



Jürgen Krahl (Herausgeber)  
Josef Löffl (Herausgeber)  
**Strömungen**



<https://cuvillier.de/de/shop/publications/7012>

Copyright:  
Cuvillier Verlag, Inhaberin Annette Jentsch-Cuvillier, Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen,  
Germany  
Telefon: +49 (0)551 54724-0, E-Mail: [info@cuvillier.de](mailto:info@cuvillier.de), Website: <https://cuvillier.de>



Philipp Epple<sup>1</sup>

## Strömungen – Die Entstehung von Auftrieb

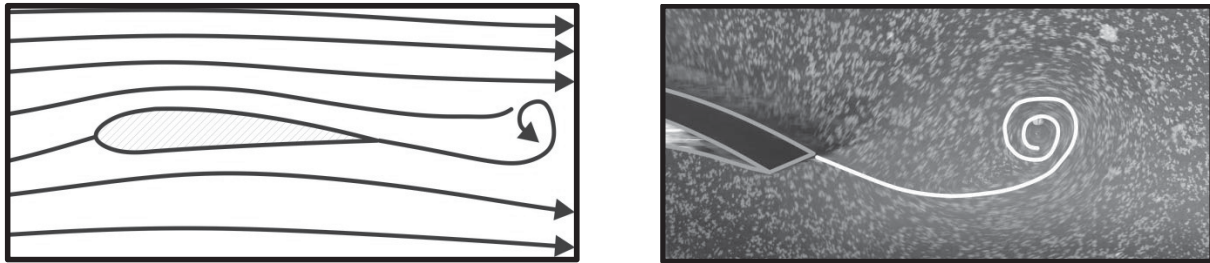


Abbildung 1: Der Anfahrwirbel eines Tragflügelprofils – rechts die Strömungsvisualisierung im Wasserkanal

### Einführung

Strömungen treten in allen Bereichen der Natur und der Technik auf. In der Natur sind Strömungen lebensnotwendig. Menschen und Tiere benötigen einen Blutkreislauf, um den Körper mit wichtigen Nährstoffen zu versorgen, Lebewesen benötigen Wasser und Luft, um zu leben. Strömungen gibt es auch in der Atmosphäre, in Flüssen und in den Ozeanen. Auf den Planeten und in den Galaxien gibt es auch Strömungen, wie z.B. die Wirbelströmungen der Spiralarme der Spiralgalaxien. In der Technik dienen Strömungen dazu, Maschinen und Anlagen zu betreiben, Stoff, Wärme und Energie zu übertragen, Schub und Auftrieb zu erzeugen und Widerstand zu leisten (Durst [5]). Ohne Schub und ohne Auftrieb wäre z.B. die Luftfahrt nicht möglich.

Für Strömungen gelten die Erhaltungssätze der klassischen Mechanik: Masse, Impuls und Energie kann weder erschaffen noch vernichtet werden. Die Massenerhaltung liefert den Bezug zwischen der Dichte, der durchströmten Fläche und der Geschwindigkeit einer Strömung. Der Impuls ist das Produkt der Masse des Fluides und seiner Geschwindigkeit. Die Energie einer Strömung kann verschiedene Formen annehmen. In einer Strömung kann Energie in Form von Druck, man denke beispielsweise an einen Druckspeicher, kinetischer Energie, potentieller Energie und innerer Energie gespeichert werden. Die kinetische Energie ist die Bewegungsenergie des Fluids, d.h. die Energie aufgrund der Geschwindigkeit, die potentielle Energie ist die Lageenergie oder die Energie aufgrund der Höhe und die innere Energie ist die durch die Temperatur im Fluid gespeicherte Wärme. Die Summe dieser Energiefor-

<sup>1</sup> Prof. Dr.-Ing. Philipp Epple ist Professor für Strömungsmechanik und Strömungsmaschinen an der Fakultät Maschinenbau und Automobiltechnik der Hochschule Coburg.



men lässt sich nur verändern, wenn Wärme in das Fluid einströmt oder es verlässt oder Arbeit vom oder auf das Fluid verrichtet wird. Die Energieerhaltung wird vom ersten Hauptsatz der Thermodynamik beschrieben.

