in \mathbb{R}$;

(ii) *Streuzustand bezüglich* $\widehat{A}$, wenn $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \|\,\chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} f\,\| = 0$ für jede kompakte Teilmenge C von $\mathbb{R}^n$;

(iii) *Steuzustand im zeitlichen Mittel bezüglich* $\widehat{A}$, wenn $\lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T}^{T} \|\,\chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} f\,\|^2\,dt = 0$ gilt für jede kompakte Teilmenge C von $\mathbb{R}^n$.

Die einzelnen Mengen dieser Zustände liefern wieder Unterräume von $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu)$, die jeweils eigene Bezeichnungen verdienen.

4.159 Definition: $\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum und $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator. Dann schreibt man

(i) $\mathcal{H}_{\text{bound}} = \{\, f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu) \mid f$ ist gebundener Zustand bezüglich $\widehat{A}\,\}$,

[64]Wir schreiben hier $\|\ \|_2 \equiv \|\ \|$.

(ii) $\mathcal{H}_{\mathrm{scatt}} = \{\, f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu) \mid f$ ist Streuzustand bezüglich $\widehat{A}\,\}$,

(iii) $\mathcal{H}_{\mathrm{ta}} = \{\, f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu) \mid f$ ist Streuzustand im zeitlichen Mittel $\}$.

Auch hierbei handelt es sich nicht nur um algebraische, sondern auch um topologische Unterräume.

4.160 Satz: *$\mathcal{H}_{\mathrm{bound}}, \mathcal{H}_{\mathrm{scatt}}$ und $\mathcal{H}_{\mathrm{ta}}$ sind stets abgeschlossen.*

Beweis: Zunächst sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{H}_{\mathrm{bound}}$ mit $\lim\limits_{t\to\infty} f_n = f$, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodaß $\|\, f - f_{n_0} \| \leqq \varepsilon/2$, und eine kompakte Teilmenge C von $\mathbb{R}^n$, sodaß $\|\, \chi_{\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} f_{n_0} \| \leqq \varepsilon/2$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|\, \chi_{\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} f \,\| &\leqq \|\, \chi_{\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} (\, f - f_{n_0}\,) \,\| + \|\, \chi_{\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} f_{n_0} \,\| \\ &\leqq \|\, \chi_{\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} \,\|\, \|\, f - f_{n_0} \,\| + \|\, \chi_{\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} f_{n_0} \,\| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $f \in \mathcal{H}_{\mathrm{bound}}$.
Nun seien $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}_{\mathrm{scatt}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ und C eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodaß $\|\, g - g_{n_0} \| \leqq \varepsilon/2$ und $\|\, \chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} g_{n_0} \| \leqq \varepsilon/2$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit gilt analog zu oben

$$\|\, \chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} g \,\| \leqq \|\, \chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} (\, g - g_{n_0}\,) \,\| + \|\, \chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} g_{n_0} \,\| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, und es folgt $g \in \mathcal{H}_{\mathrm{scatt}}$.
Schließlich sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}_{\mathrm{ta}}$ mit $\lim\limits_{t\to\infty} h_n = h$ und C wieder eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodaß $\|\, h - h_{n_0} \|^2 \leqq \varepsilon/8$ und $\frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T} \|\, \chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} h_{n_0} \|^2\, dt \leqq \varepsilon/8$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T} \|\, \chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} h \,\|^2\, dt &\leqq \frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T} \big[\, \|\, \chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} (\, h - h_{n_0}\,) \,\| + \|\, \chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} h_{n_0} \,\| \,\big]^2\, dt \\ &\leqq \frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T} \big[\, \|\, \chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} (\, h - h_{n_0}\,) \,\|^2 \\ &\qquad + 2\, \|\, \chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} (\, h - h_{n_0}\,) \,\|\, \|\, \chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} h_{n_0} \,\| \\ &\qquad + \|\, \chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} h_{n_0} \,\|^2 \,\big]\, dt \\ &\leqq \frac{2}{T}\int\limits_{-T}^{T} \big[\, \|\, \chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} (\, h - h_{n_0}\,) \,\|^2 + \|\, \chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} h_{n_0} \,\|^2 \,\big]\, dt\end{aligned}$$

$$\leqq \frac{2}{T}\left(\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}\right)\int\limits_{-T}^{T} dt = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für genügend große $T > 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $h \in \mathcal{H}_{\mathrm{ta}}$. □

Der wesentliche Punkt liegt nun in der Möglichkeit, Relationen zwischen den Unterräumen der Definition 4.159 mit jenen der Definition 4.141 aufzustellen [383]. Am einfachsten ergibt sich dabei das folgende Resultat für gebundene Zustände.

4.161 Satz: *Für jeden selbstadjungierten Operator auf $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n,\mu)$ gilt $\mathcal{H}_{\mathrm{p}} \subset \mathcal{H}_{\mathrm{bound}}$.*

Beweis: $\widehat{A}$ sei selbstadjungiert und f eine Eigenfunktion von $\widehat{A}$ zum Eigenwert λ. Zu $\varepsilon > 0$ wähle eine kompakte Menge $\mathrm{C} \subset \mathbb{R}^n$, sodaß $\|\chi_{\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{C}} f\| \leqq \varepsilon$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|\chi_{\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} f\|^2 &= (\chi_{\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} f, \chi_{\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} f)\\ &= (\chi_{\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{C}}\, e^{-i\lambda t} f, \chi_{\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{C}}\, e^{-i\lambda t} f) = \|\chi_{\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{C}} f\|^2 \leqq \varepsilon^2,\end{aligned}$$

das heißt $f \in \mathcal{H}_{\mathrm{bound}}$. Nach Satz 4.142 gilt daher für alle $f \in \mathcal{H}_{\mathrm{p}}$ auch $f \in \mathcal{H}_{\mathrm{bound}}$. □

Natürlich folgt daraus für jeden selbstadjungierten Operator sofort $\mathcal{H}_{\mathrm{stat}} \subset \mathcal{H}_{\mathrm{bound}}$. Die Umkehrung von Satz 4.161 ist nur unter speziellen Voraussetzungen richtig; hierzu müssen vom verwendeten Spektralmaß gewisse Kompaktheitseigenschaften verlangt werden.

Wir stellen das jedoch erst einmal kurz zurück und betrachten zunächst Streuzustände und Streuzustände im zeitlichen Mittel. Für erstere erhält man dabei ein Resultat von gleicher Allgemeinheit wie Satz 4.161.

4.162 Satz: *Ist $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n,\mu)$, dann gilt folgendes.*

(i) $\mathcal{H}_{\mathrm{scatt}} \subset \mathcal{H}_{\mathrm{ta}}$;

(ii) $\mathcal{H}_{\mathrm{ta}} \perp \mathcal{H}_{\mathrm{bound}}$.

Beweis: (i) Für jedes $f \in \mathcal{H}_{\mathrm{scatt}}$ gilt

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T} \|\chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} f\|^2\, dt \leqq \frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T} \lim_{t\to\infty} \|\chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} f\|^2\, dt = 0.$$

(ii) Es seien $f \in \mathcal{H}_{\mathrm{ta}}$ und $g \in \mathcal{H}_{\mathrm{bound}}$. Dann gibt es eine reelle Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$, sodaß jede kompakte Teilmenge C von $\mathbb{R}^n$ den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \|\chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it_n\widehat{A}} f\| = 0$ liefert, das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|\chi_{\mathrm{C}}\, e^{-it_n\widehat{A}} f\| < \varepsilon$ für alle $n \geqq n_0$. Mit geeigneter Wahl von C gilt dann auch $\|\chi_{\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{C}}\, e^{-it\widehat{A}} g\| \leqq \varepsilon$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und damit nach Ungleichung 2.142

$$\begin{aligned}|(f,g)| &= |(\chi_C\, e^{-it_n\widehat{A}} f, \chi_C\, e^{-it_n\widehat{A}} g) + (\chi_{\mathbb{R}^n\setminus C}\, e^{-it_n\widehat{A}} f, \chi_{\mathbb{R}^n\setminus C}\, e^{-it_n\widehat{A}} g)| \\ &\leqq |(\chi_C\, e^{-it_n\widehat{A}} f, \chi_C\, e^{-it_n\widehat{A}} g)| + |(\chi_{\mathbb{R}^n\setminus C}\, e^{-it_n\widehat{A}} f, \chi_{\mathbb{R}^n\setminus C}\, e^{-it_n\widehat{A}} g)| \\ &\leqq \|\chi_C\, e^{-it_n\widehat{A}} f\|\,\|\chi_C\, e^{-it_n\widehat{A}} g\| + \|\chi_{\mathbb{R}^n\setminus C}\, e^{-it_n\widehat{A}} f\|\,\|\chi_{\mathbb{R}^n\setminus C}\, e^{-it_n\widehat{A}} g\| \\ &\leqq \varepsilon\,(\,\|g\| + \|f\|\,).\end{aligned}$$

