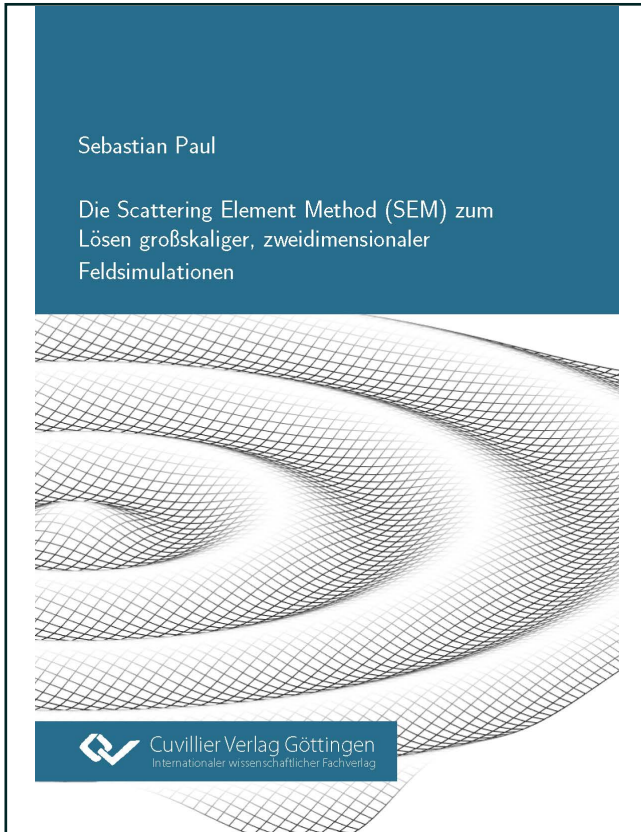




Sebastian Paul (Autor)

Die Scattering Element Method (SEM) zum Lösen großskaliger, zweidimensionaler Feldsimulationen



<https://cuvillier.de/de/shop/publications/8754>

Copyright:

Cuvillier Verlag, Inhaberin Annette Jentsch-Cuvillier, Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen,
Germany

Telefon: +49 (0)551 54724-0, E-Mail: info@cuvillier.de, Website: <https://cuvillier.de>

1. Einleitung

Ingenieure und Physiker haben es im Laufe der Zeit geschafft, die Natur immer besser zu verstehen und das gewonnene Wissen in Technik umzusetzen. Die Fragestellungen, die die Forschenden dabei beantworten mussten, wurden dabei immer komplexer.

Die Herausforderung in der Beschreibung der Natur besteht (heute wie damals) im Lösen mathematischer Gleichungen, welche ein Modell der uns umgebenden Wirklichkeit sind. Die Elektrodynamik als ein Beispiel dieser Wirklichkeit wird durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben [1]. Diese modellieren die Dynamik elektromagnetischer Felder in Form eines Gleichungssystems aus gekoppelten partiellen Differenzialgleichungen. Das Lösen dieses Gleichungssystems für eine bestimmte Fragestellung stellt in vielen Fällen (immer noch) eine enorme Herausforderung dar.

Die Maxwell-Gleichungen lassen sich etwa für "einfache Geometrien" gut analytisch lösen. Dafür kommen spezielle mathematische Verfahren, wie z.B. das *Trennen der Variablen* zum Einsatz. Interessante analytische Lösungen im Kontext der Hochfrequenztechnik sind dabei u.A. die Hohlleiter [2], dielektrische Wellenleiter [3], oder allgemein die transversale elektromagnetische Welle [4].

In einigen Fragestellungen ist eine komplette Feldlösung gar nicht erforderlich. Als Beispiel sind hier Irisblenden in einem Hohlleiterfilter zu nennen. Die Geometrie der Blende wird dabei in eine äquivalente Induktivität oder Kapazität überführt [4]. Somit lässt sich die Filtercharakteristik mit einem entsprechenden elektrischen Netzwerk berechnen.

Die meisten elektromagnetischen Fragestellungen lassen sich wegen ihrer Komplexität jedoch nur noch numerisch in Form einer Simulation lösen. Dafür sind im Laufe der Zeit viele Verfahren entwickelt worden. Die bekanntesten sind dabei die Finite Difference Time Domain (FDTD), die Finite Element Method (FEM) und die Method of Moments (MoM). Diese lassen sich in direkte und iterative Verfahren unterteilen. Die direkten Methoden (FEM und MoM) lösen dabei ein Gleichungssystem, während die iterativen Methoden (z.B. FDTD) die Lösung Schrittweise ermitteln [5,6]. Diese drei Verfahren sind Stand der Technik und als kommerzielle Software erhältlich.