Die Impulserhaltung wird über die drei Newtonsche Gesetze genauer beschrieben: 1. *Wirken keine Kräfte auf das Fluid, oder allgemein auf einen Körper, so ändert sich sein Impuls bzw. Bewegungszustand nicht, das Fluid ist im Gleichgewicht.* 2. *Die Änderung des Impulses oder des Bewegungszustandes eines Fluides ist gleich der Summe aller an dem Fluidelement angreifenden Kräfte. Das ist die Grundgleichung der Mechanik.* 3. *Kräfte wirken immer paarweise, übt ein Körper A auf einen Körper B eine Kraft aus (Actio oder Aktion), so wirkt eine gleich große aber entgegen gerichtete von Körper B auf Körper A (Reactio oder Reaktion). Das ist das Reaktionsprinzip.*

Eine Impulsänderung kann nur durch eine Kraft oder eine Summe von Kräften hervorgerufen werden. Auftrieb, Schub und Widerstand sind Kräfte. An einem Flugzeug wirken im Wesentlichen vier Kräfte: die Gewichtskraft, die durch den Auftrieb während des Fluges aufgehoben wird und der Widerstand, der durch den Schub kompensiert wird. Die Entstehung von Widerstand und die Erzeugung von Schub wird in der Literatur in der Regel sehr gut erklärt. Der aerodynamische Auftrieb hingegen, der die Grundlage des Fluges bildet, wird in der Literatur sehr häufig unzureichend erklärt. Auf der Grundlage der Erhaltungssätze und der drei Newtonschen Gesetze werden in diesem Beitrag die Entstehung von Auftrieb und seine Bestimmung sowie einige Irrtümer verschiedener weit verbreiteter „Auftriebserklärungen“ untersucht.

## Massenerhaltung

Aufgrund der Massenerhaltung ist die Masse an Fluid, die pro Zeiteinheit an einem Ende einer Rohrleitung einströmt, d.h. der Massenstrom  $\dot{m}_1$ , gleich dem Massenstrom  $\dot{m}_2$  der am anderen Ende wieder ausströmt, Abbildung 2.

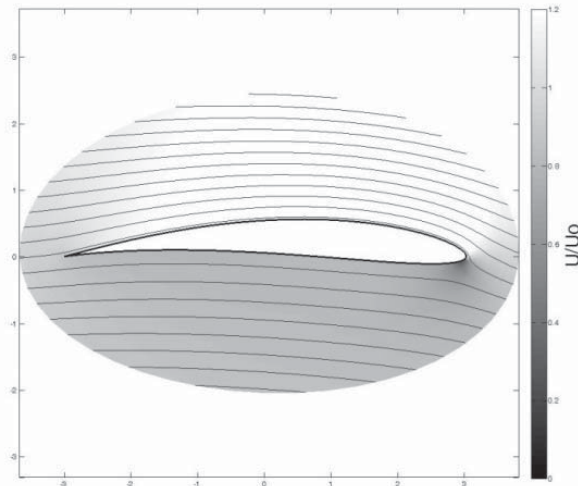


**Abbildung 2: Massenerhaltung bei Innenströmungen**

Mathematisch formuliert schreibt sich die Massenerhaltung für Innenströmungen als

$$\dot{m}_1 = \rho_1 U_1 A_1 = \dot{m}_2 = \rho_2 U_2 A_2 \quad (1)$$

wobei  $\rho$  die Dichte,  $U$  die Geschwindigkeit und  $A$  die Fläche senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit des Fluids ist. Ein Fluid ist entweder ein Gas oder eine Flüssigkeit. Schwieriger wird es jedoch bei Außenströmungen, wie z.B. die Umströmung eines Tragflügelprofils, Abbildung 3.