Daraus folgt $(f,g) = 0$. □

Natürlich gilt damit auch $\mathcal{H}_{\text{scatt}} \perp \mathcal{H}_{\text{bound}}$ sowie $\mathcal{H}_{\text{scatt}} \perp \mathcal{H}_{\text{p}}$ und $\mathcal{H}_{\text{ta}} \perp \mathcal{H}_{\text{p}}$. Weitergehende Aussagen sind wiederum nur mit Zusatzannahmen möglich; setzt man für $\widehat{E}$ die bereits angedeutete Kompaktheitseigenschaft voraus, erhält man zusätzlich den folgenden

4.163 Satz: *Es seien $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n,\mu)$ und $\widehat{E}$ dessen Spektralmaß. Für jede kompakte Teilmenge C von $\mathbb{R}^n$ und jedes beschränkte Intervall J sei der Operator $\chi_C\,\widehat{E}(\mathsf{J})$ kompakt. Dann gilt $\mathcal{H}_{\text{ac}} \subset \mathcal{H}_{\text{scatt}}$.*

Beweis: Für alle $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n,\mu)$ und alle $g \in \mathcal{H}_{\text{ac}}$ gilt

$$(f, e^{-it\widehat{A}} g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\, d\,(f, \widehat{E}\, g).$$

$(f, \widehat{E}\, g)$ ist absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^n$, nach Satz 1.24 gibt es somit ein $h \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n,\mu)$ mit

$$(f, \widehat{E}\, g) = \int_{-\infty}^{\lambda} h\, d\mu,$$

und es folgt

$$(f, e^{-it\widehat{A}} g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\, h(\lambda)\, d\mu.$$

Das Riemann-Lebesgue-Lemma[65] liefert $\lim\limits_{t\to\pm\infty} (f, e^{-it\widehat{A}} g) = 0$, und weil $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n,\mu)$ beliebig ist, folgt $\lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{-it\widehat{A}} g = 0$. Nach Voraussetzung gilt dann für jede kompakte Teilmenge C von $\mathbb{R}^n$ und jedes beschränkte Intervall J

$$\lim_{t\to\pm\infty} \chi_C\, e^{it\widehat{A}}\, \widehat{E}(\mathsf{J})\, g = \lim_{t\to\pm\infty} \chi_C\, \widehat{E}(\mathsf{J})\, e^{it\widehat{A}} g = 0.$$

Wählt man speziell das Intervall $(-n,n)$, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{E}((-n,n))\, g = g$. Mit Satz 4.160 folgt

$$\lim_{t\to\pm\infty} \chi_C\, e^{it\widehat{A}} g = 0$$

und damit die Behauptung. □

[65] Das *Riemann-Lebesgue-Lemma* besagt, daß die Fourier-Transformierte jeder Lebesgue-integrierbaren Funktion im Unendlichen verschwindet, das heißt: *Für alle $\varphi \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n,\mu)$ gilt* $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{itx}\, \varphi(x)\, dx = 0$.

Um nun auch die Streuzustände im zeitlichen Mittel zu berücksichtigen, brauchen wir zwei Hilfssätze, deren erster eine Aussage über den Mittelwert der Fourier-Transformierten von speziellen Maßen macht.

4.164 Theorem von Wiener: [66] *ν sei ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch*

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, d\nu.$$

Dann gilt

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(t)|^2\, dt = \sum_{x\in\mathbb{R}} |\nu(|\{x\})|^2.$$

Beweis: Nach Satz 1.25 (iii) gilt zunächst

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(t)|^2\, dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,t\,(\lambda-\gamma)}\, d\nu(\gamma)\, d\nu(\lambda)\, dt$$

$$= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-T}^{T} e^{-i\,t\,(\lambda-\gamma)}\, dt\, d\nu(\gamma)\, d\nu(\lambda).$$

Auswerten des inneren Integrals liefert dann

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-i\,t\,(\lambda-\gamma)}\, dt = \frac{1}{2T}\, \frac{e^{i\,T\,(\lambda-\gamma)} - e^{-i\,T\,(\lambda-\gamma)}}{i\,(\lambda-\gamma)} = \frac{\sin[\,T\,(\lambda-\gamma)\,]}{T\,(\lambda-\gamma)},$$

und daraus folgt

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(t)|^2\, dt = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[\,T\,(\lambda-\gamma)\,]}{T\,(\lambda-\gamma)}\, d\nu(\gamma)\, d\nu(\lambda).$$

Für den Integranden gilt

$$\frac{\sin[\,T\,(\lambda-\gamma)\,]}{T\,(\lambda-\gamma)} \leqq 1$$

sowie

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\sin[\,T\,(\lambda-\gamma)\,]}{T\,(\lambda-\gamma)} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \lambda \neq \gamma, \\ 1 & \text{für} \quad \lambda = \gamma, \end{cases}$$

und mit Satz 1.21 folgt daraus die Behauptung. □

[66] Dieses Resultat taucht erstmals in der Monographie [389] ihres Namensgebers auf; vergleiche auch [298].

Der zweite Hilfssatz wird durch diese Bezeichnung eher unterbewertet; es handelt sich dabei um eines der prominentesten Resultate der mathematischen Physik überhaupt, dessen Bedeutung weit über die hier beschriebene Anwendung hinausgeht.

4.165 RAGE-Theorem: [67] *$\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum, $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$ und $\widehat{P}_c$ der orthogonale Projektor auf $\mathcal{H}_c$. Dann gilt folgendes.*

(i) Für jeden kompakten Operator $\widehat{C}$ auf $\mathcal{H}$ gilt

$$\lim_{T\to\infty} \left\| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{it\widehat{A}}\, \widehat{C}\, \widehat{P}_c\, e^{-it\widehat{A}}\, dt \right\| = 0.$$

(ii) Für jeden kompakten Operator $\widehat{C}$ auf $\mathcal{H}$ und alle $\psi \in \mathcal{H}_c$ gilt

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \| \widehat{C}\, e^{-it\widehat{A}} \psi \|^2\, dt = 0;$$

(iii) Für jeden beschränkten Operator $\widehat{C}$ auf $\mathcal{H}$, für den $\widehat{C}\,(\widehat{A} + i)^{-1}$ kompakt ist, und alle $\psi \in \mathcal{H}_c$ gilt ebenfalls

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \| \widehat{C}\, e^{-it\widehat{A}} \psi \|^2\, dt = 0;$$

Beweis: (i) Nach Corollar 4.57 genügt es, die Behauptung für Operatoren mit endlichdimensionalem Wertebereich zu zeigen. Jeder solche Operator ist als endliche Summe von Operatoren mit eindimensionalem Wertebereich darstellbar, folglich genügt es sogar, den Beweis für letztere zu führen. Jeder Operator mit eindimensionalem Wertebereich ist in der Form $\widehat{Q} = \varphi\, f_\xi$ darstellbar mit $f_\xi(\psi) = (\psi, \xi)$ [68] und geeigneten $\varphi, \xi \in \mathcal{H}$. Dann gilt mit

$$\widehat{B} := \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{it\widehat{A}}\, \widehat{Q}\, \widehat{P}_c\, e^{-it\widehat{A}}\, dt$$

für alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$\widehat{B}\,\psi = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (\widehat{P}_c\, e^{-it\widehat{A}} \psi, \xi)\, e^{it\widehat{A}} \varphi\, dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (\psi, e^{it\widehat{A}}\, \widehat{P}_c\, \xi)\, e^{it\widehat{A}} \varphi\, dt$$

[67] Der Name dieses Satzes ist aus den Anfangsbuchstaben der Namen seiner Entdecker Ruelle, Amrein, Georgescu und Enß zusammengesetzt und wurde von Reed und Simon vorgeschlagen [298]. Unabhängig von ähnlichen Überlegungen durch Lax und Phillips [211] veröffentlichte Ruelle die erste Version des Resultats [322], das dann zuerst von Amrein und Georgescu [11] und etwas später von Enß [91] weiterentwickelt wurde; vergleiche auch [58] und [298]. Verallgemeinerungen auf kontrahierende Halbgruppen in Hilberträumen sowie auf stark stetige Halbgruppen in Banachräumen wurden von Goldstein [111] beziehungsweise Kreulich [203] veröffentlicht.