Ein weiteres numerisches Feldberechnungsverfahren ist die Transmission Line Matrix (TLM) Methode, welche sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich (Frequency Domain-TLM (FDTLM)) definiert ist [7–9]. Hierbei wird der zu simulierende Bereich in Form von Streumatrizen diskretisiert. Jede Streumatrix (TLM) lässt sich ihrerseits mit Leitungen bestehend aus Induktivitäts-, Kapazitäts- und Widerstandsbelägen modellieren. Jeder Port einer Streumatrix stellt dabei einen räumlichen Abtastpunkt dar. An jedem Port liegen hin- u. rücklaufende Wellenamplituden getrennt voneinander vor.

Die TLM-Methode zeigte bereits 1949 ihr großes (jedoch vergessenes) Potential. Spangenberg et.al. stellten in diesem Jahr in [10,11] ein "Quasi-Experiment" mit einem zweidimensionalen *realen* TLM-Gitter vor. Die Forschenden bauten dazu ein Gitter aus in Reihe geschalteten Spulen und parallel geschalteten Kondensatoren auf, was dem Leitungsmodell der TLM entsprach. Das Ziel dieses Experimentes war es, die transversale Feldverteilung

1. Einleitung

eines partiell gefüllten Hohlleiters zu bestimmen. Dazu regten sie das TLM-Gitter mit einer Koppelspule bei einer bestimmten Frequenz an und maßen anschließend die Spannungen über den Kondensatoren. Die Randbedingungen des Hohlleiters modellierten sie je nach Polarisation durch Kurzschlüsse bzw. Leerläufe.

Im Verlauf dieser Arbeit zeigt sich, dass die TLM(atrrix) einen Spezialfall darstellt. Neben ihr existiert noch eine weitere Matrix - die Wave Sampling Matrix (WSM). Diese geht nicht aus einem Leitungsmodell hervor. Daher wird die Methode, bei der Streumatrizen für die Berechnung elektromagnetischer Felder genutzt werden, hier allgemein unter der Scattering Element Method (SEM) geführt. Im Frequenzbereich folgt daraus die Frequency Domain Scattering Element Method (FDSEM) und im Zeitbereich die Time Domain Scattering Element Method (TDSEM). Die FDSEM stellt dabei ein direktes und die TDSEM ein iteratives Lösungsverfahren dar.

Die FDSEM verfolgt mit dem Portformalismus einen gänzlich anderen Ansatz beim Lösen elektromagnetischer Fragestellungen als bspw. die FEM. Daraus ergeben sich neue Ansätze zum Lösen von großskaligen Feldproblemen.

Das Lösen dieser Probleme stellt in numerischen Simulationen immer noch eine große Herausforderung dar. Großskalige Fragestellungen entstehen immer dann, wenn die Dimension des zu simulierenden Gebietes sehr groß und gleichzeitig die betrachtete Wellenlänge sehr klein ist. Dadurch besteht das numerische Gitter aus sehr vielen (mehreren Millionen) Abtastpunkten. Für jeden Abtastpunkt soll durch die Simulation ein möglichst genauer Wert des Feldes berechnet werden.

Beim Lösen solch großskaliger Feldprobleme lassen sich je nach Verfahren zwei Probleme identifizieren: 1. ein hoher Speicherbedarf und 2. eine lange Rechenzeit. Der hohe Speicherbedarf ist dabei eher bei direkten Lösungsverfahren (FEM, MoM, FDSEM) anzutreffen. Eine lange Rechenzeit lässt sich sowohl bei direkten als auch bei iterativen Verfahren beobachten. Der enorm hohe Speicherbedarf der direkten Verfahren entsteht beim Faktorisieren der Koeffizientenmatrix. Dabei gilt: Je größer die Koeffizientenmatrix, desto größer der benötigte Speicherplatzbedarf.

Die FDSEM bietet mit dem Portformalismus die Möglichkeit kleinere Teilbereiche eines großen Feldproblems separat und unabhängig voneinander zu betrachten. Die Koeffizientenmatrix der Teilbereiche ist dabei stets kleiner als die des gesamten Feldproblems. Aus diesem Teile-und-herrsche-Ansatz lässt sich ein enorm speichereffizientes numerisches Lösungsverfahren entwickeln. Diese Arbeit zeigt, wie ein großskaliges Feldproblem, welches aus mehr als $31 \cdot 10^6$ Unbekannten besteht, mit lediglich 16 GByte statt 64 GByte installierten Arbeitsspeicher gelöst wird. Der Fokus dieser Arbeit liegt dabei auf einer minimalen Speichernutzung. Eine Optimierung der Rechenzeit ergäbe sich durch eine entsprechende Parallelisierung auf einem verteilten System.

1.1. Organisation dieser Arbeit

In dieser Arbeit wird die zweidimensionale FDSEM zum Berechnen von großskaligen Feldproblemen präsentiert. Nach diesem Einleitungskapitel ist sie wie folgt organisiert.