**Abbildung 3: Umströmung eines Tragflügelprofils**

Hier gibt es an und für sich kein Rohr oder Kanal, indem dann der Massenstrom konstant ist. Abhilfe schaffen hier die schwarzen feinen durchgezogenen Linien, das sind die Stromlinien. Die Stromlinien verhalten sich so wie ein Strömungskanal oder eine Stromröhre. Zwischen zwei Stromlinien ist der Massenstrom konstant, da die Stromlinien tangential zu den Geschwindigkeitsvektoren verlaufen und somit kein Massenstrom über eine Stromlinie entweichen kann. Durch den Anstellwinkel des Profils, der an der schräg von unten kommenden Strömung zu erkennen ist, und durch seine Wölbung wirkt das Profil auf die Stromröhre, die das Profil auf der Oberseite überströmt, wie ein Hindernis und die Stromröhre wird dadurch etwas zusammengestaucht. Daher sind die Stromröhren oberhalb des Profils schmaler als unterhalb. Da aber der Massenstrom in den Stromlinien konstant bleiben muss ( $\dot{m} = \rho UA = \text{konst.}$ ) und die Dichte  $\rho$  in unzähligen Fällen auch als konstant betrachtet werden kann so muss, da die Querschnittsfläche der Stromröhre oberhalb des Profils kleiner als unterhalb des Profils ist, die Geschwindigkeit oberhalb des Profils größer als unterhalb sein.

*Somit liefert die Massenerhaltung ein erstes Ergebnis: die Geschwindigkeit oberhalb eines angestellten Profils ist größer als unterhalb.*

Dieses Ergebnis ist sehr allgemein gültig, da in der Aerodynamik, d.h. bei Luftströmungen, die Dichte bis zu Machzahlen gleich 0,3 nahezu als konstant betrachtet werden kann. Die Machzahl ist das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeit und der Schallgeschwindigkeit und stellt eine dimensionslose Geschwindigkeit dar.

$$M = \frac{U}{a} \quad (2)$$

Ist die Machzahl kleiner eins, dann spricht man von einer Unterschallströmung, ist diese über eins, dann ist es eine Überschallströmung. Bei normalen Bedingungen



entspricht eine Machzahl von 0,3 einer Geschwindigkeit von etwa 370 km/h. Somit können Strömungen um Fahrzeuge, Züge und Sportflugzeugen in der Regel alle als inkompressibel betrachtet werden, d.h. die Dichte der Luft bleibt hier nahezu konstant. In der Hydrodynamik, d.h. bei Wasserströmungen, kann die Dichte generell als konstant betrachtet werden.

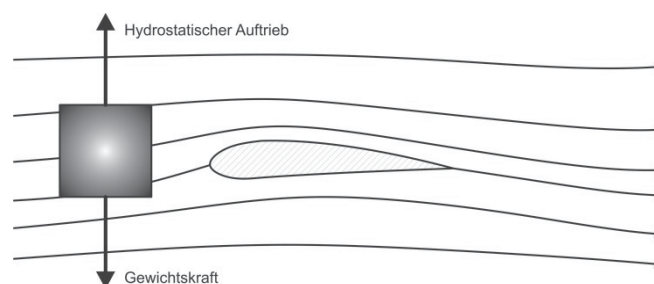
### Energieerhaltung

Die Tatsache, dass die Geschwindigkeit oberhalb des Profils größer als unterhalb ist, reicht aber für eine Erklärung des Auftriebs noch nicht aus. Hier schafft die Energieerhaltung Abhilfe. Wir betrachten hier die Energieerhaltung für inkompressible Fluide: in jedem Punkt der Strömung ist die Summe aller Energieformen konstant und bleibt idealerweise so. Die Möglichkeit eines inkompressiblen Fluids, Energie zu speichern, sind in Form von Druck, Geschwindigkeit und in Form von Lageenergie, d.h. Höhe. Der Höhenterm spielt aber in der Aerodynamik bzw. bei Außenströmungen keine Rolle, weil dieser identisch mit dem hydrostatischen Auftrieb aufgehoben wird. Jeder, der schon einmal geschwommen ist weiß, dass man sich im Wasser leichter fühlt. Das liegt daran, dass das Wasser auf den Schwimmkörper eine Auftriebskraft ausübt, die hydrostatische Auftriebskraft, auch als Archimedische Prinzip bekannt:

*Der statische Auftrieb eines Körpers in einem Fluid ist genauso groß wie die Gewichtskraft des vom Körper verdrängten Fluids.*

Diese Auftriebskraft trägt somit einen Teil unserer Gewichtskraft im Wasser und wir fühlen uns leichter.

Nun wiegt in einer Luftströmung die Luft genau so viel wie die Gewichtskraft des vom Körper – also der Luft selbst – verdrängten Fluids: der hydrostatische Auftrieb hebt die Gewichtskraft hier exakt auf, Abbildung 4.



**Abbildung 4: Hydrostatischer Auftrieb und Gewichtskraft**

Mathematisch formuliert lässt sich dieser Zusammenhang wie folgt formulieren. Die Gewichtskraft des Körpers, hier ein Fluidteilchen der Luft selbst, ist

$$F_G = mg = \rho_{\text{Körper}} V g \quad (3)$$

und der hydrostatische Auftrieb



$$F_H = \rho_{Luft} V g \quad (4)$$

Da aber die Dichte des Körpers gleich die Dichte der Luft ist, weil der Körper nichts weiter als ein Fluidteilchen oder Luftteilchen ist, heben sich diese Kräfte identisch auf. Daher spielen als Energieträger in einer inkompressiblen Strömung nur der Druck und die kinetische Energie eine Rolle. Somit schreibt sich Energiegleichung, auch als Bernoulli-Gleichung bekannt, als

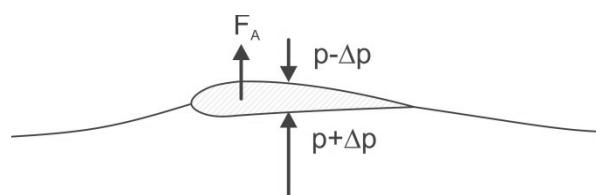
$$p + \frac{1}{2} \rho U^2 = e = konst. \quad (5)$$

In der Strömungsmechanik wird oft mit der spezifischen Energie gerechnet, d.h. es wird die Energie pro Volumenelement geschrieben:

$$e = \frac{E}{V} \quad (6)$$

Das ist deshalb notwendig, weil man in der Regel keinem Fluidteilchen folgen kann und somit ein Volumenelement im Fluid betrachtet.

Aus der Bernoulli-Gleichung geht hervor, dass wenn in einer Strömung die Geschwindigkeit zunimmt der Druck fallen muss. Aus dem Ergebnis im Abschnitt Massenerhaltung wissen wir, dass die Geschwindigkeit über dem Profil größer als darunter ist. Die Bernoulli Gleichung sagt uns nun, dass der Druck über dem Profil geringer als der Druck unter dem Profil ist. Daher muss nun eine Kraft nach oben entstehen, da die Unterseite das Profil nach oben drückt und die obere Seite aufgrund des geringeren Druckes eine geringere Kraft nach unten erzeugt. Die Differenz dieser Kräfte ist eine resultierende Kraft nach oben, die Auftriebskraft  $F_A$ , Abbildung 5.



**Abbildung 5: Druckverteilung und Auftrieb**

Wir wissen nun, wie und dass ein Auftrieb entstehen kann, aber es fehlt noch die Information über den genauen Betrag  $F_A$  der Auftriebskraft.