[68] Vergleiche Corollar 2.143.

und

$$\widehat{B}^*\psi = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (\psi, e^{it\widehat{A}}\varphi)\, e^{it\widehat{A}}\, \widehat{P}_c\, \xi\, dt.$$

Daraus folgt mit Ungleichung 2.142

$$\begin{aligned}\widehat{B}\,\widehat{B}^*\psi &= \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} (e^{it\widehat{A}}\,\widehat{P}_c\,\xi, e^{iu\widehat{A}}\,\widehat{P}_c\,\xi)\,(\psi, e^{iu\widehat{A}}\varphi)\, e^{it\widehat{A}}\varphi\, du\, dt \\ &\leqq \frac{\|\psi\|\,\|\varphi\|}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} (e^{it\widehat{A}}\,\widehat{P}_c\,\xi, e^{iu\widehat{A}}\,\widehat{P}_c\,\xi)\, e^{it\widehat{A}}\varphi\, du\, dt\end{aligned}$$

und weiter nach Satz 3.11 (ii) sowie Ungleichung 2.80

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{it\widehat{A}}\,\widehat{Q}\,\widehat{P}_c\, e^{-it\widehat{A}}\, dt\right\|^2 &= \|\widehat{B}\|^2 = \|\widehat{B}\,\widehat{B}^*\| \\ &\leqq \frac{\|\varphi\|^2}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} |(\widehat{P}_c\,\xi, e^{-i(t-u)\widehat{A}}\,\widehat{P}_c\,\xi)|\, ds\, dt \\ &\leqq \frac{\|\varphi\|^2}{4}\left[\frac{1}{T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} |(\widehat{P}_c\,\xi, e^{-i(t-u)\widehat{A}}\,\widehat{P}_c\,\xi)|^2\, ds\, dt\right]^{1/2}.\end{aligned}$$

Nach Satz 4.151 gibt es zu jedem $t \in \mathbb{R}$ ein Spektralmaß $\widehat{E}_t$, sodaß

$$e^{-i(t-u)\widehat{A}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(t-u)}\, d\widehat{E}_t;$$

also ist jeweils $\nu_t := (\xi, \widehat{E}_t\,\widehat{P}_c\,\xi)$ ein komplexes Maß, und damit folgt nach Satz 1.25 (iii)

$$\left\|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{it\widehat{A}}\,\widehat{Q}\,\widehat{P}_c\, e^{-it\widehat{A}}\, dt\right\|^2 \leqq \frac{\|\varphi\|^2}{4}\left[\frac{1}{T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(t-u)}\, d\nu_t\right|^2 ds\, dt\right]^{-1/2}.$$

Nach Satz 4.164 gilt daher

$$\lim_{T\to\infty}\left\|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{it\widehat{A}}\,\widehat{Q}\,\widehat{P}_c\, e^{-it\widehat{A}}\, dt\right\|^2 \leqq \|\varphi\|^2\left(\int_{-T}^{T}\sum_{x\in\mathbb{R}} |\nu_t(\{x\})|^2\, dt\right)^{1/2};$$

nach Konstruktion ist ν_t jedoch rein kontinuierlich, das heißt, es gilt $\nu_t(\{x\}) = 0$ für alle $t, x \in \mathbb{R}$, und daraus folgt

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} \|\,\widehat{Q}\, e^{-it\widehat{A}}\psi\,\|^2\, dt = 0.$$

(ii) Für jedes $\psi \in \mathcal{H}_\mathrm{c}$ gilt nach Ungleichung 2.142

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} \| \widehat{C}\, e^{-it\widehat{A}}\psi \|^2\, dt &= \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} (\widehat{C}\, e^{-it\widehat{A}}\psi, \widehat{C}\, e^{-it\widehat{A}}\psi)\, dt \\
&= \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} (\psi, e^{it\widehat{A}}\,\widehat{C}^*\widehat{C}\, e^{-it\widehat{A}}\psi)\, dt \\
&= \left(\psi, \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\widehat{A}}\,\widehat{C}^*\widehat{C}\, e^{-it\widehat{A}}\psi\, dt\right) \\
&= \left(\psi, \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\widehat{A}}\,\widehat{C}^*\widehat{C}\,\widehat{P}_\mathrm{c}\, e^{-it\widehat{A}}\, dt\, \psi\right) \\
&\leqq \left\| \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\widehat{A}}\,\widehat{C}^*\widehat{C}\,\widehat{P}_\mathrm{c}\, e^{-it\widehat{A}}\, dt\, \psi \right\|^2 \|\psi\|^2.
\end{aligned}$$

Da $\widehat{C}^*\widehat{C}$ nach Corollar 3.33 kompakt ist, folgt nach (i)

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} \| \widehat{C}\, e^{-it\widehat{A}}\psi \|^2\, dt = 0.$$

(iii) Zu jedem $\psi \in \operatorname{dom}\widehat{A} \cap \mathcal{H}_\mathrm{c}$ gibt es ein $\varphi \in \mathcal{H}_\mathrm{c}$ mit $\psi = (\widehat{A} + i)\varphi$, und damit gilt

$$\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} \| \widehat{C}\, e^{-it\widehat{A}}\psi \|^2\, dt = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} \| \widehat{C}\,(\widehat{A} + i)^{-1}\, e^{-it\widehat{A}}\varphi \|^2\, dt.$$

Da nach Voraussetzung $\widehat{C}$ kompakt und $\operatorname{dom}\widehat{A} \cap \mathcal{H}_\mathrm{c}$ dicht in $\mathcal{H}_\mathrm{c}$ ist, folgt nach (ii)

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} \| \widehat{C}\, e^{-it\widehat{A}}\psi \|^2\, dt = 0. \qquad \square$$

Mit diesen Hilfsmitteln beweisen wir nun ein Satz 4.163 entsprechendes Resultat für Streuzustände im zeitlichen Mittel.

4.166 Satz: *Ist $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ mit Spektralmaß $\widehat{E}$, sodaß für jede kompakte Teilmenge* C *von $\mathbb{R}^n$ und jedes beschränkte Intervall* J *der Operator $\chi_\mathrm{C}\, \widehat{E}(\mathrm{J})$ kompakt ist, dann gilt $\mathcal{H}_\mathrm{c} = \mathcal{H}_\mathrm{ta}$.*

Beweis: Nach Satz 4.161 gilt $\mathcal{H}_\mathrm{p}^\perp \supset \mathcal{H}_\mathrm{bound}^\perp$ und nach Satz 4.162 (ii) $\mathcal{H}_\mathrm{bound}^\perp \supset \mathcal{H}_\mathrm{ta}$; mit $\mathcal{H}_\mathrm{c} = \mathcal{H}_\mathrm{p}^\perp$ folgt daraus $\mathcal{H}_\mathrm{c} \supset \mathcal{H}_\mathrm{ta}$. Nun sei J ein beschränktes Intervall und $f \in \operatorname{ran}\widehat{E}(\mathrm{J})\,\widehat{P}_\mathrm{c}$.

Nach Voraussetzung und Satz 4.52 gibt es eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie abzählbare Orthonormalsysteme $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n,\mu)$ mit

$$\chi_C\,\widehat{E}(J)\,f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(f,g_n)\,h_n. \tag{4.112}$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} |(e^{-it\widehat{A}}f,g_n)|^2\,dt = \frac{1}{T}\int_{T}^{T}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\,d\,(\widehat{E}\,f,g_n)\right|^2 dt$$

Für alle $n\in\mathbb{N}$ ist die Funktion $\nu_n:\mathfrak{P}(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{C}$ mit

$$\nu_n(X) = (\widehat{E}(X)\,f,g_n) = (\widehat{E}(X)\,f,\widehat{P}_c\,g_n)$$

ein endliches Maß, daher gilt nach Satz 4.164 für alle $n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}|(e^{-it\widehat{A}}f,g_n)|^2\,dt = \sum_{x\in\mathbb{R}}|\nu_n(\{x\})|^2,$$

und da die ν_n nach Konstruktion rein kontinuierlich sind, folgt nach Satz 4.165 (ii) für alle $n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}|(e^{-it\widehat{A}}f,g_n)|^2\,dt = 0.$$

Außerdem gilt nach (4.112) und Satz 2.140

$$\begin{aligned}\|\chi_C\,e^{-it\widehat{A}}f\,\|^2 &= \|\chi_C\,\widehat{E}(J)\,e^{-it\widehat{A}}f\,\|^2\\ &= \left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(e^{-it\widehat{A}}f,g_n)\,h_n\right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\,|(e^{-it\widehat{A}}f,g_n)|^2,\end{aligned}$$

Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $n_0\in\mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}|a_n|^2\,|(e^{it\widehat{A}}f,g_n)|^2 \leqq \varepsilon\,\|\,e^{-it\widehat{A}}f\,\|^2 = \|f\|^2,$$

und mit

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\|\chi_C\,e^{-it\widehat{A}}f\,\|^2\,dt &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n|^2\,|(e^{-it\widehat{A}}f,g_n)|^2\,dt\\ &\quad+\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\sum_{n=n_0}^{\infty}|a_n|^2\,|(e^{-it\widehat{A}}f,g_n)|^2\,dt\end{aligned}$$

folgt daraus für genügend große T

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} \|\chi_{C}\, e^{-it\widehat{A}} f\,\|^2\, dt \leqq \varepsilon + \varepsilon\,\|f\|$$

und daher

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} \|\chi_{C}\, e^{-it\widehat{A}} f\,\|^2\, dt = 0.$$

Somit gilt $\mathcal{H}_{\mathrm{c}} \subset \mathcal{H}_{\mathrm{ta}}$. □

Damit können wir auch den Zusammenhang zwischen gebundenen und stationären Zuständen präzisieren.