Im Kapitel 2 werden die Grundlagen zum Verständnis dieser Arbeit vermittelt. Dabei geht es zunächst allgemein um die elektromagnetische Feldtheorie, wobei das Hauptaugenmerk auf den elektromagnetischen Wellen liegt. Weiterhin wird das Konzept einer

Streumatrix und der Umgang/Lösung von miteinander verbundenen Streumatrizen präsentiert. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels zeigt das Lösen linearer Gleichungssysteme mit der **LU-Zerlegung**.

Das Kapitel 3 führt die SEM ein. Die SEM stellt dabei eine Verallgemeinerung der bereits bekannten TLM-Methode dar. Anschließend erfolgt die Beschreibung der Elemente/Zellen dieser Methode, wobei der Fokus auf dem zweidimensionalen Fall liegt. Für die Herleitung der Einheitszelle wird ein neuer Ansatz gezeigt. Weiterhin präsentiert dieses Kapitel eine vollständige Beschreibung der Dispersionseigenschaften eines FDSEM-Gitters inkl. numerischer Experimente. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels demonstriert den Einsatz der zweidimensionalen FDSEM zum Lösen von Wellenleitern mit rechteckiger Querschnittsfläche.

Das Kapitel 4 stellt Schlussfolgerungen vor, welche sich aus dem Portformalismus der FDSEM ableiten lassen.

Das Kapitel 5 beschreibt ein Teile-und-herrsche-Verfahren, mit dessen Hilfe sich großskalige Feldprobleme mit der FDSEM effizient lösen lassen. Das Verfahren lässt sich in vier Schritten beschreiben. Jeder Schritt wird dabei ausführlich diskutiert. Der Fokus der Diskussion liegt dabei auf dem Speicherbedarf der Berechnungen innerhalb der vier Schritte. Das Verfahren wird anschließend an einem praktischen Beispiel validiert.

Das Kapitel 6 demonstriert ebenfalls den Einsatz der FDSEM für großskalige Feldprobleme. Hierbei wird ein Simulationsbereich betrachtet, welcher viele gleiche bzw. ähnliche Gebiete aufweist. Es ergeben sich daraus weitere Vorteile für die FDSEM-Simulation. Diese werden an einem praktischen Beispiel erläutert.

Das Kapitel 7 fasst die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick möglicher Forschungsschwerpunkte bezüglich der FDSEM. Im Kapitel 8 befinden sich die Anhänge dieser Arbeit.

1.2. Beiträge zum Stand der Wissenschaft

Die vorliegende Arbeit liefert folgende Beiträge zum aktuellen Stand der Wissenschaft:

- **Einführung der SEM als neue Klasse für Feldsimulationen**
Die SEM ist ein neuer Oberbegriff für Feldsimulationen, welche auf Streumatrizen basieren. Diese Klasse ist bisher unter der TLM-Methode bekannt [7], wobei der Name sich aus dem verwendeten Leitungsmodell der Einheitszelle ableitet.
- **Herleitung einer neuen Einheitszelle (WSM) durch Abtastung einer Wellenfunktion**
In dieser Arbeit wird für die Herleitung bzw. Definition der Einheitszelle ein alternativer Ansatz ohne Leitungen verwendet. Es zeigt sich dabei, dass neben der klassischen FDTLM-Zelle eine weitere valide Lösung existiert - die WSM. Sie basiert auf der Idee, eine Wellenfunktion räumlich abzutasten. Da die WSM ebenfalls eine Streumatrix ist und nicht über Leitungen definiert ist, rechtfertigt sie die Einführung der SEM.
- **Analyse der Dispersionseigenschaften der WSM**
Die Dispersionseigenschaften eines FDSEM-Gitters mit WSM-Zellen werden präsentiert. Dabei lässt sich die axiale Dispersionskurve mit Hilfe eines Signalfussgraphen herleiten. Die diagonale Dispersionskurve ergibt sich aus einer Modifikation der klassischen Dispersion eines TLM-Gitters.

1. Einleitung

- **Teile-und-herrsche Verfahren für großskalige Probleme**

Diese Arbeit stellt ein Teile-und-herrsche-Verfahren vor, mit dem sich großskalige Feldsimulationen mit vergleichsweise sehr wenig benötigten Speicher berechnen lassen. Die typischen out-of-memory-Fehler können bis zu einem gewissen Punkt vermieden werden.

Die Grundidee ist dabei, den gesamten zu untersuchenden Simulationsbereich in kleinere Teilbereiche zu unterteilen. Diese Teilbereiche sind unabhängig voneinander. Für jeden Bereich wird eine eigene Streumatrix - die Interface-Matrix - berechnet. Die Berechnung kann sowohl sequenziell aber auch parallel erfolgen. Das schlussendlich zu lösende Gleichungssystem ist durch das Verwenden der Interface-Matrizen deutlich kleiner und lässt sich deshalb effizient lösen.

