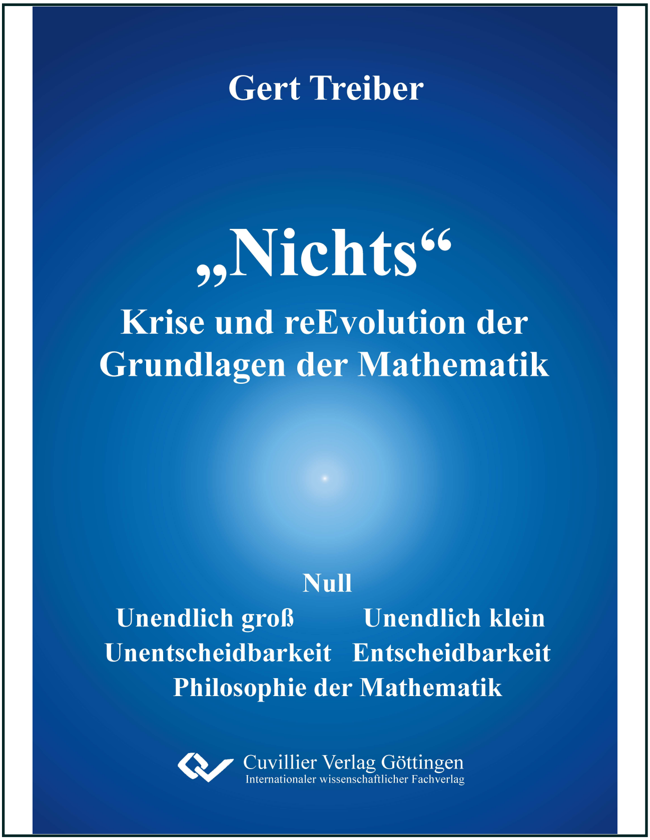
Gert Treiber (Autor)

"Nichts"

Krise und reEvolution der Grundlagen der Mathematik



https://cuvillier.de/de/shop/publications/8290

Kurzfassung

Die Null

Die Null gilt heute unbestritten als Zahl. Aber drei Jahrtausende lang, von den Babyloniern über die Inder und zunächst auch bei den Europäern, bedeutete sie „nichts“ im Sinn von „keine Zahl“. Dieses „nichts“ wurde im Mittelalter mit dem gefürchteten metaphysischen Nichts gleichgesetzt und abgewiesen. Die Griechen hatten seine Existenz bestritten, der Kirchenvater Augustinus brachte es mit dem Bösen, ja sogar dem Teufel, in Verbindung. Das Dezimalsystem, das im Gegensatz zu den römischen Zahlen die 0 beinhaltet, wurde deshalb in Europa Jahrhunderte lang abgelehnt. In der Renaissance löste man dann die Vorbehalte dadurch auf, daß die wahre 0, „keine Zahl“, „nichts“, in ihr falsches Gegenteil, „Zahl“ und „etwas“, verkehrt wurde. Diese inkonsistente Definition ist heute axiomatisch festgelegt. Dadurch wird ein fundamentales Prinzip, „entweder ist eine Aussage wahr oder ihr Gegenteil, ein Drittes gibt es nicht“, verletzt. Dies sind keine Aussagen einer evt. widerlegbaren Theorie, sondern nachweisbare Tatsachen. Die Bedeutung „nichts“ der 0 muß beibehalten werden.
Der Widerspruch wirkte sich lange nicht aus, da der „Zahl 0“ kein Wert zugeschrieben wird. Die Mathematik konnte und kann phänomenale Erfolge feiern. Erst bei der axiomatischen Begründung der Mengenlehre zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurde die Inkonsistenz virulent.