4.167 Satz: *Ist $\widehat{A}$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ mit Spektralmaß $\widehat{E}$, sodaß für jede kompakte Teilmenge C von $\mathbb{R}^n$ und jedes beschränkte Intervall J der Operator $\chi_{\mathrm{C}}\,\widehat{E}(\mathrm{J})$ kompakt ist, dann gilt $\mathcal{H}_{\mathrm{p}} = \mathcal{H}_{\mathrm{bound}}$.*

Beweis: Nach Satz 4.162 (ii) und Satz 4.166 gilt $\mathcal{H}_{\mathrm{c}} \perp \mathcal{H}_{\mathrm{bound}}$ und damit $\mathcal{H}_{\mathrm{p}} \supset \mathcal{H}_{\mathrm{bound}}$. Mit Satz 4.161 folgt die Behauptung. □

Wir fassen die zentralen Aspekte dieses Abschnitts zusammen und erhalten damit zwar rein mathematische Aussagen, die jedoch nicht nur scheinbar auch physikalischen Charakter aufweisen. Zunächst lassen sich unter den Voraussetzungen von Satz 4.163, 4.166 oder 4.167 die Komponenten der kanonischen Zerlegung eines Hilbertraums alternativ interpretieren: Für jeden selbstadjungierten Operator auf $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ sind die Eigenzustände von $\widehat{A}$ die stationären Zustände, die Elemente von $\mathcal{H}_{\mathrm{p}}$ die gebundenen Zustände und die Elemente von $\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ die Streuzustände bezüglich dieses Operators. Gilt zusätzlich $\mathcal{H}_{\mathrm{sc}} = \{0\}$, dann erhält man außerdem $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}} = \mathcal{H}_{\mathrm{c}} = \mathcal{H}_{\mathrm{scatt}} = \mathcal{H}_{\mathrm{ta}}$ und damit eine vollständige Zerlegung des betrachteten Hilbertraums gemäß $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{p}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{c}} = \mathcal{H}_{\mathrm{p}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{ac}} = \mathcal{H}_{\mathrm{bound}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{scatt}} = \mathcal{H}_{\mathrm{bound}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{ta}}$.

Symbolverzeichnis

Angegeben ist jeweils die Seitenzahl des erstmaligen Auftretens des betreffenden Symbols.

$\bigvee_{\gamma<\Gamma} \widehat{P}_\gamma$	Supremum der Projektorfamilie $(\widehat{P}_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$	241
$\| \ \|_\infty$	Supremumsnorm	57
$\bigoplus_{\gamma<\Gamma}^{T} \mathcal{A}_\gamma$	topologische direkte Summe	61
$\mathcal{A}'$	topologischer Dualraum von $\mathcal{A}$	87
$\mathcal{A}^{-1}$	Umkehrabbildung der Abbildung $\mathcal{A}$	17
$\bigcup\mathfrak{A}$	Vereinigung der Elemente des Mengensystems $\mathfrak{A}$	10
$\aleph_\kappa$	κ-tes Element der Aleph-Reihe der Kardinalzahlen	10
$\mathfrak{B}_0(\mathrm{A})$	Baire-Algebra der Menge A	26
$\mathfrak{B}(\mathrm{A})$	Borel-Algebra der Menge A	25
$\mathfrak{ba}(\mathfrak{S},\mu)$	Raum der beschränkten additiven komplexen bezüglich μ absolut stetigen Funktionen auf $\mathfrak{S}$	138
$\beta\,\mathrm{A}$	Stone-Čech-Kompaktifizierung der Menge A	18
$\overline{\zeta}$	komplex konjugierte Zahl zu ζ	131
$\beth_\kappa$	κ-tes Element der Beth-Reihe der Kardinalzahlen	10
$\mathfrak{c}$	Mächtigkeit des Kontinuums	24
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	19
$\mathbb{C}^n$	n-faches kartesisches Produkt von $\mathbb{C}$	19
$\mathbb{C}^{n\times n}$	Raum der komplexen $n\times n$-Matrizen	44
$\mathbb{C}[X,Y]$	Ring der Polynome über $\mathbb{C}$ mit zwei Variablen	373
$C(\mathrm{A})$	Raum der stetigen Funktionen auf der Menge A	51
$C^r(\mathrm{A})$	Raum der r-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf der Menge A	45
$C^\infty(\mathrm{A})$	Raum der unendlichfach differenzierbaren Funktionen auf der Menge A	45
$\mathscr{C}(\mathcal{E},\mathcal{F})$	Menge der kompakten linearen Abbildungen von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{F}$	80
χ_A	charakteristische Funktion der Menge A	30
$\mathrm{cf}\,(\alpha)$	Konfinalität der Ordinalzahl α	10
$\mathrm{cotype}(\mathcal{E})$	Cotyp des Banachraums $\mathcal{E}$	147
$\mathrm{D}(\zeta,r)$	abgeschlossene Kreisseibe in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt ζ und Radius r	364
$\mathfrak{d}(\mathrm{A})$	Dichte der Menge A	13
δ_{ij}	Kronnecker-Symbol	63
$\det\widehat{A}$	Determinante des Operators $\widehat{A}$	312
$\mathrm{diam}\,\mathrm{A}$	Durchmesser der Menge A	19

Literaturverzeichnis

[1] Ohne Autorenangabe, *Orthogonal Expansions and their continuous Analogues. Proceedings of a Conference in Edwardsville, Illinois, 1967*, Southern Illinois University Press, Carbondale 1968

[2] N. I. Achieser und I. M. Glasmann, *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum*, Akademie-Verlag, Berlin 1977

[3] L. Alaoglu, Annals of Mathematics **41**, 252, 1940

[4] F. Albiac und N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Springer, New York 2006

[5] J. M. Aldaz, Journal of Mathematical Analysis and Applications **343**, 842, 2008

[6] J. M. Aldaz, Journal of Inequalities in pure and applied Mathematics **9**, Article 60, 2008

[7] J. Alonso und C. Benitez, Extracta Mathematicae **3**, 1, 1988

[8] J. Alonso und C. Benitez, Extracta Mathematicae **4**, 121, 1989

[9] H. Amann und J. Escher, *Analysis III*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin 2008

[10] D. Amir, *Characterizations of Inner Product Spaces*, Basel, Boston, Stuttgart 1986

[11] W. Amrein und V. Georgescu, Helvetica Physica Acta **46**, 635, 1973

[12] L. Antonne, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **16**, 104, 1902

[13] S. Argyros und R. G. Haydon, `arXiv: math.FA/0903.3921v2`

[14] C. Arzelà, Rendiconti delle Sessioni dell' Academia Reale della Scienze dell' Istituto di Bologna 142, 1882 - 1883

[15] C. Arzelà, Memoria dell' Academia della Scienza dell' Istituto di Bologna, Classe delle Scienze Fisice e Matematice **5**, 55, 1895

[16] G. Ascoli, Atti della Reale Academia Nazionale dei Lincei Memoria della Classe delle Scienze Fisice e Matematice Nazionale **18**, 521, 1883 - 1884

[17] R. Baire, Annali di Matematica Pura ed Applicata Ser. IIIa **3**, 1, 1899

[18] S. Banach, Fundamenta Mathematica **3**, 133, 1922

[19] S. Banach, Studia Mathematica **1**, 211, 1929

[20] S. Banach, Studia Mathematica **1**, 223, 1929

[21] S. Banach, *Théorie Des Operations Linéaires*, Chelsea, New York 1988

[22] S. Banach und S. Mazur, Studia Mathematica **4**, 100, 1933

[23] S. Banach und K. Kuratowski, Fundamenta Mathematicae **14**, 127, 1929

[24] S. Banach und H. Steinhaus, Fundamenta Mathematica **9**, 50, 1927

[25] T. Banakh und A. Plichko, Revista de la Real Academica de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas **100**, 31, 2006

[26] T. Bartoszyński, M. Džamonja, L. Halbeisen, E. Murtinová und A. Plichko, Studia Mathematika **170**, 147, 2005

[27] W. R. Bauer und N. H. Benner, American Mathematical Monthly **78**, 895, 1971