- **Speichereffizientes Berechnen der Interface-Matrix**

Die Berechnung der Interface-Matrizen der einzelnen Teilbereiche ist i.d.R. sehr speicherintensiv. Zur Vermeidung von Out-of-memory-Fehlern wird auch hier ein Teile-und-herrsche-Ansatz verfolgt. Das zu lösende Gleichungssystem lässt sich dazu in zwei unabhängige Gleichungssysteme zerlegen.

- **Wiederverwendung von Interface-Matrizen**

Das Konzept der Interface-Matrizen liefert einen weiteren Vorteil. Sind Teilbereiche identisch, so sind auch deren Interface-Matrizen gleich. Weisen Teilbereiche gewisse Symmetrien auf, so sind bestimmte Zeilen und Spalten in deren Interface-Matrizen vertauscht. Besteht ein großer Simulationsbereich aus mehreren gleichen und/oder symmetrischen Abschnitten, so müssen die Interface-Matrizen dieser Abschnitte lediglich einmal berechnet werden.

2. Grundlagen

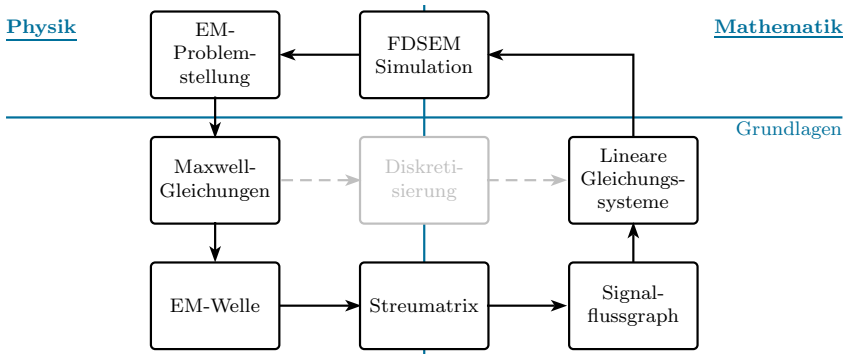


Abbildung 2.1.: Übersicht der Grundlagen

Jede Simulation eines physikalischen Phänomens nutzt Methoden aus der Physik und der Mathematik und stellt damit ein Bindeglied zwischen den beiden Fachgebieten dar. Die Physik liefert dabei die Beschreibung der Natur in Form von Gleichungen und die Mathematik versucht diese numerisch in Form einer Simulation zu lösen. Dabei gilt es, die analytischen Gleichungen geeignet zu diskretisieren und einen entsprechenden Lösungsalgorithmus anzuwenden. Anschließend beschreibt die Lösung der Simulation die Physik an bestimmten/diskreten Punkten. Sie ist damit stets eine Approximation der physikalischen Wirklichkeit.

Das in dieser Arbeit betrachtete physikalische Phänomen sind elektromagnetische Felder bzw. Wellen, welche vollständig durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben werden (hier für nichtrelativistische Problemstellungen). Die Scattering Element Method (SEM-Methode) ist das genutzte Simulationsverfahren zum Lösen der Feldgleichungen, wobei hier speziell die FDSEM (frequency domain SEM) zum Einsatz kommt. Die Diskretisierung erfolgt dabei in Form von Streumatrizen. Viele dieser untereinander verbundenen Streumatrizen bilden einen Signalfussgraphen. Dieser Graph kann in ein lineares Gleichungssystem überführt werden. Die Lösung des Gleichungssystems beschreibt anschließend eine Näherung der elektromagnetischen Felder. Um nun alle Aspekte der FDSEM adäquat beschreiben zu können, ist ein gewisses Grundverständnis verschiedener Methoden aus der Physik und der Mathematik notwendig. Einen Überblick dazu zeigt die Abb. 2.1.

Der Abschnitt 2.1 legt zunächst die Nomenklatur dieser Arbeit fest. Danach geht es in Abschnitt 2.2 um allgemeine Beziehungen elektromagnetischer Felder. Anschließend folgt in Abschnitt 2.3 die allgemeine Beschreibung einer elektromagnetischen Welle im Medium und an Grenzflächen. Zusätzlich wird der Separationsansatz zum Lösen der Wellengleichung besprochen und spezielle Lösungen, wie die ebene Welle und der Rechteckhohlleiter,

2. Grundlagen

präsentiert. Es folgt in Abschnitt 2.4 eine Erklärung der verschiedenen Definitionen von Streuparametern. Im Anschluss daran folgt eines der wichtigsten Grundlagenkapitel dieser Arbeit. Im Abschnitt 2.5 werden mit Hilfe von Signalflussgraphen die elementaren Gleichungen zum Anwenden der FDSEM hergeleitet. Der letzte Abschnitt 2.6 befasst sich mit dem Lösen linearer Gleichungssysteme und der numerischen Genauigkeit der Lösung.