Unendlich groß

Georg Cantor, erklärter Platonist, entwickelte die Mengenlehre Ende des 19. Jahrhunderts mit dem Schwerpunkt einer Mathematik des aktual Unendlichen, das er auch transfinit nennt. Er setzte sich damit in Gegensatz zu Aristoteles' „ein begrenztes Unendliches gibt es nicht“, indem er Grenzen, ja sogar Stufen im Unendlichen fordert. Die transfinite Menge der natürlichen Zahlen wird postuliert, die die unendliche Folge zusammenfasst und begrenzt.
Cantors Mengenlehre ist durch Paradoxien und Antinomien gekennzeichnet, sie lösten die sog. „Grundlagenkrise der Mathematik“ aus. Sie gilt seit ihrer Gründung auf das Axiomensystem von Zermelo und Fraenkel, ZFC, als bewältigt.
ZFC setzt die „Zahl 0“ als notwendige Bedingung des Transfiniten voraus. Cantors Begründung des aktual Unendlichen, die ohne die 0 erfolgte, wird dadurch widerlegt. Der Autor weist weitere Fehler nach.
Aber auch das ZFC-Axiom ist falsch, die „Zahl 0“ existiert nicht. Die Grundlagenkrise wurde sogar noch weiter verschärft. Die leere Menge und die transfiniten Größen, die physisch nicht existieren, wurden metaphysisch postuliert.
Der Nachweis, daß die 0 keine Zahl sondern „nichts“ repräsentiert, widerlegt diese Axiome.

Unendlich klein

Die Erfindung der irrationalen Größen, die sich nicht als Verhältnis ganzer Zahlen darstellen lassen, löste die erste Grundlagenkrise der Mathematik im 5. Jahrhundert v. Chr. aus. Damit ist die Frage verbunden, ob unendliche Unterteilung möglich ist. Sie wurde durch Euklid mit der metaphysischen Voraussetzung stetiger Teilung bejaht und in der Mathematik bis heute nicht in Frage gestellt. Isaac Newton ging bei der Begründung der Analysis von immer kleiner werdenden Infinitesimalen aus, Augustin-Louis Cauchy entwickelte den Grenzwert unter der Voraussetzung unendlicher Unterteilung, Cantor und David Hilbert gründen die reellen Zahlen auf diese Basis.
Diese Entscheidung erweist sich auf der Grundlage der heutigen Physik mit einer Begrenzung durch Planck-Einheiten als falsch. Irrationale Größen existieren nicht mehr als Limes unendlicher Reihen, sondern weichen dem Limit endlicher Reihen, die mit einer Planck-Einheit bzw. kleinsten reellen Zahl enden. Die kleiner werdenden Glieder der Reihe werden durch „nichts“ begrenzt. Alle reellen Zahlen sind rational. Auch der Grenzwert der Analysis muß dieser neuen Erkenntnis angepasst werden.

.

Unentscheidbarkeit und Entscheidbarkeit

Aus ZFC lassen sich nicht alle Sätze der Mathematik entscheiden, d.h. beweisen oder widerlegen. Auch die Widerspruchsfreiheit ist nicht beweisbar. „Hilberts Programm“ wurde in der Absicht initiiert, diese Mängel zu beheben.
Aber Kurt Gödel konstruierte einen Satz der Theorie der natürlichen Zahlen, der über sich selbst aussagt, daß alle axiomatisch gegründeten Satzfolgen ihn nicht beweisen können. Für diesen Satz wiederum existiert weder ein Beweis noch eine Widerlegung, er ist durch eine Satzfolge unentscheidbar. Auch die Widerspruchsfreiheit der Theorie ist nicht beweisbar. Das sind die Aussagen von Gödels „Unvollständigkeitssätzen“.
Alan Turing hatte zudem ein abstraktes Modell eines Computers entwickelt. Er zeigte durch das „Halteproblem“, daß nicht generell entschieden werden kann, ob seine Maschine nach Eingabe der Daten anhält oder nicht. Auch maschinell ist der Entscheidungsprozeß also unvollständig.
Hilberts Programm schien deshalb nicht realisierbar.
Aber das „nichts“ eröffnet neue Möglichkeiten der Beweisführung. Wahre Sätze über „Nicht-Existenz“ lassen sich durch äquivalente Sätze über „nichts“ beweisen. Durch „nichts“ lassen sich deshalb entsprechende Entscheidungsprobleme lösen, auch Gödels Satz wird entschieden.
Die bisher geforderte Unentscheidbarkeit spiegelt sich auch in der Erkenntnistheorie wider, ihre Auflösung durch „nichts“ hat demgemäß entscheidende Bedeutung für die Wissenschaftstheorie.