[28] J. L. Bell und F. Jellett, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques. Astronomiques et Physiques **19**, 191, 1971

[29] C. Benitez, Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid **2**, 53, 1989

[30] S. J. Bernau, Pacific Journal of Mathematics **19**, 391, 1966

[31] S. J. Bernau, Journal of The Australian Mathematical Society **8**, 17, 1968

[32] C. Bessaga und A. Pełczyński, Studia Mathematica **17**, 165, 1958

[33] R. H. Bing, Canadian Journal of Mathematics **3**, 175, 1951

[34] G. Birkhoff, Duke Mathematical Journal **1**, 169, 1935

[35] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, Nabu, Charleston 2010

[36] A. Blass, Contemporary Mathematics **31**, 31, 1984

[37] S. Bochner, Fundamenta Mathematicae **20**, 262, 1933

[38] A. Bohm, Physica A **236**, 485, 1966

[39] A. Bohm, *The Rigged Hilbert Space and Quantum Mechanics*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1978

[40] A. Bohm, *Quantum Mechanics: Foundations and Applications*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2001

[41] A. Bohm und M. Gadella, *Dirac Kets, Gamow Vectors and Gel'fand Triplets. The Rigged Hilbert Space Formulation of Quantum Mechanics*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1989

[42] A. Bohm, H. D. Doebner und P. Kielanowski (Hrsg.), *Irreversibility and Causality: Semigroups and Rigged Hilbert Space*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1998

[43] H. Bohnenblust und A. Sobczyk, Bulletin of the American Mathematical Society **44**, 91, 1938

[44] K. Borsuk, Fundamenta Mathematicae **20**, 177, 1933

[45] L. E. J. Brouwer, Mathematische Annalen **71**, 97, 1911

[46] A. M. Bruckner, J. B. Bruckner und B. S. Thomson, *Real Analysis*, Prentice-Hall, London 1997

[47] P. J. Campbell, Historia Mathematica **5**, 77, 1978

[48] S. R. Caradus, *Contributions to the theory of operators with meromorphic resolvents*, Dissertation, University of California, Los Angeles 1965

[49] T. Carleman, Mathematische Zeitschrift **9**, 196, 1921

[50] L. Carleson, Acta Mathematica **116**, 135, 1966

[51] D. P. L. Castrigiano, *Spektraltheorie Linearer Operatoren*, unveröffentlichtes Vorlesungsmanuskript, Technische Universität München, München 2011

[52] A.-L. Cauchy, *Cours d'Analyse.* 1.re *Partie. Analyse Algébrique*, Jacques Gabay, Paris 1821

[53] A. Cayley, Journal für die reine und angewandte Mathematik **32**, 119, 1846

[54] E. Čech, Annals of Mathematics **38**, 823, 1937

[55] W.-S. Cheung, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **26**, 7, 2001

[56] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin 1997

[57] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo 1985

[58] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch und B. Simon, *Schrödinger Operators with Applications to Quantum Mechanics and Global Geometry*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 2008

[59] M. K. Das, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **10**, 57, 1987

[60] M. K. Das, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **13**, 379, 1990

[61] A. M. Davie, Bulletin of the London Mathematical Society **5**, 261, 1973

[62] W. J. Davis, D. W. Dean und I. Singer, Israel Journal of Mathematics **6**, 303, 1968

[63] M. M. Day, Transactions of the American Mathematical Society **62**, 320, 1947

[64] M. M. Day, Proceedings of the American Mathematical Society **13**, 655, 1962

[65] M. M. Day, *Normed linear spaces*, Springer, Berlin 1962

[66] O. Deiser, *Einführung in die Mengenlehre. Die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 2004

[67] R. Denk, *Skript zur Vorlesung Funktionalanalysis*, Unveröffentlichtes Skript (Universität Konstanz), Konstanz 2005

[68] R. Denk, *Skript zur Vorlesung Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Unveröffentlichtes Skript (Universität Konstanz), Konstanz 2012

[69] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer, New York, Berlin,Heidelberg, Tokyo 1983

[70] J. Diestel und J. J. Uhl, *Vector Measures*, American Mathematical Society, Providence 1977

[71] P. G. L. Dirichlet, Journal für reine und angewandte Mathematik **4**, 157, 1829

[72] F. R. Drake, *Set Theory: An Introduction to Large Cardinals*, Elsevier, New York 1974

[73] Y. Duan und B.-L. Lin, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae **48**, 239, 2007

[74] N. Dunford, Bulletin of the American Mathematical Society **49**, 637, 1943

[75] N. Dunford, Transactions of the American Mathematical Society **54**, 185, 1943

[76] N. Dunford, Pacific Journal of Mathematics **2**, 559, 1952

[77] N. Dunford, Bulletin of the American Mathematical Society **64**, 217, 1958

[78] N. Dunford und J. T. Schwartz, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, Hoboken 2009

[79] N. Dunford und J. T. Schwartz, *Linear Operators. Part II: Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space*, Wiley, Hoboken 2009

[80] N. Dunford und J. T. Schwartz, *Linear Operators. Part III: Spectral Operators*, Wiley, Hoboken 2009

[81] A. Dvoretzky, Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces, Hebrew University Jerusalem, 123, 1961

[82] A. Dvoretzky, Proceedings of the Colloquium on Convexity, university of Copenhagen, 61, 1966

[83] A. Dvoretzky und C. A. Rogers, Proceedings of the National Academy of Sciences USA **36**, 192, 1950

[84] E. G. Effros, Israel Journal of Mathematics **9**, 430, 1971

[85] E. G. Effros, Illinois Journal of Mathematics **18**, 48, 1974

[86] S. J. L. van Eijndhoven und J. de Graaf, *Trajectory Spaces, Generalized Functions and Unbounded Operators*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1985

[87] S. J. L. van Eijndhoven und J. De Graaf, *A Mathematical Introduction to Diracs's Formalism*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo 1986

[88] H. Elton Lacey, American Mathematical Monthly **80**, 298, 1973

[89] H. Elton Lacey, Pacific Journal of Mathematics **47**, 139, 1973

[90] P. Enflo, Acta Mathematica **130**, 309, 1973

[91] V. Enß, Communications in Mathematical Physics **61**, 285, 1978

[92] C. P. Enz und J. Mehra (Hrsg.), *Physical Reality and Mathematical Description*, Reidel, Dordrecht 1974

[93] P. Erdös und A. Hajnal, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae **13**, 223, 1962

[94] P. Erdös und A. Tarski, Annals of Mathematics **44**, 315, 1943

[95] N. Euler und W.-H. Steeb, *Continuous Symmetries, Lie Algebras and Differential Equations*, B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich 1992

[96] J. W. Evans und R. A. Tapia, American Mathematical Monthly **77**, 385, 1970

[97] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, J. Pelant und V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg 2001

[98] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos und V. Zizler, *Banach Space Theory. The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London 2011

[99] P. Fatou, Acta Mathematica **30**, 335, 1906

[100] G. Fichtenholz und L. V. Kantorowitsch, Studia Mathematica **5**, 69, 1934

[101] E. Fischer, Comptes Rendus de l'Académie des sciences (Paris) **144**, 1022, 1907

[102] R. Fortet, Comptes Rendus de l'Académie des sciences (Paris) **210**, 497, 1940

[103] R. Fortet, Bulletin de la Société Mathématique de France **69**, 23, 1941

[104] J.-B.-J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Firmin Didot, Paris 1822

[105] M. Fréchet, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **22**, 1, 1906

[106] M. Fréchet, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences (Paris) **144**, 1414, 1907

[107] G. Fubini, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Roma **16**, 608, 1907

[108] I. M. Gelfand, Matematicheskii Sbornik **9**, 3, 1941

[109] F. Gieres, Reports on Progress in Physics **63**, 1893, 2000

[110] I. C. Gohberg und M. G. Krein, *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space*, American Mathematical Society, Providence 1969

[111] J. A. Goldstein, Acta Applicandae Mathematicae **4**, 93, 1985

[112] Y. Gordon, Israel Journal of Mathematics **50**, 265, 1985

[113] Y. Gordon, Annals of Probability **16**, 180, 1988

[114] W. T. Gowers und B. Maurey, Journal of the American Mathematical Society **6**, 851, 1993

[115] W. T. Gowers und B. Maurey, Mathematische Annalen **307**, 543, 1997

[116] J. P. Gram, Journal für die reine und angewandte Mathematik **94**, 41, 1883

[117] D. Grau, *Übungsaufgaben zur Quantentheorie. Quantentheoretische Grundlagen* Hanser, München, Wien 1988

[118] G. Grawert,*Quantenmechanik in Anwendungen und Übungen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main 1972