2.1. Nomenklatur

Alle Herleitungen und Beschreibungen der Grundlagen finden ausschließlich im Frequenzbereich statt. Jede zeitabhängige harmonische Größe $A(t)$ lässt sich somit als Realteil einer komplexen Zahl $A(t) = \Re(\hat{A} \cdot e^{j(\omega t + \phi)})$ auffassen. Hierbei ist \hat{A} ein Spitzenwert, ω die Kreisfrequenz mit $\omega = 2\pi f$ und f die betrachtete Frequenz in Hz.

Es ist weiterhin üblich, den zeitabhängigen Term $e^{j\omega t}$ zu separieren. Der Spitzenwert \hat{A} bildet zusammen mit der komplexen Zahl $e^{j\phi}$ einen *Phasor* $\underline{A} = \hat{A}e^{j\phi}$. Die Berechnungen in dieser Arbeit finden ausschließlich mit Phasoren statt. Bei der Darstellung der Phasoren wird jedoch zu Gunsten der Übersichtlichkeit auf den Unterstrich verzichtet und \hat{A} wird als $|A|$ geschrieben, sodass:

$$\underline{A} = \hat{A}e^{j\phi} \quad \Rightarrow \quad A = |A|e^{j\phi}.$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass $|A|$ ein Spitzenwert und kein Effektivwert ist. A stellt eine komplexe Amplitude dar. Zeitliche Ableitungen von A werden durch den Vorfaktor $j\omega$ beschrieben.

In dieser Arbeit sind alle Vektoren und Matrizen als dick gedruckte Variablen z.B. \mathbf{A} abgebildet. Die Unterscheidung, ob es sich um einen Vektor oder eine Matrix handelt, ergibt sich stets aus dem Kontext oder ist explizit erwähnt.

2.2. Elektromagnetische Feldtheorie

Die elektromagnetische Feldtheorie gehört neben der speziellen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik zu den erfolgreichsten physikalischen Konzepten, die bisher erdacht worden sind. Sie beschreiben die Natur in Form von Gleichungen und sind damit von Menschen erdachte Modelle der Wirklichkeit. Was all diese Theorien so erfolgreich macht, ist, dass sie enorm präzise Vorhersagen treffen. Ein eindrucksvolles Beispiel ist die Detektion von Gravitationswellen. 2015 sind erstmals Gravitationswellen mit einem Laser-Interferometer detektiert worden [12]. Die Forschenden konnten eine absolute Längenänderung (aufgrund der Gravitationswelle) von ca. einem Tausendstel Protonenradius ($\approx 10^{-18}$ m) nachweisen.¹ Diese sensationelle Messung wäre ohne die elektromagnetische Feldtheorie, die allgemeine Relativitätstheorie und die Quantenmechanik nicht möglich gewesen. Die spezielle Relativitätstheorie sagt die Existenz von Gravitationswellen voraus. Der Laser des Interferometers wird durch die Quantenmechanik beschrieben und das Interferometer selbst kann nur vorstanden werden, wenn bekannt ist, dass (Laser-) Licht eine elektromagnetische Welle ist, welche sich mit konstanter Geschwindigkeit ausbreitet. Dieses Beispiel zeigt eindrucksvoll

¹In der Veröffentlichung [12] messen die Forschenden relative Längenänderungen (= *strain*). Diese beträgt $\approx 3 \cdot 10^{-22}$. Die Bezugslänge ist dabei die Armlänge des Interferometers und beträgt 4 km.

die Verflochtenheit physikalischer Theorien und die daraus resultierenden technischen Umsetzungen (hier speziell der Laser und das Interferometer). Dieses Kapitel beschäftigt sich im Folgenden mit den Grundlagen elektromagnetischer Felder.

Die Maxwell'schen Feldgleichungen beschreiben die Dynamik elektromagnetischer Felder und sind somit das Grundgerüst der elektromagnetischen Feldtheorie. Die Gleichungen wurden 1873 von James Clerk Maxwell veröffentlicht [4, S. 6]. Alle elektromagnetischen Phänomene, wie z.B. elektrischer Strom, Entladungen in Form von Blitzen oder elektromagnetische Wellen können mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen beschrieben werden. In einem kartesischen Koordinatensystem lauten die frequenzabhängigen Maxwell-Gleichungen [4, S. 10]²:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.4)$$

mit

\mathbf{E} dem elektrischen Feldstärkevektor in V/m

\mathbf{H} dem magnetischen Feldstärkevektor in A/m

\mathbf{J} dem elektrischen Stromdichtevektor in A/m²

ρ der Ladungsdichte in As/m³

ε der Permittivität: $\varepsilon \propto \varepsilon_0$, wobei ε_0 die elektrische Feldkonstante mit $\varepsilon_0 \approx 8.8542 \cdot 10^{-12}$ As/Vm ist. ε beschreibt über die relative Permittivität (ε_r) und einen Verlustfaktor ($\tan(\delta)$) dielektrische Materialeigenschaften und ist im Allgemeinen eine komplexe Größe (siehe Kapitel 2.2.1).