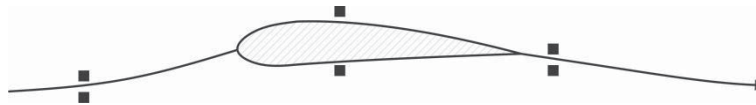
Das Bernoulli-Prinzip wird leider aber auch oft falsch angewandt, wie im nächsten Abschnitt dargestellt.

### Unterschiedliche Wegstrecken und gleiche Durchlaufzeit

Eine weit verbreitete falsche Erklärung für den Auftrieb geht auf die Wegstrecken zurück, die ein Fluidteilchen zurücklegen muss, um ein Tragprofil zu umströmen. Es

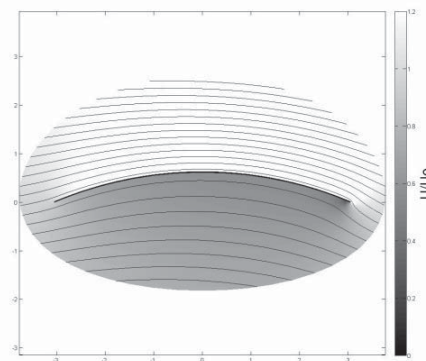


wird hier angenommen, dass die Transitzeit über und unter der Tragfläche dieselbe ist. Somit treffen zwei Fluidteilchen, die gemeinsam vor dem Profil starten, das eine aber dann über und das andere unter dem Profil vorbeiströmen, nach der Profilmströmung wieder zusammen, Abbildung 6. Da aber die Wegstrecke aufgrund der Wölbung und des Anstellwinkels des Profils oben länger als unten ist und die Transitzeiten als gleich angenommen werden, muss die Strömungsgeschwindigkeit oberhalb des Profils größer als unterhalb sein. Durch das Bernoulli-Prinzip, Gleichung (5) ist somit der Druck über dem Profil geringer als unterhalb, was zur Erzeugung von Auftrieb führt.



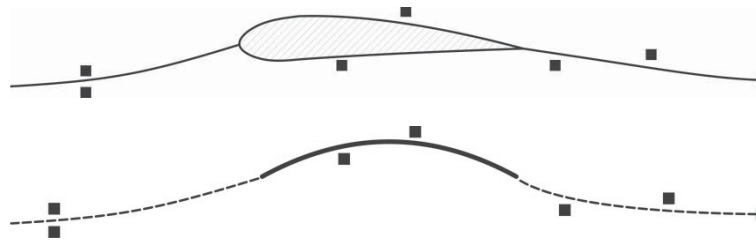
**Abbildung 6: Die falsche Annahme der gleichen Durchlauf- oder Transitzeit**

Diese Argumentation ist jedoch falsch. Das kann am besten an einem dünnen Profil erkannt werden, wie in Abbildung 7 dargestellt. Hier sind die Wegstrecken ober- und unterhalb des Profils dieselben. Aber auch hier stauchen sich die Stromlinien oberhalb und spreizen sich die Stromlinien unterhalb des Profils, sodass nach der Massenerhaltung die Geschwindigkeit oberhalb größer als unterhalb des Profils sein muss. Somit müssen die Geschwindigkeiten oberhalb des Profils größer als unterhalb sein, obwohl die Wegstrecken unter- und oberhalb des Profils gleich sind!



**Abbildung 7: Umströmung eines dünnen gewölbten Profils**

Somit können die Transitzeiten ober- und unterhalb des Profils nicht gleich sein. In der Tat sind die Transitzeiten oberhalb immer geringer als unterhalb, ganz gleich ob es sich um ein dickes oder ein dünnes gewölbtes Profil handelt, Abbildung 8.



**Abbildung 8: Entgegen der falschen Annahme der gleichen Transitzeiten sind diese oberhalb des Profils kleiner als unterhalb**

Daher ist die Annahme der gleichen Transitzeiten nicht aufrecht zu erhalten. Es muss also eine andere Erklärung für den Auftrieb geben.