[119] G. Grawert, *Quantenmechanik*, Aula, Wiesbaden 1985

[120] W. Greiner und B. Müller, *Theoretische Physik, Band 5: Quantenmechanik II: Symmetrien*, Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main 1985

[121] S. Großmann, *Funktionalanalysis im Hinblick auf Anwendungen in der Physik*, Aula, Wiesbaden 1988

[122] A. Grothendieck, Canadian Journal of Mathematics **5**, 129, 1953

[123] A. Grothendieck, Canadian Journal of Mathematics **7**, 552, 1955

[124] A. Grothendieck, Bulletin de la Société Mathématique de France **84**, 319, 1956

[125] B. Grünbaum, Pacific Journal of Mathematics **10**, 193, 1960

[126] A. Haar, Mathematische Annalen **69**, 331, 1910

[127] A. Haar, Mathematische Annalen **71**, 38, 1911

[128] K. Hada, K. Hashimoto und S. Oharu, Tokyo Journal of Mathematics **2**, 71, 1979

[129] J. Hadamard, Comptes Rendus **136**, 351, 1903

[130] H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen I*, Springer, Berlin 1921

[131] H. Hahn, Monatshefte für Mathematik und Physik **32**, 3, 1922

[132] H. Hahn, Journal für reine und angewandte Mathematik **157**, 214, 1927

[133] P. Hajek, V. M. Santalucia, J. Vanderwerff und V. Zizler, *Biorthogonal Systems in Banach Spaces*, Springer, New York 2010

[134] L. Halbeisen und N. Hungerbühler, Eath-West Journal of Mathematics **2**, 153, 2000

[135] P. R. Halmos, *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity*, Chelsea, New York 1957

[136] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg 1974

[137] J. D. Halpern und A. Lévy, in [339], 83

[138] G. Hamel, Mathematische Annalen **60**, 459, 1905

[139] G. H. Hardy, J. E. Littlewood und G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge 1988

[140] F. Hausdorff, Studia Mathematica **6**, 18, 1936

[141] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Chelsea, New York 1978

[142] J. Heine, *Topologie und Funktionalanalysis. Grundlagen der Abstrakten Analysis mit Anwendungen*, Oldenbourg, München 2002

[143] E. Hellinger, *Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlich vielen Veränderlichen*, Dissertation, Universität Göttingen, Göttingen 1907

[144] E. Hellinger und O. Toeplitz, Mathematische Annalen **69**, 289, 1910

[145] E. Helly, Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse **121**, 265, 1912

[146] E. Helly, Monatshefte für Mathematik und Physik **31**, 60, 1921

[147] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*, Teubner, Stuttgart 1983

[148] H. Heuser, *Funktionalanalysis. Theorie und Anwendung*, Teubner, Stuttgart 1986

[149] H. Heuser, Internationale Mathematische Nachrichten **183**, 1, 2001

[150] D. Hilbert, Nachrichten von der Gesellschaft für Wissenschaften zu Göttingen, 49, 1904

[151] D. Hilbert, Nachrichten von der Gesellschaft für Wissenschaften zu Göttingen, 213, 1904

[152] D. Hilbert, Nachrichten von der Gesellschaft für Wissenschaften zu Göttingen, 307, 1905

[153] D. Hilbert, Nachrichten von der Gesellschaft für Wissenschaften zu Göttingen, 157, 1906

[154] D. Hilbert, Nachrichten von der Gesellschaft für Wissenschaften zu Göttingen, 439, 1906

[155] D. Hilbert, Nachrichten von der Gesellschaft für Wissenschaften zu Göttingen, 355, 1910

[156] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen*, Teubner, Leipzig 1912

[157] T. H. Hildebrandt, Transaction of the American Mathematical Society **36**, 868, 1934

[158] T. H. Hildebrandt, Bulletin of the American Mathematical Society **46**, 959, 1940

[159] E. Hille, *Functional Analysis and Semigroups*, American Mathematical Society, New York 1948

[160] A. M. Hinz und G. Stolz, Mathematische Annalen **294**, 195, 1992

[161] P. D. Hislop und I. M. Sigal, *Introduction to Spectral Theory. With Applications to Schrödinger Operators*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg 1996

[162] O. Hölder, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen. Aus dem Jahre 1889. **Nro. 1** - **21**, 38, 1889

[163] D. Hoffmann und F. W. Schäfke, *Integrale*, B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim 1992

[164] M. Holz, K. Steffens und E. Weitz, *Introduction to Cardinal Arithmetic*, Birkhäuser, Basel, Boston, New York 2009

[165] R. A. Hunt, in [1], 235

[166] V. I. Istrăţescu, *Inner Product Structures. Theory and Applications*, Reidel, Dordrecht 1987

[167] N. Jacobson, *Structure of Rings*, American Mathematical Society, Providence 1968

[168] N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra. Vol. 2: Linear Algebra*, Springer, New York, Heidelberg, Berlin

[169] R. C. James, Duke Mathematical Journal **12**, 291, 1945

[170] R. C. James, Bulletin of the American Mathematical Society **53**, 559, 1947

[171] R. C. James, Proceedings of the National Academy of Sciences USA **37**, 174, 1951

[172] K. Jänich, *Topologie*, Springer, Berlin, Heidelberg 1996

[173] L. Jantscher, *Topologie*, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden 1982

[174] J. M. Jauch, *Foundations of Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading 1968

[175] J. L. W. V. Jensen, Acta Mathematica **30**, 175, 1906

[176] G. W. Johnson und L. V. Petersen, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae **18**, 579, 1977

[177] W. B. Johnson, H. P. Rosenthal und M. Zippin, Israel Journal of Mathematics **9**, 488, 1971

[178] W. B. Johnson und J. Lindenstrauss (Hrsg.), *Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Volume 2*, Elsevier, Amsterdam 2003

[179] J. T. Joichi, Proceedings of the American Mathematical Society **17**, 423, 1966

[180] P. Jordan, J. von Neumann und E. Wigner, Annals of Mathematics **35**, 32, 1934

[181] P. Jordan und J. von Neumann, Annals of Mathematics **36**, 719, 1935

[182] M. I. Kadec, Usbeshi Matmematikii Nauk **11**, 185, 1956

[183] V. M. Kadets und M. I. Kadets, *Rearrangements of Series in Banach Spaces*, American Mathematical Society, Providence 1991

[184] V. M. Kadets und M. I. Kadets, *Series in Banach Spaces. Conditional and Unconditional Convergence*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin 1997

[185] J.-P. Kahane, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris) **259**, 2577, 1964

[186] S. Kakutani, Japanese Journal of Mathematics **16**, 93, 1939

[187] S. Kakutani, Annals of Mathematics **42**, 994, 1941

[188] A. Kanamori, *The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 2003

[189] L. W. Kantorowitsch und G. P. Akilow, *Funktionalanalysis in normierten Räumen*, Akademie-Verlag, Berlin 1978

[190] O. P. Kapoor und S. B. Mathur, Bulletin of the Australian Mathematical Society **24**, 239, 1981

[191] O. P. Kapoor und J. Prasad, Bulletin of the Australian Mathematical Society **19**, 403, 1978

[192] S. Karlin, Duke Mathematical Journal **15**, 971, 1948

[193] T. Kato, Transactions of the American Mathematical Society **70**, 195, 1951

[194] T. Kato, Israel Journal of Mathematics **13**, 135, 1973

[195] T. Kato, in [92], 193

[196] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Opoerators*, Springer, Berlin, Heidelberg 1995

[197] J. L. Kelley, Dukes Mathematical Journey **17**, 277, 1950

[198] J. L. Kelley, Fundamenta Mathematica **37**, 75, 1950

[199] J. Ketonen, Fundamenta Mathematicae **81**, 291, 1974

[200] M. A. Khan und M. Majumdar, Journal of Mathematical Analysis and Applications **114**, 569, 1986

[201] A. Khintchine, Mathematische Zeitschrift **18**, 109, 1923

[202] J. Konrady, Communications in Mathematical Physics **22**, 295, 1971

[203] J. Kreulich, Semigroup Forum **49**, 151, 1994

[204] A. H. Kruse, Mathematische Zeitschrift **83**, 314, 1964

[205] G. Kuba, Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg **26**, 117, 2007

[206] G. Kuba, Internationale Mathematische Nachrichten **212**, 11, 2009

[207] C. S. Kubrusly, *Spectral Theory of Operators on Hilbert Spaces*, Birkhäuser, New York, Dordrecht, Heidelber, London 2012

[208] D. S. Kurtz und C. W. Swartz, *Theories of Integration: The Integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and McShane*, World Scientific, Singapore 2004

[209] S. Kwapień, Studia Mathematica **44**, 583, 1972

[210] P. D. Lax, *Functional Analysis*, Wiley-Interscience, New York 2002

[211] P. D. Lax und R. S. Phillips, *Scattering Theory*, Academic Press, New York 1967