μ der Permeabilität: $\mu \propto \mu_0$, wobei μ_0 die magnetische Feldkonstante mit $\mu_0 \approx 1.2566 \cdot 10^{-6}$ Vs/Am ist. μ beschreibt über die relative Permeabilität (μ_r) und einen Verlustfaktor magnetische Materialeigenschaften und ist im Allgemeinen eine komplexe Größe (siehe Kapitel 2.2.1).

Die obigen Gleichungen sind so formuliert, dass lediglich die Feldstärken \mathbf{E} und \mathbf{H} auftreten. Beide Felder sind jeweils über die Materialgleichungen:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (2.6)$$

mit den dazugehörigen Flussdichten verbunden, wobei hier das Material jeweils als linear und isotrop angenommen wird. \mathbf{D} ist die elektrische Verschiebungsstromdichte in As/m² und \mathbf{B} ist die magnetische Flussdichte in Vs/m². Wie später gezeigt wird, lassen sich mit Hilfe von (2.5) und (2.6) die Wechselwirkungen elektromagnetischer Felder mit Materie beschreiben, wobei die stoffspezifischen Eigenschaften über die relative Permittivität ε_r bzw. rel. Permeabilität μ_r und einem Verlustwinkel modelliert werden.

Das Faraday'sche Gesetz oder auch Induktionsgesetz (2.1) beschreibt den Zusammenhang zwischen zeitlich veränderlichen magnetischen Feldern und der räumlichen Änderung von elektrischen Feldern. (2.2) wird Ampere'sches Gesetz mit Maxwell'scher Korrektur [13, S. 326]

²Auf den nicht-existenten magnetischen Stromdichtevektor \mathbf{M} wird hierbei verzichtet.

2. Grundlagen

oder auch erweitertes Durchflutungsgesetz genannt. Es zeigt, dass magnetische Felder sowohl durch elektrische Ströme als auch durch zeitlich veränderliche elektrische Felder hervorgerufen werden. Zweiteres erkannte J. C. Maxwell und führte deshalb die elektrische Verschiebungsstromdichte \mathbf{D} mit (2.5) ein. (2.3) ist das Gauß'sche Gesetz. Es sagt aus, dass Ladungsträger Quellen elektrischer Felder sind. Da bisher noch keine magnetischen Monopole entdeckt wurden, ist die Divergenz des magnetischen Feldes immer Null, was (2.4) zeigt.

Aus den beiden Naturkonstanten ε_0 und μ_0 ergeben sich zwei weitere und für den späteren Verlauf dieser Arbeit nützliche physikalische Konstanten. Diese sind die Vakuumlichtgeschwindigkeit [4, S. 16]

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2.7)$$

und die Wellenimpedanz des Vakuums [4, S. 17]

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} \approx 377 \Omega. \quad (2.8)$$

Mit dem Gleichungssystem aus gekoppelten partiellen Differentialgleichungen (2.1) bis (2.4) können alle (makroskopischen) elektromagnetischen Phänomene erklärt werden, u. a. elektromagnetische Wellen, welche ein wesentlicher Bestandteil der FDSEM sind.

2.2.1. Wechselwirkung elektromagnetischer Felder mit Materie

In diesem Kapitel geht es darum, wie sich elektromagnetische Felder in Materie verhalten. Bisher sind die Materialparameter ε_r und μ_r lediglich am Rande erwähnt worden, ohne diesen jedoch eine genaue Beschreibung bzw. Bedeutung zukommen zu lassen. Dies geschieht nun, über die beiden Felder \mathbf{D} und \mathbf{B} aus Kapitel 2.2. Der Fokus liegt hierbei auf linearen, isotropen Materialien.