Falsche metaphysische Voraussetzungen dominieren entscheidende Teile der gegenwärtigen Grundlagen der Mathematik. Sie reichen in den Urgrund der verschiedenen Vorstellungen der Schöpfung. Die Bibel geht von der „creatio ex nihilo“ aus. Die Griechen der Antike lehnten dagegen das Nichts ab, der Demiurg ordnet das Chaos der präexistenten Materie. Das „nichts“ der Mathematik, die Null, wurde durch die Griechen mit dem metaphysischen Nichts, der Leere, gleichgesetzt und deshalb abgelehnt.

Die Konsequenzen des Nichts sind aber noch fundamentaler. Platon verneinte zwar dessen Sein, akzeptierte aber die Existenz des Begriffes „Nichts“ bzw. „Nichtseiendes“. Jeder Begriff muß bei ihm aber ein Urbild in der Ideenwelt haben, der Begriff „Nichtseiend“ besitzt es nicht, er ist reine Vorstellung des Menschen. Das „Nichtseiende“ widerlegt Platons Lehre des Seins. Auch der mathematische Platonismus ist durch die Existenz des „nichts" widerlegt.

Die Inder entwickelten das Dezimalsystem mit der 0, die sie als sunya, leer, bezeichneten. Sie war keine Zahl, sondern „nichts“. Im Gegensatz zu den Griechen war bei den Indern die Leere metaphysisch positiv besetzt. In Europa traf das Gegenteil zu. Das „nichts“ der 0, „keine Zahl“, wurde abgelehnt und im 16. Jahrhundert widersprüchlich zur „Zahl 0“, „etwas“, umgedeutet. Diese Inkonsistenz besteht auch heute noch.

Die Axiome der mathematischen Logik und der Mengenlehre bilden die Grundlagen der Mathematik. Die rationalistischen Postulate der Mengenlehre, wie das Transfinite und die unendliche Unterteilung der Strecke, sind „Ideen, die durch unsere Beobachtungen der Natur widerlegt sind“, stellt Hilbert fest. Indem er sie trotzdem als mathematisch grundlegend voraussetzt, werden die Grundlagen als widersprüchliche Fiktionen entwertet. Der Autor legt weitere Argumente vor, die die gegenwärtige Theorie widerlegen. Rationalistische Ideen, die im Widerspruch zur Empirie stehen, sind falsch.

Immanuel Kant löst die Gegensätze von Rationalismus und Empirismus durch seine Transzendentalphilosophie, auf die er auch die Mathematik gründet, auf. Er ist einer der bedeutendsten, wenn nicht der größte Philosoph der Neuzeit. Trotzdem ist Kant keineswegs unumstritten, auch widerspricht seine Vorstellung von Raum und Zeit der heutigen Physik. Aber seine Voraussetzung synthetisch apriorischer Sätze auf der Grundlage angeborener Kategorien des Verstandes ermöglicht ein revidiertes Axiomensystem der Mengenlehre.

Die reine Mathematik hat sich allerdings über angeborene Kategorien hinaus entwickelt, die Relativitäts - und der Quantentheorie sind Beispiele dafür. Aber die auf Kants Transzendentalphilosophie beruhenden Grundlagen ersetzen den nicht tragfähigen metaphysischen Unterbau der gegenwärtigen Mathematik. Die reEvolution der Grundlagen der Mathematik ist philosophisch fundiert.

Überblick

Die Kritik der Vernunft führt also zuletzt notwendig zur Wissenschaft; der dogmatische Gebrauch derselben ohne Kritik dagegen auf grundlose Behauptungen.