[212] D. C. Lay, Mathematische Annalen **184**, 197, 1970

[213] A. J. Lazar, Duke Mathematical Journal **39**, 1, 1972

[214] A. J. Lazar und J. Lindenstrauss, Israel Journal of Mathematics **4**, 205, 1966

[215] A. J. Lazar und J. Lindenstrauss, Acta Mathematica **126**, 165, 1971

[216] M Ledoux und M. Talagrand, *Probability in Banach Spaces. Isoperimetry and Processes*, Springer, Berlin, Heidelberg 2011

[217] B. Levi, Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere Seria II **39**, 775, 1906

[218] P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris 1937

[219] V. B. Lidskii, Doklady Akademii Nauk SSSR **125**, 485, 1959

[220] A. Lima, Israel Journal of Mathematics **24**, 59, 1976

[221] J. Lindenstrauss, The Michigan Mathematical Journal **10**, 241, 1963

[222] J. Lindenstrauss, Memoirs of the American Mathematical Society **48**, 112, 1964

[223] J. Lindenstrauss, Israel Journal of Mathematics **5**, 153, 1967

[224] J. Lindenstrauss und D. E. Wulbert, Journal of Functional Analysis **4**, 332, 1969

[225] J. Lindenstrauss und L. Tzafriri, Israel Journal of Mathematics **9**, 263, 1971

[226] J. Lindenstrauss und L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I and II*, Springer, Berlin, Heidelberg 1996

[227] J. E. Littlewood, The Quaterly Journal of Mathematics (Oxford) **1**, 164, 1930

[228] L. A. Ljusternik und W. I. Sobolew, *Elemente der Funktionalanalysis*, Akademie-Verlag, Berlin 1979

[229] H. Löwig, Studia Mathematica **5**, 18, 1934

[230] H. Löwig, Acta Scientiarum Mathematicarum **7**, 1, 1934-35

[231] E. R. Lorch, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) **7**, 136, 1934

[232] E. R. Lorch, Transactions of the American Mathematical Society **52**, 238, 1942

[233] E. R. Lorch, *Spectral Theory*, Oxford University Press, New York 1962

[234] J. Łoś und C. Ryll-Nardzewski, Studia Mathematica **38**, 233, 1951

[235] W. Lusky, *Zur Struktur von Lindenstrauß-Räumen*, Dissertation, Gesamthochschule Paderborn, Paderborn 1974

[236] W. Lusky, Journal of Functional Analysis **26**, 103, 1977

[237] W. A. J. Luxemburg, Bulletin of the American Mathematical Society **68**, 416, 1962

[238] G. W. Mackey, Proceedings of the National Academy of Sciences USA **29**, 216, 1943

[239] G. W. Mackey, Transactions of the American Mathematical Society **57**, 155, 1945

[240] G. W. Mackey, *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Benjamin, New York 1963

[241] L. Maligranda, Mathematical Inequalities and Applications **1**, 69, 1998

[242] L. Maligranda, Mathematical Inequalities and Applications **4**, 203, 2001

[243] A. I. Markushevich, Doklady Akadamii Nauk **41**, 241, 1943

[244] A. I. Markushevich, Matematicheskii Sbornik **17**, 221, 1945

[245] O. V. Maslyuchenko, V. V. Mykhaylyuk und M. M. Popov, Journal of Functional Analysis **253**, 550, 2007

[246] B. Maurey, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris) **274**, 1825, 1972

[247] B. Maurey, *Théorèmes des factorisation pour les applications linéaires à valeurs des espaces* L^p, Astérisque No. 11, Société Mathématique de France, Paris 1974

[248] B. Maurey, in [178], 1247

[249] B. Maurey, in [178], 1299

[250] B. Maurey und H. Rosenthal, Studia Mathematica **61**, 77, 1977

[251] S. Mazur, Studia Mathematica **2**, 7, 1930

[252] S. Mazur, Studia Mathematica **4**, 70, 1933

[253] E. J. McShane, Proceedings of the American Mathematical Society **1**, 401, 1950

[254] R. Meise und D. Vogt, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden 1992

[255] V. D. Milman, Funkcional Analysis i Prilozhen **5**, 28, 1971

[256] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Teubner, Leipzig 1886

[257] J. Mok, Bulletin of the Korean Mathematical Society **33**, 35, 1996

[258] J. Mok, Journal of Applied Mathematics & Computing **16**, 533, 2004

[259] J. Mok, Journal of Applied Mathematics & Computing **17**, 567, 2005

[260] V. Moretti, *Spectral Theory and Quantum Mechanics. With an Introduction to the Algebraic Formulation*, Springer, Milan, Heidelberg, New York, Dordrecht, London 2013

[261] T. J. Morrison, *Functional Analysis. An Introduction to Banach Space Theory*, Wiley-Interscience, New York 2001

[262] V. F. Müller, *Quantenmechanik*, Oldenbourg, München 2000

[263] F. J. Murray, Transactions of the American Mathematical Society **41**, 138, 1937

[264] L. Nachbin, Transactions of the American Mathematical Society **68**, 28, 1950

[265] N. Nakamura und S. Kakutani, Proceedings of the Imperial Academy of Japan **19**, 224, 1943

[266] C. Neumann, *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential*, Teubner, Leipzig 1877

[267] J. von Neumann, Nachrichten von der Gesellschaft für Wissenschaften zu Göttingen, 1, 1927

[268] J. von Neumann, Mathematische Annalen **102**, 49, 1929

[269] J. von Neumann, Mathematische Annalen **102**, 370, 1930

[270] J. von Neumann, Annals of Mathematics **33**, 294, 1932

[271] J. von Neumann, Annals of Mathematics **33**, 567, 1932

[272] J. von Neumann, Transactions of the American Mathematical Society **37**, 1, 1935

[273] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin, Heidelberg, New York 1996

[274] O. Nikodým, Fundamenta Mathematicae **15**, 131, 1930

[275] O. M. Nikodým, Mathematica (Cluj) **5**, 130, 1931

[276] O. M. Nikodým, *The Mathematical Apparatus for Quantum-Theories. Based on the Theory of Boolean Lattices*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1966

[277] G. Nordlander, Arkiv for Matematik **4**, 287, 1962

[278] G. H. Olsen, Mathematica Scandinavica **35**, 237, 1974

[279] W. Orlicz, Studia Mathematica **4**, 33, 1933

[280] W. Orlicz, Studia Mathematica **4**, 41, 1933

[281] M.-A. Parseval des Chênes, Memoires presentés à l'Institute des Sciences, Lettres d'Arts, par divers savans, et lus dans ses assemblées. Sciences, mathématiques et physiques. (Savans étrangers), **1**, 638, 1806

[282] G. Peano, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operationi della logica deduttiva*, Bocca, Torino 1888

[283] A. Pełczyński, Bulletin of the Polish Academy of Sciences **VI**, 695, 1958

[284] A. Pełczyński, Studia Mathematica **19**, 209, 1960

[285] A. Pełczyński und V. N. Sudakov, Colloquium Mathematicum **9**, 85, 1962

[286] R. S. Phillips, Bulletin of the American Mathematical Society **46**, 930, 1940

[287] R. S. Phillips, Transactions of the American Mathematical Society **48**, 516, 1940

[288] D. Pincus, Bulletin of the American Mathematical Society **78**, 766, 1972

[289] C. Piron, *Foundations of Quantum Physics*, W. A. Benjamin, Reading 1976

[290] H. R. Pitt, Journal of the London Mathematical Society **11**, 174, 1936

[291] E. Prugovečki, *Quantum Mechanics in Hilbert Space*, Academic Press, New York, London, Toronto, Sydney, San Francisco 1981

[292] C. R. Putnam, *Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1967

[293] H. Rademacher, Mathematische Annalen **87**, 112, 1922

[294] H. Radjavi und P. Rosenthal, *Invariant Subspaces*, Dover, Mineola 2003

[295] J. Radon, Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlicen Klasse der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien Abt. IIa/2, 112, 1913

[296] M. Reed und B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. I Functional Analysis*, Academic Press, New York 1980

[297] M. Reed und B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. II Fourier Analysis, Self Adjointness*, Academic Press, New York 1975

[298] M. Reed und B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. III Scattering Theory*, Academic Press, New York 1970

[299] M. Reed und B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. IV Analysis of Operators*, Academic Press, New York 1978

[300] F. Reinhardt und H. Soeder, *dtv-Atlas zur Mathematik. Band 1: Grundlagen, Algebra und Geometrie*, Deutscher Taschenbuch-Verlag, München 1982