Im Vakuum: Die elektrische Verschiebungsstromdichte \mathbf{D} ist ein Hilfsfeld, welches für die Beschreibung elektromagnetischer Wellen unabdingbar ist. J. C. Maxwell führte dieses Feld bei der Veröffentlichung seiner Theorie ein und "reparierte" damit das Amper'sche Gesetz [13, S. 323]. Sein damaliges Problem war, dass die Divergenz von $\nabla \times \mathbf{H}$ im elektrodynamischen Fall nicht Null ist, sondern $\nabla \cdot \mathbf{J}$ beträgt. Der fehlende Term folgt aus der Kontinuitätsgleichung und lautet (für das Vakuum) $j\omega\varepsilon_0\mathbf{E}$ [13, S. 323]. Dieser Term wird als Verschiebungsstrom bezeichnet. Der Name ist jedoch ungünstig gewählt, da *Strom* impliziert, dass sich elektrische Ladungen bewegen. Dies ist hierbei aber nicht der Fall. Die wichtige Schlussfolgerung daraus ist jedoch, dass magnetische Wirbelfelder nicht nur durch Ströme, sondern eben auch durch zeitlich veränderliche *Verschiebungsströme* entstehen. Der Faktor $\varepsilon_0\mathbf{E}$ des Verschiebungsstroms ist das bereits erwähnte Hilfsfeld \mathbf{D} ($j\omega$ stellt die zeitliche Ableitung dar).

Mit \mathbf{D} lässt sich nun die Wechselwirkung zwischen elektrischen Feldern und dielektrischen Materialien modellieren. Ein äußeres elektrisches Feld übt auf die Moleküle eine Kraft aus. Diese richten sich aufgrund ihres Dipolmoments entsprechend zu den Feldlinien aus. Es findet eine Polarisation \mathbf{P}_e statt. Für lineare Materialien gilt [4, S. 10]

$$\mathbf{P}_e = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad (2.9)$$

wobei χ_e die elektrische Suszeptibilität ist. χ_e ist ein materialspezifischer Wert. Diese zusätzliche Polarisation erhöht die Verschiebungsstromdichte \mathbf{D} [4, S. 10]:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}. \quad (2.10)$$

Der Faktor $(1 + \chi_e)$ in (2.10) bildet zusammen mit der elektrischen Feldkonstante ε_0 die Permittivität eines Materials [4, S. 10]:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) = \varepsilon' - j\varepsilon''. \quad (2.11)$$

Diese ist im Allgemeinen eine komplexe Größe. Durch den Imaginärteil werden Verluste berücksichtigt. Bei verlustfreien/idealen Dielektrika ist der Imaginärteil stets Null. Zur Beschreibung dielektrischer Materialien wird jedoch selten explizit der Real- und Imaginärteil angegeben. Stattdessen wird die relative Permittivität $\varepsilon_r = \varepsilon'/\varepsilon_0$ und der Tangens des Verlustwinkels δ verwendet. Besitzt das Material ebenfalls eine gewisse elektrische Leitfähigkeit σ , so ergibt sich der gesamte Verlustfaktor eines Materials zu:

$$\tan(\delta) = \frac{\omega\varepsilon'' + \sigma}{\omega\varepsilon'}, \quad (2.12)$$

wie es in [4, S. 11] beschrieben ist. Im Verlustfaktor sind demnach elektrische als auch dielektrische Verluste enthalten. Eine Trennung der beiden ist ohne zusätzliche Information nicht möglich. Mit (2.12) kann nun die Permittivität eines beliebigen Dielektrikums (inkl. elektrischer Verluste) als [4, S. 11]:

$$\varepsilon = \varepsilon' (1 - j \tan(\delta)) = \varepsilon_0 \varepsilon_r (1 - j \tan(\delta)). \quad (2.13)$$

angegeben werden. Der Fokus der in dieser Arbeit betrachteten/genutzten Materialien liegt auf verlustbehafteten Dielektrika. Magnetische bzw. magnetisierbare Materialien haben eine untergeordnete Rolle. Der Vollständigkeit halber sei jedoch erwähnt, dass die Beschreibung der Permeabilität μ auf ähnliche Weise erfolgt, wie bei ε . Hier richten sich Elementarmagnete zum äußeren Magnetfeld aus, wodurch es zu einer Umpolung kommt. Auch hier treten Verluste auf. Analog zur Permittivität ist dadurch auch die Permeabilität im Allgemeinen eine komplexe Größe:

$$\mu = \mu' - j\mu''. \quad (2.14)$$

Weitere Informationen sind in [4, 13] zu finden.

2.2.2. Randbedingungen elektromagnetischer Felder

Breiten sich elektromagnetische Felder zwischen verschiedenen Materialien aus, so müssen sie an den Materialgrenzen bestimmte Randbedingungen erfüllen. Diese sollen in diesem Abschnitt präsentiert werden. Auf eine genaue Herleitung der gesuchten Beziehungen wird hier jedoch (mit Verweis auf [4, S. 12ff.] oder [13, S. 331ff.]) verzichtet.