Immanuel Kant (1724 - 1804)

A Die Grundlagenkrise

Die Null ….... war eine eigenständige Zahl geworden. ….... Die Null war endlich am Ziel.
Charles Seife (*1972)

Zukünftige Generationen werden die Mengenlehre [des aktual Unendlichen] als eine Krankheit betrachten, von der man sich erholt hat.
Henri Poincaré (1864 – 1912)

Wenn der Wert einer Variablen permanent abnimmt .... wird sie unendlich klein.
Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857)

Russells Befremden über Gödels Resultat war so groß, daß er „froh [war], nicht länger auf dem Gebiet der mathematischen Logik zu arbeiten."
Bertrand Russell (1872 - 1970)

Gliederung A

I Null und „nichts“

I.I Einleitung

> *„Die 0 ist keine Zahl, sondern das Zeichen dafür, daß an ihrer Stelle keine Zahl existiert.“ Daß diese Aussage, die der allgemein akzeptierten Auffassung widerspricht, Zweifel auslöst, ist verständlich.*

Die Mathematik gilt in den Augen der Öffentlichkeit und auch aus Sicht der Wissenschaftler als die Disziplin, die mit der größten Akribie die Gültigkeit ihrer Sätze begründet. Ihre überwältigenden Erfolge, auch und gerade in den Naturwissenschaften, bestätigen diese Auffassung in anscheinend unwiderlegbarer Form. Die umwälzende Beschreibung des Kleinsten und des Größten durch Quantenmechanik und Relativitätstheorie wären ohne die bahnbrechenden Vorarbeiten der Mathematiker gar nicht möglich gewesen.
„Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften und die Arithmetik ist die Königin der Mathematik“, stellte einer der berühmtesten Mathematiker, Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), fest. Die phänomenale Erfolgsgeschichte dieser Wissenschaft scheint es auszuschließen, daß bereits im Rechnen mit Zahlen, der Arithmetik im engeren Sinn, ein Widerspruch verborgen ist, der auf die metaphysische Fehlinterpretation der 0 zurückgeht.

> *Außerhalb der Mengenlehre existieren tatsächlich keine Probleme aufgrund der falschen Definition der 0.*

Der Grund dafür ist, daß „keine Zahl“, die richtige 0, keinen Wert besitzt und diese Eigenschaft auch der falschen „Zahl 0“ zugeschrieben wird.

> *Der überwiegende Teil der Mathematik, vor allem die der Naturwissenschaften, wird deshalb durch die widersprüchliche Festlegung der 0 nicht beeinflußt.*
>
> *Nur die Grundlagen sind davon betroffen, die Mengenlehre, vor allem die Mathematik des Transfiniten von Georg Cantor (1854 - 1918) bzw. ihre axiomatische Grundlegung.*

Fundamente müssen tragfähig sein. Die Belastbarkeit der Grundlegung wurde ursprünglich sehr kritisch gesehen, daß sie auch heute noch massiv in Zweifel gezogen wird, zeigt sich im „Schlaglicht der Kommentare“.
Die kontroversen Wertungen des Transfiniten zwischen „paradiesischer Schöp-

fung“ und „höllischer Narretei“ entsprechen absolut nicht den Erwartungen, die man an die Solidität wissenschaftlicher Theorien richtet. Die Mathematik des Transfiniten hat sich letztlich aber doch durchgesetzt, nur eine verschwindende Minderheit von Mathematikern und Logikern lehnt sie heute noch ab.

> *Die Entwicklungsgeschichte der Null birgt die entscheidenden Tatsachen, die eine revidierte Mengenlehre, vor allem bei der Mathematik des Unendlichen, notwendig macht.*

I.II Null und „nichts“

Die Null der Inder
Die Null in Europa

Jahrtausende lang wurde ohne die Null gezählt, sie ist dafür nicht notwendig. Bereits diese Tatsache legt es nahe, daß die Null keine Zahl sein kann. Erst als ein Stellenwertsystem der Zahlen eingeführt wurde, erwies sich die Null als hilfreich. Das erste dieser Systeme, nicht mit der Basis 10, sondern der Basis 60, wurde bereits 1800 v. Chr. in Babylonien erfunden [1 Men].