[301] F. Reinhardt und H. Soeder, *dtv-Atlas zur Mathematik. Band 2: Analysis und angewandte Mathematik*, Deutscher Taschenbuch-Verlag, München 1982

[302] F. Rellich, Mathematische Annalen **110**, 342, 1935

[303] F. Rellich, Mathematische Annalen **116**, 555, 1937

[304] F. Riesz, Comptes Rendues de l'Académie des sciences (Paris) **144**, 615, 1907

[305] F. Riesz, Comptes Rendues de l'Académie des sciences (Paris) **144**, 1409, 1907

[306] F. Riesz, Comptes Rendues de l'Académie des sciences (Paris) **149**, 974, 1909

[307] F. Riesz, Comptes Rendues de l'Académie des sciences (Paris) **149**, 1303, 1909

[308] F. Riesz, Mathematische Annalen **69**, 449, 1910

[309] F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infintes d'inconnues*, Gaultier-Villars, Paris 1913

[310] F. Riesz, Acta Mathematica **41**, 71, 1918

[311] F. Riesz, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) **5**, 23, 1930

[312] F. Riesz, Acta Scientiarum Mathematicarum **7**, 34, 1934-35

[313] F. Riesz und E. R. Lorch, Transactions of the American Mathematical Society **39**, 331, 1936

[314] F. Riesz und B. Sz.-Nagy, *Vorlesungen über Funktionalanalysis*, Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main 1982

[315] J. E. Roberts, Journal of Mathematical Physics **7**, 1097, 1966

[316] J. E. Roberts, Communications in Mathematical Physics **3**, 98, 1966

[317] L. J. Rogers, Messenger of Mathematics **17**, 145, 1888

[318] H. P. Rosenthal, Studia Mathematica **37**, 13, 1970

[319] F. Rowbottom, Annals of Mathematical Logic **3**, 1, 1971

[320] H. L. Royden, *Real Analysis*, Macmillan, New York 1965

[321] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Tata McGraw-Hill, New Dehli 1983

[322] D. Ruelle, Il Nuovo Cimento **61A**, 655, 1969

[323] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg 1999

[324] R. Schatten, *Norm Ideals of Completely Continuous Operators*, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1960

[325] R. Schatten und J. von Neumann, Annals of Mathematics **49**, 557, 1948

[326] J. Schauder, Mathematische Zwitschrift **26**, 47, 1927

[327] J. Schauder, Studia Mathematica **2**, 1, 1930

[328] J. Schauder, Studia Mathematica **2**, 171, 1930

[329] J. Schauder, Studia Mathematica **2**, 185, 1930

[330] E. Schmidt, Mathematische Annalen **63**, 433, 1907

[331] E. Schmidt, Mathematische Annalen **64**, 161, 1907

[332] E. Schmidt, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **25**, 53, 1908

[333] E. Schmidt, Mathematische Annalen **65**, 370, 1908

[334] U.-W. Schmincke, Mathematische Zeitschrift **124**, 47, 1972

[335] I. Schur, Mathematische Annalen **66**, 488, 1909

[336] I. Schur, Journal für die reine und angewandte Mathematik **151**, 79, 1920

[337] Š. Schwabik und Y. Guoju, *Topics in Banach Space Integration*, World Scientific, Singapore 2005

[338] L. Schwartz, *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures*, Oxford University Press, London, New York 1973

[339] D. Scott (Hrsg.), *Axiomatic Set Theory. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Vol. XIII*, American Mathematical Society, Providence 1971

[340] E. Seiler und B. Simon, Journal of Mathematical Physics **16**, 2289, 1975

[341] Z. Semadeni, *Schauder Bases in Banach Spaces of Continuous Functions*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1982

[342] S. Shelah, *Cardinal Arithmetic*, Oxford University Press, Oxford 1994

[343] W. Sierpiński, *Cardinal and ordinal numbers*, PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa 1965

[344] B. Simon, Advances in Mathematics **24**, 244, 1977

[345] B. Simon, *Trace Ideals and their Applications*, American Mathematical Society, Providence 2005

[346] I. Singer, Israel Journal of Mathematics **2**, 249, 1964

[347] A. Sobczyk, Bulletin of the American Mathematical Society **47**, 938, 1941

[348] A. D. Sokal, American Mathematical Monthly **118**, 450, 2011

[349] R. M. Solovay, Annals of Mathematics **92**, 1, 1970

[350] R. M. Solovay, in [339], 397

[351] G. A. Soukhomlinov, Matematicheskii Sbornik **3**, 353, 1938

[352] H. Steinhaus, Mathematische Zeitschrift **5**, 186, 1919

[353] W. J. Stiles, Transactions of the American Mathematical Society **149**, 405, 1970

[354] W. J. Stiles, Studia Mathematica **42**, 109, 1972

[355] D. T. Stoeva, Annual of the University of Sofia, Faculty of Mathematics and Informatics **96**, 155, 2004

[356] M. H. Stone, Proceedings of the National Academy of Sciences USA **16**, 172, 1930

[357] M. H. Stone, Annals of Mathematics **33**, 643, 1932

[358] M. H. Stone, Transactions of the American Mathematical Society **41**, 375, 1937

[359] M. H. Stone, Mathematics Magazine **21**, 167, 1948

[360] M. H. Stone, Mathematics Magazine **21**, 237, 1948

[361] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, American Mathematical Society, Providence 1979

[362] C. Swartz, Bulletin of the Belgian Mathematical Society **4**, 589, 1997

[363] A. Szankowski, Acta Mathematica **147**, 89, 1981

[364] A. E. Taylor, Bulletin of the American Mathematical Society **49**, 652, 1943

[365] A. E. Taylor, Mathematische Annalen **183**, 18, 1966

[366] A. E. Taylor und D. C. Lay, *Introduction to Functional Analysis*, Wiley, New York, Chichester, Brisbane, Toronto 1980

[367] P. Terenzi, Studia Mathematica **111**, 207, 1994

[368] W. Thirring, *Lehrbuch der Mathematischen Physik. Band 3: Quantenmechanik von Atomen und Molekülen*, Springer, Wien, New York 1994

[369] W. Thirring, *Lehrbuch der Mathematischen Physik. Band 4: Quantenmechanik großer Systeme*, Springer, Wien, New York 1980

[370] H. Tietze, Journal für Reine und Angewandte Mathematik **145**, 9, 1915

[371] O. Toeplitz, Mathematische Zeitschrift **2**, 187, 1918

[372] E. V. Tokarev, Ukrainian Mathematical Journal **37**, 180, 1987

[373] E. Tokarev, `arXiv: math/0206106v1`

[374] H. Triebel, *Höhere Analysis*, Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main 1980

[375] P. L. Tschebyscheff, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **2**, 177, 1867

[376] N. K. Tsing, American Mathematical Monthly **91**, 505, 1984

[377] A. Tychonoff, Mathematische Annnalen **102**, 544, 1930

[378] A. Tychonoff, Mathematische Annalen **111**, 767, 1935

[379] S. Ulam, Fundamenta Mathematicae **16**, 140, 1930

[380] P. S. Urysohn, Mathematische Annalen **94**, 262, 1925

[381] J. P. Vigier, *Etude sur les suites infinies d'opérateurs hermitiens*, Dissertation, Université de Genève, Genève 1946

[382] G. Vitali, *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Gamberini e Parmeggiani, Bologna 1905

[383] J. Weidmann, *Streutheorie*, unveröffentlichtes Vorlesungsmanuskript, Universität Frankfurt am Main, Frankfurt am Main 1995

[384] J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil 1: Grundlagen*, Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden 2000

[385] K. Weierstraß, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 633, 1885

[386] K. Weierstraß, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 789, 1885

[387] H. Weyl, Proceedings of the National Academy of Sciences USA **35**, 408, 1949

[388] R. J. Whitley, American Mathematical Monthly **73**, 285, 1966

[389] N. Wiener, *The Fourier Integral and Certain of its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge 2009

[390] M. A. Woodbury, Bulletin of the American Mathematical Society **56**, 172, 1950

[391] R. Wüst, Mathematische Zeitschrift **119**, 276, 1971

[392] R. Wüst, Mathematische Zeitschrift **125**, 349, 1972

[393] Y. Yamasaki, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, **20**, 1247, 1984

[394] N. C. Yannelis, Proceedings of the American Mathematical Society **102**, 303, 1988

[395] K. Yosida, Journal of the Mathematical Society of Japan **1**, 15, 1948

[396] W. H. Young, Proceedings of the Royal Society London, Series A **87**, 225, 1912

[397] W. H. Young, Proceedings of the Royal Society London, Series A **87**, 331, 1912

[398] E, Zermelo, Mathematische Annalen **59**, 514, 1904

[399] M. Zippin, in [178], 1703

[400] M. Zorn, Bulletin of the American Mathematical Society **41**, 667, 1935