Betrachtet wird die Grenzfläche zwischen zwei Materialien mit ε_1 und ε_2 bzw. μ_1 und μ_2 . Die Form der Materialgrenze wird an jedem Punkt mit ihrem Normalenvektor \mathbf{n} beschrieben. Dieser zeigt in Richtung von ε_2 (vgl. [4, Abb. 1.5 auf S. 12]). An der Materialgrenze können die Felder in ihre normalen (Index n) und tangentialen (Index t) Komponenten zerlegt werden. Im Material 1 ergibt sich somit: \mathbf{E}_{t1} , \mathbf{H}_{t1} , \mathbf{E}_{n1} und \mathbf{H}_{n1} und entsprechend im Material 2: \mathbf{E}_{t2} , \mathbf{H}_{t2} , \mathbf{E}_{n2} und \mathbf{H}_{n2} . An der Grenzfläche können ebenfalls eine

2. Grundlagen

Flächenladungsdichte ρ_f und eine Stromdichte \mathbf{J} vorhanden sein. Damit ergeben sich die Randbedingungen zu [4, S. 13f.]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 \mathbf{E}_{n2} - \varepsilon_1 \mathbf{E}_{n1} &= \rho_f & \mu_1 \mathbf{H}_{n1} - \mu_2 \mathbf{H}_{n2} &= 0 \\ \mathbf{E}_{t1} - \mathbf{E}_{t2} &= 0 & \mathbf{H}_{t2} - \mathbf{H}_{t1} &= \mathbf{J}\end{aligned}\quad (2.15)$$

bzw. allgemeiner mit \mathbf{E}_1 , \mathbf{H}_1 und \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_2 :

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot (\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 - \varepsilon_1 \mathbf{E}_1) &= \rho_f & \mathbf{n} \cdot (\mu_1 \mathbf{H}_1 - \mu_2 \mathbf{H}_2) &= 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0 & \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \mathbf{J}.\end{aligned}\quad (2.16)$$

Damit folgt ein Materialsprung zwischen zwei reinen Dielektrika ($\mu_1 = \mu_2$, $\rho_f = 0$ und $\mathbf{J} = 0$) mit:

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 \mathbf{E}_{n2} - \varepsilon_1 \mathbf{E}_{n1} &= 0 & \mathbf{H}_{n1} - \mathbf{H}_{n2} &= 0 \\ \mathbf{E}_{t1} - \mathbf{E}_{t2} &= 0 & \mathbf{H}_{t2} - \mathbf{H}_{t1} &= 0.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Das bedeutet, dass hier bis auf die Normalkomponente des elektrischen Feldes alle Feldkomponenten stetig sind. Ein weiterer Spezialfall sind perfekt leitende Flächen/Materialien, welche auch als Perfect electric conductor (PEC) bezeichnet werden. Alle Feldkomponenten innerhalb des PEC-Materials (hier das Material 2) sind Null [4, S. 14]. Damit folgt aus (2.15):

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 \mathbf{E}_{n1} &= \rho_f & \mathbf{H}_{n1} &= 0 \\ \mathbf{E}_{t1} &= 0 & \mathbf{H}_{t1} &= \mathbf{J}.\end{aligned}\quad (2.18)$$

2.3. Die elektromagnetische Welle

Aus den Maxwell-Gleichungen (2.1) bis (2.2) erfolgt die Herleitung der inhomogenen Wellengleichung für das elektrische und magnetische Feld in einem ladungsträgerfreien Raum mit $\rho = 0$. Die Wellengleichung ist allgemein auch unter dem Begriff *Helmholtz-Gleichung* bekannt. Die Herleitung beginnt mit dem Anwenden des Rotationsoperators auf (2.1):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -j\omega\mu (\nabla \times \mathbf{H}). \quad (2.19)$$

Mit der Identität $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ [4, S. 16] folgt aus (2.19) mit $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ (ladungsträgerfrei³):

$$\nabla^2 \mathbf{E} = j\omega\mu (\nabla \times \mathbf{H}), \quad (2.20)$$

wobei ∇^2 der Laplace-Operator ist. Die Gleichung (2.20) in (2.2) eingesetzt und anschließendem Umsortieren, ergibt die inhomogene Wellengleichung für das elektrische Feld:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{E} = j\omega\mu \mathbf{J}. \quad (2.21)$$

In einem quellenfreien Raum ($\mathbf{J} = 0$) reduziert sich (2.21) zur homogenen Wellengleichung für das elektrische Feld:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{E} = 0. \quad (2.22)$$

³Diese Forderung muss explizit erfüllt sein, da sonst räumliche Änderungen ruhender Ladungsverteilungen Quellen elektromagnetischer Wellen beliebiger Frequenz sein könnten. (2.21) hätte dann die Form (mit $\mathbf{J} = 0$): $\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{E} = 1/\varepsilon \nabla \rho$. Dies ist jedoch unphysikalisch.