Weshalb diese Theorie dennoch selbst in Lehrbüchern der Strömungsmechanik weit verbreitet ist, ist an und für sich unverständlich. Vielleicht liegt es aber daran, dass hier mit mehr oder minder intuitiven Aussagen argumentiert wird. In der Tat ist die Weglänge über ein angestelltes dickes Profil größer als unterhalb und die Annahme der gleichen Transitzeit ist gewissermaßen einleuchtend oder plausibel, aber sie entspricht nicht den Tatsachen. Weder für dicke Profile noch für dünne Profile trifft die Annahme der gleichen Transitzeiten in der Regel zu.

### Querdruckgleichung

Eine fundierte Erklärung für die Entstehung des Auftriebes geht auf die Krümmung der Stromlinien zurück.

Jeder, der im Fahrzeug schon um eine Kurve gefahren ist, weiß, dass man nach außen gedrückt wird. Entweder der Sitz selbst hält einen dann zurück oder man muss sich ggf. auch mit den Händen zusätzlich festhalten. Das Fahrzeug selbst wird nur deshalb in der Kurve gehalten, weil zwischen Reifen und Fahrbahn die Reibungskraft wirkt, die das Fahrzeug auf der Fahrbahn hält.

Genauso müssen auch die Fluidteilchen auf den Stromlinien um die Kurven strömen, ohne jedoch, wie auch beim Fahrzeug, auf den gekrümmten Stromlinien „aus der Bahn“ zu kommen, Abbildung 9. Die Zentrifugalkraft zieht aber auch hier die Teilchen „aus der Kurve“. Dennoch bleiben diese Teilchen auf den Stromlinien, d.h. sie strömen um die Kurven der Stromlinien.



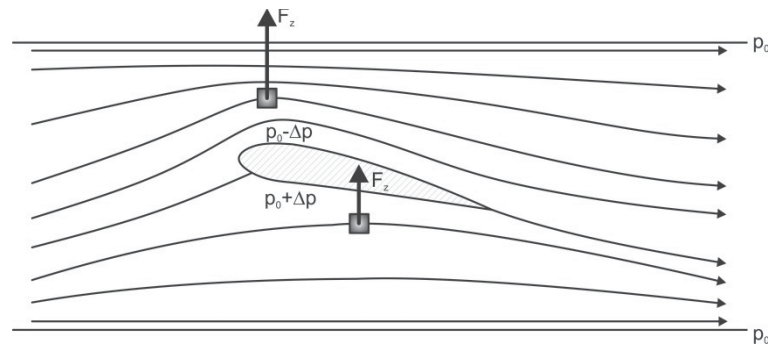


Abbildung 9: Zentrifugalkraft  $F_z$

Aber wie können diese Fluidteilchen um die Kurven strömen, wenn hier nicht so wie beim Fahrzeug eine Reibungskraft vorhanden ist? Welche Kraft hält diese Teilchen auf deren Bahnen oder Stromlinien? Es handelt sich um die Druckkraft. Aufgrund der Druckverteilung im Fluid herrscht am Außenradius  $r_A$  des Fluidteilchens, Abbildung 10, ein etwas größerer Druck als am Innenradius  $r_I$ . Diese Druckdifferenz führt dazu, dass die Druckkraft der Zentrifugalkraft  $F_z$  entgegen wirkt und das Fluidteilchen somit auf der Bahn oder Stromlinie hält.