Die 0 der Inder

> *Das Dezimalsystem wurde von den Indern im 5. Jahrhundert n. Chr. entwickelt. Die 0 wurde zur Kennzeichnung einer leeren Stelle in der Folge von Ziffern (auch Zahlzeichen genannt), einer Zahl eingeführt.*

Eine Dezimalzahl, die eine 0 enthält, z.B. 101, wurde ursprünglich durch 1   1 dargestellt. Die zweite Stelle war leer, dort existierte nichts. An dieser Position mußte auch nichts stehen, denn die erste 1 besitzt den Wert hundert, die letzte den Wert eins, damit ist hunderteins vollständig ausgedrückt. Die Lücke zwischen den Einsern zeigte an, daß dort kein Zehner existiert.
Diese Schreibweise war fehleranfällig und deshalb wurde das Zeichen 0 eingeführt, um die leere Stelle zu kennzeichnen. So wurde die 0 durch die Inder definiert. Bhaskara (1114 - 1185) erklärt die Ziffern 1, 2, 3, …. 9 und die 0 :

> *„Die Stelle, an der keine der neun Ziffern vorliegt, ist durch Leere gekennzeichnet, die durch einen Kreis markiert ist, um Fehler zu vermeiden.“ [2 Bha]*

Die leere Stelle und das Zeichen dafür wurden durch „sunya“, „leer“, beschrieben. Im Buddhismus ist „Leerheit“ das oberste Ziel, die 0 stand dazu in direkter Beziehung. Bereits Brahmagupta (598 - 668) stellte fest, daß ein Punkt benutzt wurde, der die leere Stelle in einer Dezimalzahl kennzeichnet [3 Bra].
Punkt und Kreis entwickelten sich dann weiter zu dem heute gebräuchlichen Symbol 0. An eine leeren Stelle existiert nichts. Die Kennzeichnung dieser

Stelle, die 0, existiert, aber sie besitzt die Bedeutung der leeren Stelle, sie symbolisiert „nichts“. Die Anführungszeichen demonstrieren den Unterschied des existierenden „nichts“ der 0 zum nicht existierenden nichts der leeren Stelle.

Die 0 symbolisiert das nichts der Leerstelle, sie ist „leer“, „nichts“, „keine Ziffer“ an dieser Stelle.

Die 0 in Europa

Die 0, die seit dem 10. Jahrhundert durch die Kontakte mit den Arabern in Europa bekannt war, wurde in diesem Sinn übernommen.

Leonardo von Pisa (ca. 1170 - 1240), besser unter dem Namen Fibonacci bekannt, führte die 0 in seinem „liber abaci“ als „zephirum“, der lateinischen Übersetzung des arabischen „sifr“ für „leer“, „nichts“, ein [4 Fib]. Noch im 16. Jahrhundert wurde das Zeichen 0 in Europa durch „nulla figura“, „keine Ziffer“, beschrieben. Daraus leitet sich die Bezeichnung „Null“ ab [5 Men]. Die Verwechslung des „nichts“ der 0 mit dem metaphysischen Nichts, groß geschrieben und ohne Anführungszeichen, führte aber dazu, daß das Hindu-System sich Jahrhunderte lang in Europa nicht durchsetzen konnte.

Das Nichts ist ein essentielles Thema der Kulturgeschichte der Menschheit, insbesondere auch in Europa. Zwei wirkungsmächtige Aussagen zum Nichts bilden den geistigen Überbau der Fehlentwicklung der 0. Aristoteles (384 – 322 v. Chr.) stellte fest: Das Nichts existiert nicht [6 Ari]. Die Null, die er damit assoziierte, konnte es für ihn nicht geben. Der Kirchenvater Augustinus (354 - 430) sah im Nichts das Gegenteil Gottes [7 Aug].

Wenn man bedenkt, daß Bildung und damit Mathematik vor allem in den mittelalterlichen Klöstern konzentriert war, kann man das Ausmaß dieser Vorbehalte richtig einschätzen. Im Gegensatz zum buddhistischen Glauben sind Leere und Nichts in der Metaphysik der Europäer negativ belegt.

Im Mittelalter und der Renaissance wurde die Null in aristotelischer Tradition und der Gefolgschaft Augustins mit Nichts assoziiert und deshalb abgelehnt [8 Sei], [9 Rot]. Erst die Umkehr der wahren Bedeutung der 0 in ihr widersprüchliches Gegenteil, „figura“, „Ziffer“ und „etwas“ im 16. Jahrhundert, verschaffte dem Zeichen Akzeptanz.