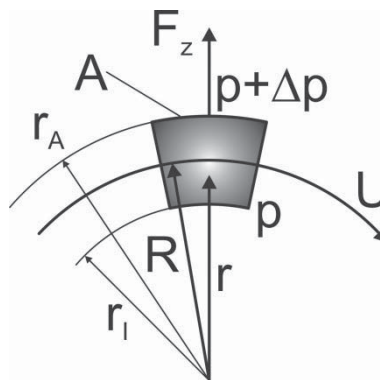


Abbildung 10: Kräfte senkrecht zur Stromlinie – die Querdruckgleichung

Dieser Zusammenhang lässt sich auch mathematisch darstellen. Die Formel für die Zentrifugalkraft ist aus der Mechanik bekannt und wird hier nicht im Detail hergeleitet

$$F_z = m \frac{U^2}{R} = \rho \Delta V \frac{U^2}{R} = \rho A \Delta r \frac{U^2}{R} \quad (7)$$

wobei  $m$  die Masse des Fluidteilchens,  $U$  die Geschwindigkeit,  $R$  der Krümmungsradius der Stromlinie,  $\rho$  die Dichte des Fluids,  $A$  die Fläche des Teilchens an den Stirnseiten in  $r=r_A$  und  $r=r_I$  und  $\Delta r=r_A-r_I$  ist. Die Zentrifugalkraft lässt sich aber auch qualitativ verstehen, weil je größer die Masse  $m$  und die Geschwindigkeit  $U$  und umso enger die Kurve (kleinerer Krümmungsradius  $R$ ), umso mehr wird man aus der Kurve geschleudert, d.h. desto größer ist die Zentrifugalkraft. Genau diese Zusammenhänge bringt die Gleichung (7) zum Ausdruck. Qualitativ lässt sich diese Gleichung somit auch ohne Herleitung durchaus verstehen.



Die Druckkraft ist gleich der Druckdifferenz  $\Delta p$  mal die Fläche  $A$ , d.h.

$$F_D = A \Delta p \quad (8)$$

Im Gleichgewichtszustand müssen beide Kräfte gleich sein, d.h. die Druckkraft muss gleich der Zentrifugalkraft sein, sodass das Teilchen auf der Bahn bzw. Stromlinie bleibt:

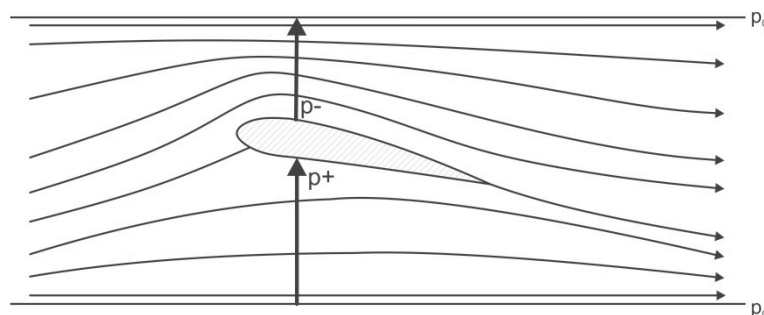
$$F_D = F_Z \quad (9)$$

Durch Einsetzen der entsprechenden Terme, Umformung und Bildung des Grenzwertes erhält man

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta r} = \frac{dp}{dr} = \rho \frac{U^2}{R} \quad (10)$$

wobei hier die Differenzen  $\Delta r$  und  $\Delta p$  gegen Null gehen und daher durch  $dr$  und  $dp$  ersetzt werden. In der Mathematik spricht man hier von einem Grenzwert oder Limes. Im Grenzwert ist dieser Ausdruck exakt. Das ist die Querdruckgleichung, die das Kräftegleichgewicht senkrecht zu den Stromlinien darstellt.

Die Querdruckgleichung liefert eine fundierte Erklärung für den aerodynamischen Auftrieb. Hierzu betrachte man Abbildung 11. Weit unter dem Profil ist die Strömung ungestört, d.h. sie verläuft parallel zum Boden und der Druck hier ist gleich dem Umgebungsdruck  $p_0$ . Da die Stromlinien unterhalb des Profils nach oben gewölbt sind muss laut Querdruckgleichung (10) der Druck nach oben zunehmen. Somit muss der Druck unterhalb des Profils  $p_+$  größer als der Umgebungsdruck  $p_0$  sein.



**Abbildung 11: Krümmung der Stromlinien und Auftrieb**

Oberhalb des Profils verhält es sich umgekehrt. Aufgrund der Krümmung der Stromlinien muss der Druck oberhalb des Profils zunehmen bis er den Umgebungsdruck  $p_0$  erreicht, somit muss der Druck am Profil selbst  $p_-$  geringer als der Umgebungsdruck  $p_0$  sein.

Es ergibt sich also aus der Querdruckgleichung und aus der Bedingung, dass weit weg vom Profil sowohl unterhalb wie auch oberhalb wieder der Umgebungsdruck  $p_0$



herrschen muss, dass sich über dem Profil ein Unterdruck  $p_-$  und unter dem Profil ein Überdruck  $p_+$  einstellen muss. Aus dieser Druckdifferenz entsteht somit der Auftrieb.

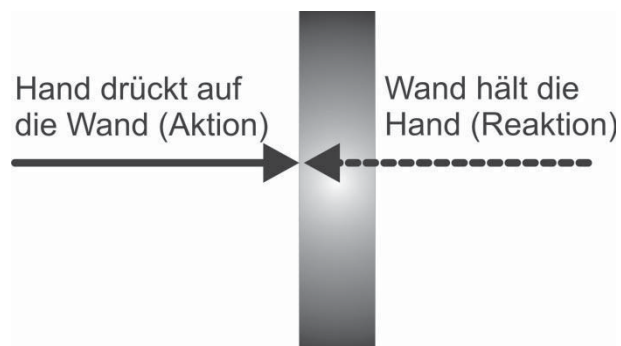
Kennt man die genaue Form der Stromlinien, d.h. den Krümmungsradius  $R$  an jeder Stelle, so liefert die Querdruckgleichung theoretisch den exakten Wert der Druckverteilung um das Profil und somit auch des Auftriebs.

Die Energiegleichung, d.h. die Bernoulli-Gleichung (5) kann nun, wenn die Druckverteilung  $p$  bekannt ist, den Geschwindigkeitsverlauf  $U$  um das Profil liefern. Es verhält sich hier also genau umgekehrt wie mit der unter *Unterschiedliche Wegstrecken und gleiche Durchlaufzeit* falschen Annahme der gleichen Umströmungszeiten beschrieben. Erst wird die Druckverteilung und danach die Geschwindigkeit bestimmt – und nicht umgekehrt.

Es wurde gezeigt, dass bei einem dünnen Profil die Stromlinien sich oberhalb des Profils stauchen und unterhalb spreizen. Allerdings sind wir von einer fertigen Berechnung ausgegangen und haben diese Tatsache schlicht beobachtet. Warum ist es aber so? Hierzu liefert auch die Massenerhaltung keine ausreichende Erklärung, da ein dünnes Profil die Strömung ja nicht unbedingt ober- und unterhalb anders verdrängen muss, wie es der Fall bei einem dicken gewölbten Profil ist.

### Impulsgleichung

Eine sehr direkte Erklärung für den Auftrieb liefert die Impulsgleichung i.V.m. dem 3. Newtonschen Gesetz, dem Reaktionsprinzip. Aus Erfahrung weiß man, dass wenn man z.B. mit den Händen gegen eine Wand drückt (Aktion), die Wand sozusagen mit entgegengesetzter Kraft die Hand festhält (Reaktion), weder die Hand noch die Wand bewegen sich. Wären die Kräfte nicht gleich groß und entgegengesetzt, würde entweder die Hand von der Wand nach links oder die Wand von der Hand nach rechts geschoben werden, Abbildung 12.



**Abbildung 12: Aktion und Reaktion zwischen Hand und Wand**

Dasselbe geschieht bei der Umströmung eines aerodynamischen Profils. Die Luft wird vom Profil nach unten umgelenkt. Die gesamte Fluidmasse erhält eine Geschwindigkeitskomponente nach unten, d.h. die Luft erhält einen Impuls nach unten.