Eine Ziffer ist auch eine Zahl, die 0 war demnach auch eine Zahl.

Sie wurde von herausragenden Mathematikern wie René Descartes (1596 - 1650), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), Leonhard Euler (1707 - 1783) und George Boole (1815 – 1864) zwar immer noch mit „nichts“ gleichgesetzt, die „Zahl 0“ aber nicht mehr bezweifelt. Der metaphysische Widerstand war jedoch so groß, daß auch das „nichts“ schließlich völlig aus der Mathematik verbannt wurde.

In der Öffentlichkeit wird die 0 allerdings noch häufig als „nichts“ verstanden.

„Nichts“ der Zahlen ist aber „keine Zahl“, so wie ganz allgemein „nichts“ von irgendwelchen Dingen „kein Ding“ ist. „Nichts“ kann keine „Zahl“ sein. Die falsche Bedeutung der 0, Ziffer und Zahl, wird aber nicht mehr in Frage gestellt. Tatsächlich muß die wahre Definition immer noch beibehalten werden. Dieser Sinn war Jahrhunderte lang verschüttet und wird jetzt wieder freigelegt.

I.III Tertium non datur, ein Drittes gibt es nicht

Wer mit der Geschichte der Mathematik vertraut ist, weiss, daß die 0 zunächst keine Zahl war. Trotzdem argumentieren Mathematiker und Logiker, daß man frei sei, die 0 als Zahl zu definieren. Schließlich seien negative, irrationale und imaginäre Zahlen[2] zunächst ebenfalls keine Zahlen gewesen und später doch zu Recht unter diese aufgenommen worden.
Diese Behauptung verkennt die Ambivalenz des Begriffes „kein“. Die zitierten Zahlen schienen „keine“ Zahl sondern „etwas anderes“ zu sein, das, nach besserer Erkenntnis, zu einer Zahl umdefiniert werden konnte.
Die 0 repräsentiert dagegen „keine“ Zahl, „überhaupt nichts“, das nicht in das Gegenteil, „etwas“, eine „Zahl“, verkehrt werden kann. Dieses Vorgehen, das im 16. Jahrhundert realisiert wurde, verletzt das tertium non datur, ein Drittes gibt es nicht:

> *Eine Aussage ist entweder wahr, oder ihre Negation, das Gegenteil, ist wahr, ein Drittes gibt es nicht.*

Der Satz „Die 0 symbolisiert 'keine Zahl', 'nichts' “ ist wahr und kann nicht in sein Gegenteil, „die 0 ist 'etwas', eine 'Zahl' “, verkehrt werden. In die Grundlagen der Mathematik wurde ein fundamentaler Widerspruch implantiert.

> *„Die Null ist eine Zahl“ verletzt eines der elementaren Axiome von Mathematik und Logik, das „tertium non datur“.*

In der Realität existieren Phänomene, die der simplen Aussage, „Ein Drittes gibt es nicht“, nicht genügen. Sie erfordern eine modifizierte Mathematik, z.B in der Quantenmechanik oder der Modallogik, in der das „tertium non datur“ nicht mehr streng gültig ist.
Für die 0 ist „ein Drittes gibt es nicht“ aber uneingeschränkt richtig. „Keine Zahl“, 0, „nichts“, schließt die „Zahl 0“, „etwas“, aus.
Der Nachweis, daß „keine Zahl“ eine „Zahl“ sei, hätte den Nachweis erfordert, daß die Bedeutung „keine Zahl“ falsch ist. Dieser Beweis wurde aber nicht erbracht. Er ist auch nicht möglich, denn daß die Null „keine Zahl“ repräsentiert, beruht auf unbestreitbaren Tatsachen.

---

2 Irrationale Zahlen, wie $\sqrt{2}$ oder π, können nicht wie die rationalen Zahlen als Brüche ganzer Zahlen dargestellt werden. Sie sind nach gegenwärtiger Theorie als Grenzwerte einer unendlichen Folge von Dezimalen definiert. Rationale plus irrationale Zahlen bilden die reellen Zahlen. Imaginäre Zahlen basieren auf $i = \sqrt{-1}$.